



Dr hab. Wojciech Dybalski, prof. UAM  
Collegium Mathematicum  
Uniwersytet im Adama Mickiewicza  
w Poznaniu  
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4  
61-614 Poznań

dr hab. Jacek Szczytko, prof. ucz.  
Przewodniczący Rady Naukowej  
Dyscypliny Nauki Fizyczne  
Uniwersytet Warszawski  
ul. Żwirki i Wigury 93  
02-089 Warszawa.

**Recenzja pracy doktorskiej "Analytical and Algebraic Structures of Special Functions in Exactly Solvable Systems" autorstwa mgr Pedrama Karimiego**

Szanowny Panie Profesorze,

tematem przewodnim pracy doktorskiej mgr Pedrama Karimiego są funkcje specjalne. Rozprawa składa się ze wstępu i dwóch rozdziałów opartych na dwóch raczej odległych od siebie tematycznie artykułach naukowych.

Pierwszy rozdział rozprawy oparty jest na wspólnej pracy kandydata z Janem Derezińskim opublikowanej w Milan Journal of Mathematics. Dotyczy on jednowymiarowych operatorów Schrödingera  $L = -\partial_x^2 + V(x)$  z zespolonymi potencjałami  $V$ , interpretowanych jako operatory domknięte na  $L^2([a, b])$ . Przedmiotem zainteresowania autora są operatory których równania własne można zredukować do hipergeometrycznego równania Gaussa:

$$[z(1-z)\partial_z^2 + (c - (a+b+1)z)\partial_z - ab]f(z) = 0, \quad (1)$$

i których funkcje Greena  $(L - z)^{-1}$  można wyrazić przez hipergeometryczne funkcje Gaussa. Również rozważane są operatory, których równania własne można zredukować do równania Gegenbauera:

$$[(1-w^2)\partial_w^2 - 2(1+\alpha)w\partial_w + \lambda^2 - (\alpha + 1/2)^2]g(w) = 0. \quad (2)$$

Rozważane są trzy klasy operatorów:

- (1) Redukowalne do równania Gegenbauera;

(2) Redukowalne do równania hipergeometrycznego przez zamianę zmiennych typu  $z = \sin^2(r/2)$  (hipergeometryczne pierwszego rodzaju);

(3) Redukowalne do równania hipergeometrycznego przez zamianę zmiennych typu  $z = \frac{1}{1+e^{2r}}$  (hipergeometryczne drugiego rodzaju);

gdzie (1) jest podklasą zarówno (2) jak i (3).

Każda z tych rodzin dzieli się ponownie na trzy rodziny, mianowicie (a) sferyczną z  $]a, b[ = ]0, \pi[$ , (b) hiperboliczną z  $]a, b[ = ]0, \infty[$  i (c) de Sitterowską z  $]a, b[ = ]-\infty, \infty[$ . W przypadku (1) rozkład na przypadki (a),(b),(c) można otrzymać poprzez rozdzielanie zmiennych w (pseudo-)laplasjanach na (a) sferze jednostkowej, (b) przestrzeni hiperbolicznej i (c) przestrzeni de Sittera. Podobna interpretacja geometryczna została znaleziona w przypadku (2) ale niestety nie w przypadku (3).

Głównym wynikiem tego rozdziału są tożsamości transmutacyjne dla różnych funkcji Greena tych operatorów. Są to pewne zmiany zmiennych, które wyrażają  $(L_\lambda^{(A)} - \alpha^2)^{-1}$  przez  $(L_\alpha^{(B)} - \lambda^2)^{-1}$ , gdzie  $A, B$  oznaczają pewne typy operatorów z listy 9 przypadków wspomnianych powyżej. Tożsamości transmutacyjne zamieniają więc stałą sprzężenia z parametrem spektralnym. Jest to interesujące i nowe zjawisko matematyczne, nawet jeśli nie wydaje się mieć bezpośrednich zastosowań. Ponadto wyliczone są jądra całkowe i spektra rozważanych operatorów. Spektra poszczególnych operatorów były znane w szczególnych przypadkach ale systematyczna analiza wszystkich 9 rodzin nie pojawiła się wcześniej w literaturze.

Drugi rozdział rozprawy dotyczy modeli macierzowych. Opiera się on na artykule [BKS] napisanym przez kandydata we współpracy z Piotrem Sułkowskim i Aditya Bawane, który ukazał się w czasopiśmie Sci Post Physics. Po ok. 10-stronicowym wprowadzeniu do teorii wielomianów symetrycznych, szczególnie wielomianów Jack'a, autor przechodzi do przedstawienia wyników z pracy [BKS], która przytoczona jest niemalże verbatim. Ostatni podrozdział rozdziału drugiego wykracza poza [BKS] i dotyczy teorii Dunkl'a. Omówmy bardziej szczegółowo [BKS]: Praca ta dotyczy funkcji rozkładu postaci:

$$Z_\beta(V; p_k) = \int \left( \prod_{i=1}^N dz_i \right) [\Delta(z)]^{2\beta} \exp \left[ - \sum_{i=1}^N V(z_i) \right] \exp \left[ \beta \sum_{k=1}^\infty \frac{p_k}{k} \sum_{i=1}^N z_i^k \right] \quad (3)$$

gdzie  $\Delta(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)$  to wyznacznik Vandermonde'a,  $p_k$  to stałe sprzężenia,  $\beta$  to parametr a  $V$  potencjał. Autor rozważa tzw. przypadek gaussowski z członem liniowym  $V(z) = \frac{a_2 z^2}{2} + a_1 z$  jak również przypadek liniowo-logarytmiczny  $V = -a_1 z + \nu \log(z)$ . W przypadku gaussowskim jest pokazane, że

$$\langle P_\lambda(z_1, \dots, z_N) \rangle = \frac{P_\lambda\{N\} P_\lambda\{\beta^{-1}(a_2 \delta_{k,2} - a_1 \delta_{k,1})\}}{P_\lambda\{a_2 \beta^{-1} \delta_{k,1}\}}, \quad (4)$$

gdzie wartość oczekiwana po lewej stronie liczona jest w modelu (3) a  $P_\lambda$  to wielomiany Jack'a. Podobny wzór jest wyprowadzony w przypadku liniowo-logarytmicznym. Są to interesujące rezultaty, ponieważ redukują one problem wyliczenia skomplikowanej całki po lewej stronie (4) do ustalenia wartości wielomianów w pewnych zadanych punktach. Interesujące jest również, że wartości średnie wielomianów Jack'a wyrażają się ponownie przez wielomiany Jack'a. Dowód oparty jest na fakcie, że  $\mathcal{L}_n Z_\beta = 0$ , gdzie  $\mathcal{L}_n$  to operatory Virasoro w zmiennych  $p_k$ . Sumowanie po  $n$  daje relację  $(\mathcal{D} - a_2^{-1} W_{-2}) Z_\beta = 0$  dla odpowiednich operatorów  $\mathcal{D}$  i  $W_{-2}$  co z kolei prowadzi do relacji

$$Z_\beta = e^{W_{-2}/(2a_2)} 1. \quad (5)$$

Dlatego kluczem do udowodnienia (4) jest działanie  $W_{-2}$  na 1 i inne wielomiany Jack'a. Okazuje się, że zachodzi relacja (2.3.19) o schematycznej postaci

$$W_{-2} P_\mu = \sum (\dots) C_{\mu\lambda} P_\lambda, \quad (6)$$

gdzie współczynniki  $C_{\mu\lambda}$  (a dokładniej suma ich iloczynów, która pojawi się w (5)) zostają wyznaczone z wzoru Cauchy'ego dla wielomianów Jack'a (2.3.34). Bardziej skomplikowane jest wyznaczenie współczynników  $A_{\mu\lambda}$ , ukrytych w (...) we wzorze (6). Tu potrzebna jest reguła Pieri'ego i szczegółowa analiza diagramów Yanga. Myślę, że te uwagi wystarczają, żeby podkreślić, że ten rezultat jest elegancki i wysoce nietrywialny.

Mam jednak pewne zastrzeżenia co do prezentacji, dotyczące rozdziału drugiego. Artykuł [BKS] ma charakter zwięzłego doniesienia naukowego przeznaczonego dla ekspertów w dziedzinie modeli macierzowych. Myślę, że w rozprawie należałoby przedstawić to rozumowanie w sposób bardziej wyczerpujący, przystępny dla szerszego grona czytelników. Na przykład wzór (5) mógłby zostać uzasadniony, a relacje Pieri'ego i nietypowa notacja typu  $\sum_{\lambda=\mu+\square+\square}$  w systematyczny sposób wprowadzone we wstęp do tego rozdziału. Wstęp w obecnej formie jest oczywiście pomocny, ale miejscami zbyt skondensowany. Na przykład w przytoczonym na str. 91 dowodzie znanego faktu, że wielomiany Jack'a są wektorami własnymi Hamiltonianu Calogero-Sutherlanda, logika wywodu kryjącego się za przedstawionymi obliczeniami nie jest zbyt dobrze wyjaśniona. Również w rozważaniach dot. Hamiltonianu Calogero-Sutherlanda w podrozdziale 2.6.7 jest zbyt wiele skrótów myślowych. Na przykład we wzorze (2.6.38)  $M$  jest skończone po jednej stronie równania a nieskończone po drugiej. Co więcej, brakuje kilku słów fizycznej lub matematycznej motywacji dla rozważanych modeli macierzowych i nakreślenia szerszego kontekstu badawczego, w który one się wpisują.

Podsumowując, kandydat opanował szeroki aparat pojęć i metod, szczególnie w zakresie teorii funkcji specjalnych. Artykuły, na których opiera się rozprawa, zawierają bardzo interesujące rezultaty z zakresu teorii operatorów Schrödingera i teorii modeli macierzowych, które bez wątpienia stanowią znaczące postępy w tych dyscyplinach.

Doceniając znaczenie współpracy naukowej, należy jednak zaznaczyć, że te artykuły kandydat napisał z bardzo doświadczonymi współautorami. Żeby ocenić samodzielność kandydata, przyjrzyjmy się podrozdziałowi 2.6, który wykracza poza te prace. Tutaj wyprowadzony jest wzór na wartość oczekiwaną iloczynu dwóch wielomianów Jack'a w rozważanym modelu. Argument jest zupełnie inny niż w [BKS], opiera się na podejściu Dunkl'a do funkcji hipergeometrycznych i stanowi uzupełnienie dyskusji z pracy Okunkova [O1]. Mogę zatem powiedzieć, że kandydat potrafi również samodzielnie przeprowadzić studia nad literaturą, i rozwiązać problem badawczy. Biorąc pod uwagę ten fakt, jak również wysoką jakość artykułów na których opiera się rozprawa oraz to, że moje zastrzeżenia dotyczą głównie preliminarów, **moja konkluzja jest pozytywna. Jestem przekonany, że kandydat spełnia ustawowe kryteria dot. stopnia doktora.**

Z wyrazami szacunku,

Wojciech Dybalski

Wojciech Dybalski