

Wykład 6 – odpowiedzi do zadań

Zadanie 1. Neutron jest niestabilną cząstką elementarną, która po pewnym czasie ulega rozpadowi na proton, elektron i antyneutrino elektronowe. Wykonano 3 niezależne doświadczenia, w których mierzono czas życia neutronu i otrzymano następujące wyniki: (883 ± 30) s, (888 ± 3) s, (894 ± 5) s. Podaj najlepszą ocenę czasu życia neutronu i niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Na podstawie trzech różnych wyników pomiarów tej samej wielkości wyznaczamy najlepszą ocenę jej wartości. Nasze dane, to: zmierzone czasy życia: $\tau_1 = 883$ s, $\tau_2 = 888$ s, $\tau_3 = 894$ s i ich niepewności: $u_1 = 30$ s, $u_2 = 3$ s, $u_3 = 5$ s. Obliczamy średnią ważoną i jej niepewność – we wzorach poniżej podstawiam bezpośrednio liczbę danych $N = 3$:

$$\tau_w = \frac{\sum_{i=1}^3 \tau_i / u_i^2}{\sum_{i=1}^3 1 / u_i^2}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $\tau_w = 889,5401$ s. Mianownik wyrażenia jest równy $1/u_{int}^2$. Otrzymujemy $u_{int} = 2,5631$ s. Potrzebujemy jeszcze obliczyć u_{ext} :

$$u_{ext}^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 (\tau_i - \tau_w)^2 / u_i^2}{3 - 1} u_{int}^2.$$

Otrzymujemy $u_{ext} = 1,9066$ s $< u_{int}$.

Wybieramy większą z niepewności i po poprawnym zaokrągleniu podajemy ostateczną odpowiedź $\tau = (889,5 \pm 2,6)$ s.

Zadanie 2. Podczas zajęć pracowni fizycznej trzech studentów A, B i C wyznaczali gęstość trzech próbek metalu (każdy z nich badał jedną próbkę) dostarczonych przez asystenta. O asystencie wiadomo, że dysponuje tylko dwoma typami próbek i są to próbki żelaza i chromu. W tabelach można znaleźć, że gęstość żelaza wynosi $7,874$ g/cm³, a chromu $7,140$ g/cm³. Studenci otrzymali następujące rezultaty: $\rho_A = (7,095 \pm 0,150)$ g/cm³, $\rho_B = (8,006 \pm 0,150)$ g/cm³ i $\rho_C = (7,070 \pm 0,081)$ g/cm³. Ponieważ przynajmniej dwóch studentów badało ten sam metal, znajdź najlepszą ocenę gęstości tego metalu i jej niepewność, wynikające z pomiarów wykonanych przez studentów.

Rozwiązanie. Jak w poprzednim zadaniu mamy trzy różne wyniki pomiarów, o których wiemy, że co najmniej dwa dotyczą tej samej wielkości – gęstości jednego z metali. Do podjęcia decyzji, które wyniki dotyczą tego samego metalu posłużymy się testem „ 3σ ”:

$$\frac{|\rho_A - \rho_B|}{\sqrt{u_A^2 + u_B^2}} = 4,29... > 3,$$

a więc przyjmujemy, że próbki A i B nie były z tego samego metalu. Ponieważ $\rho_C < \rho_A$ więc tym bardziej nie może to być ten sam metal, co B (test 3σ daje wartość 5,49). Dla pewności sprawdzimy zgodność wartości A i C:

$$\frac{|\rho_A - \rho_C|}{\sqrt{u_A^2 + u_C^2}} = 0,146.. < 3.$$

Wartości gęstości ρ_A i ρ_C są zgodne i na ich podstawie możemy wyznaczyć ocenę gęstości lepszą niż każda z nich oddzielnie. Obliczamy średnią ważoną ρ_A i ρ_C i jej niepewność:

$$\rho_w = 7,07564 \text{ g/cm}^3, u_{int} = 0,07127 \text{ g/cm}^3 \text{ i } u_{ext} = 0,010452.. \text{ g/cm}^3.$$

Po poprawnym zaokrągleniu wyników podajemy ostateczną odpowiedź:

$$\rho_w = (7,076 \pm 0,071) \text{ g/cm}^3.$$

Do rozwiązania tego zadania podane tablicowe wartości gęstości nie są potrzebne. Przed obliczeniem średniej ważonej porównujemy zgodność wyników między sobą, a nie zgodność z danymi tablicowymi.

Zadanie 3. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać: $pV = nRT$, gdzie p oznacza ciśnienie, V objętość, n liczbę moli gazu, T temperaturę gazu w skali Kelvina, a R to uniwersalna stała gazowa. Student badał zmiany objętości V dla $n = 0,05$ mola gazu od jego temperatury T przy stałym ciśnieniu $p = 1015$ hPa. Po ustaleniu temperatury T , pomiar objętości V powtarzał wielokrotnie i obliczał wartość średnią $\bar{V}$. Wyniki pomiarów zebrał w tabeli:

Temperatura T/K	293	298	303	308	313
Średnia objętość V/litr	1,196	1,207	1,243	1,274	1,293

Niepewności kolejnych wartości $\bar{V}$ były bardzo zbliżone i wynosiły $u_V = 0,010$ litra. Przyjmij, że liczba moli n i ciśnienie p gazu znane są wystarczająco dokładnie. Wyznacz ocenę wartości stałej gazowej i niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Z treści zadania i danych wynika, że temperaturę T należy uznać za wielkość mierzoną (i kontrolowaną) *dokładnie* – tzn. mierzoną dokładniej niż objętość V gazu. Za zmienną niezależną uznajemy więc T , a V za zmienną zależną. Niepewność wszystkich pomiarów V jest taka sama i wynosi $u_V = 0,01$ litra. Objętość V jest więc proporcjonalna do T :

$$V = \frac{nR}{p}T.$$

Należy teraz wyznaczyć współczynnik proporcjonalności $a = nR/p$ i jego niepewność, a następnie, znając *dokładne* wartości n i p wyznaczyć R . Ta sama niepewność w sumach licznika i mianownika ulega skróceniu, mamy więc ocenę:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^5 V_i T_i}{\sum_{i=1}^5 T_i^2}.$$

Otrzymujemy $\hat{a} = 0,004101599$ litr/K. Niepewność $\hat{a}$ równa jest:

$$u^2(\hat{a}) = \frac{u_V^2}{\sum_{i=1}^5 T_i^2}.$$

Otrzymujemy $u(\hat{a}) = 1,475551 \cdot 10^{-5}$ litr/K. Pozostaje podstawienie $\hat{a}$ do wzoru $\hat{R} = \hat{a} \cdot p/n = 0,004101599 \cdot 1,015 \cdot 10^5 / 0,05 = 8,326246$ litr·Pa/mol = 8,3262246 J/mol. Pozostaje wyznaczenie $u(\hat{R}) = p \cdot u(\hat{a})/n = 0,02995$ J/(mol·K) – skorzystaliśmy z *prawa propagacji niepewności*.

Po poprawnym zaokrągleniu otrzymujemy ostateczną odpowiedź: $R = (8,326 \pm 0,030)$ J/(mol·K).

Zadanie 4. Studentka miała za zadanie wyznaczyć nieznaną opór R pewnego opornika. Do dyspozycji miała układ elektryczny, w którym mogła zmieniać napięcie na oporniku oraz amperomierz, którym dla ustalonego napięcia U mierzyła natężenie I prądu płynącego przez opornik. Wartość napięcia ustalana była z bardzo dużą dokładnością (przyjmij, że niepewność wartości U jest pomijalnie mała). Niepewność pomiaru natężenia prądu nie była pomijalna i wynosiła u , zgodnie z wartościami podanymi w tabeli. Zależność między natężeniem I i napięciem opisuje wzór: $U = RI$. Otrzymane wyniki studentka zapisała w tabeli:

Numer pomiaru	1	2	3	4	5
I [mA]	0,48	1,24	2,14	2,35	2,91
U [mV]	1,12	2,31	4,15	4,95	5,81
u [mA]	0,05	0,10	0,10	0,15	0,20

Wyznacz ocenę wartości oporu R oraz niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Z opisu w treści zadania wynika, że U należy przyjąć za zmienną niezależną znaną dokładnie, a I za zmienną zależną mierzoną z podanymi niepewnościami. Mamy więc:

$$I = U/R.$$

Współczynnikiem proporcjonalności jest $a = 1/R$. Zadanie staje się bardzo podobne do poprzedniego, z tą różnicą, że dla różnych punktów pomiarowych niepewność pomiaru I jest różna, co komplikuje nieco obliczenia. Mamy (u_i oznacza niepewność pomiaru I_i):

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^5 I_i U_i / u_i^2}{\sum_{i=1}^5 U_i^2 / u_i^2}$$

oraz

$$u^2(\hat{a}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^5 U_i^2 / u_i^2}.$$

Otrzymujemy $\hat{a} = 0,4965881 \text{ A/V}$ i $u(\hat{a}) = 0,01460123 \text{ A/V}$. Na tej podstawie wyznaczamy $\hat{R} = 2,013742 \text{ V/A}$ i $u(\hat{R}) = u(\hat{a})/\hat{a}^2 = 0,005921 \text{ V/A}$.

Po poprawnym zaokrągleniu otrzymujemy ostateczną odpowiedź: $R = (2,014 \pm 0,059) \text{ V/A}$.

Zadanie 5. Student badał przemianę izochoryczną gazu. Podgrzewał pewną ilość tego gazu w zamkniętym naczyniu i mierzył ciśnienie p i temperaturę t w skali Celsjusza i uzyskał wyniki podane w tabeli. Zakładając, że w warunkach doświadczenia gaz zachowuje się jak gaz doskonały, tzn. spełnia równanie:

$$\frac{pV}{T} = \text{const},$$

gdzie p jest jego ciśnieniem, V objętością, a T temperaturą w skali bezwzględnej, wyznacz ocenę temperatury zera bezwzględnego w skali Celsjusza i niepewność tej oceny. Zastosuj metodę najmniejszych kwadratów. Przyjmij, że temperatura była mierzona z niepewnością $u = 2^\circ\text{C}$, a ciśnienie było mierzone dostatecznie dokładnie.

Ciśnienie p (atmosfery)	1,0	1,4	1,6	2,0
Temperatura t ($^\circ\text{C}$)	36	158	223	350

Rozwiązanie. Podany w treści zadania opis pomiarów wskazuje, że za zmienną niezależną powinniśmy przyjąć ciśnienie p , a zmienna zależna to temperatura t . Niepewności pomiaru kolejnych wartości t są takie same i wynoszą $u = 2^\circ\text{C}$. W opisie przemiany występuje temperatura bezwzględna T , a pomiary temperatury były wykonane przyrządem podającym wartości w skali Celsjusza i w tej skali podane są wartości t_i w tabeli. Wiemy, że między obydwoima skalami zachodzi związek:

$$T = t + t_0,$$

gdzie t_0 oznacza wartość temperatury bezwzględnej odpowiadającej temperaturze 0°C . Tym samym temperatura zera bezwzględnego $T_0 = 0 = t + t_0$ odpowiada w skali Celsjusza $t = -t_0$. Podstawmy związek między skalami temperatur do równania przemiany izochorycznej dla „const” przyjmujemy oznaczenie A):

$$\frac{pV}{T} = \frac{pV}{t + t_0} = A \Rightarrow t = \frac{pV}{A} - t_0.$$

Podczas przemiany izochorycznej objętość V pozostaje stała, a więc otrzymaną zależność możemy zapisać jako:

$$t = ap + b,$$

gdzie $a = V/A$ oraz $b = -t_0$. Z treści zadania wynika, że p należy przyjąć za zmienną niezależną, a t za zmienną zależną, przy czym niepewność każdej z podanych wartości t wynosi $u = 2^\circ\text{C}$. Jak widać, wartość b jest poszukiwaną temperaturą zera bezwzględnego w skali Celsjusza. Pozostaje zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do wyznaczenia parametru

b na podstawie danych zadania umieszczonych w tabeli. Wszystkie niepewności pomiarów t są jednakowe, a więc ta wielkość ulega skróceniu we wzorach na b (poniżej wzory uwzględniające to uproszczenie):

$$D = N \sum_{i=1}^N p_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N p_i \right)^2$$

$$\hat{b} = \frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^N p_i^2 \sum_{j=1}^N t_j - \sum_{i=1}^N p_i \sum_{j=1}^N p_i y_j \right).$$

Po podstawieniu danych z tabeli i $N = 4$ otrzymujemy: $\hat{b} = -279,885 \text{ } ^\circ\text{C}$. Obliczmy $u(\hat{b})$. Korzystamy ze wzorów wyprowadzonych podczas *Wykładu 6*. Po uwzględnieniu równości wszystkich niepewności t_i wzór na $u(\hat{b})$ upraszcza się do postaci:

$$u^2(\hat{b}) = \frac{u^2}{D} \sum_{i=1}^N p_i^2.$$

Otrzymujemy $u(\hat{b}) = 4,27875 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Po poprawnym zaokrągleniu wyników otrzymujemy odpowiedź końcową $b = (-279,9 \pm 4,3) \text{ } ^\circ\text{C}$.

Uwaga: Oczywiście wiemy „ze szkoły” ile wynosi temperatura zera bezwzględnego w skali Celsjusza ($-273,15 \text{ } ^\circ\text{C}$). Wartość ta została wyznaczona na podstawie pomiarów podobnych do opisanych w treści tego zadania i właśnie wyznaczenie tej wartości na podstawie wyników pomiarów jest przedmiotem tego zadania. Otrzymana wartość leży daleko poza badanym obszarem temperatur – warto zauważyć, że otrzymany wynik jest tym dokładniejszy, im większy przedział temperatur obejmują pomiary (zakładając tę samą dokładność pomiarów w całym badanym obszarze).

Zadanie 6. Studentka przeprowadziła pomiar ciepła c parowania wody zdefiniowanego związkiem $Q = cm$, gdzie Q jest ilością energii, jaką należy dostarczyć masie m wody, żeby zamienić ją w parę. Ustawiła na wadze otwarty termos z pewną ilością wody i zanurzoną w wodzie grzałką o mocy $P = 600 \text{ W}$. Po włączeniu grzałki odczekała aż woda zacznie wrzeć i rozpoczęła pomiary masy m układu rejestrując wskazania wagi w równych odstępach czasu. Wyniki zestawiała w tabeli:

Czas t (minuty)	0	5	10	15	20
Wskazania wagi m (gramy)	1000	910	800	770	720

Przyjmij, że czas mierzony był wystarczająco dokładnie, także moc grzałki znana jest wystarczająco dokładnie i pozostawała stała podczas całego pomiaru. Wyznacz ciepło parowania wody c i niepewność uzyskanej oceny.

Rozwiązanie. Ilość ciepła Q pobranego podczas zamiany wody w parę jest proporcjonalna do masy m powstałej pary. Jednocześnie jest ona równa energii dostarczonej przez grzałkę o mocy P działającą w czasie t : $Q = Pt$. Zgodnie z treścią zadania przyjmujemy, że moc grzałki $P = 600 \text{ W}$ znana jest dokładnie oraz, że czas t jest mierzony dokładnie (dokładniej niż masa) i dlatego przyjmiemy czas t za zmienną niezależną. W tabeli podane są wyniki pomiaru masy w kolejnych chwilach czasu, ale nie mamy określonych niepewności pomiarów masy. Warunki

wykonywania pomiarów – ta sama waga i niewielki zakres wartości mierzonych mas – wskazują, że każda wartość masy była zmierzona z taką samą niepewnością. Niepewność tę ocenimy na podstawie rozrzutu punktów pomiarowych w stosunku do dopasowanej prostej. Mierzona masa m zawiera zarówno masę wody, która w chwili pomiaru jest w termosie jak i masę termosu. Wskazuje to, że należy przyjąć, że:

$$m = M_0 - \frac{Q}{c} = M_0 - \frac{P}{c}t,$$

gdzie M_0 oznacza początkową masę termosu i wody w chwili, gdy woda zaczęła wrzeć, a Q/c jest masą wody zamienionej w parę. Posługując się metodą najmniejszych kwadratów znajdziemy parametry prostej: $m = M_0 + at$, gdzie $a = -P/c$. Po wyznaczeniu wartości parametru a i jej niepewności będziemy mogli wyznaczyć poszukiwaną wartość $c = P/a$ i jej niepewność. Odpowiednie wzory zostały omówione w ramach *Wykładu 6* jako przypadek, gdy nie znamy niepewności zmiennej niezależnej, ale możemy założyć, że dla wszystkich punktów pomiarowych niepewność wyniku pomiaru jest taka sama. Interesuje nas wartość współczynnika a , ale do obliczenia niepewności będziemy także potrzebowali wartości $\hat{M}_0$:

$$\begin{aligned} D &= N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2 \\ \hat{a} &= \frac{1}{D} \left(N \sum_{i=1}^N t_i m_i - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{j=1}^N m_j \right) \\ \hat{M}_0 &= \frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \sum_{j=1}^N m_j - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{j=1}^N m_j t_j \right). \end{aligned}$$

Po podstawieniu $N = 5$ oraz t_i i m_i z tabeli otrzymujemy: $\hat{a} = -14,00 \text{ g/min} = 0,2333.. \text{ g/s}$, $\hat{M}_0 = 980,0 \text{ g}$. Do oszacowania niepewności $\hat{a}$ potrzebna jest ocena u – niepewności pomiaru masy:

$$u^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \hat{a}t_i - \hat{M}_0)^2}{N - 2}.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy $u = 28,2843 \text{ g}$, co daje niepewność $\hat{a}$ równą:

$$u^2(\hat{a}) = \frac{Nu^2}{D}$$

Otrzymujemy $u(\hat{a}) = 1,78885 \text{ g/min} = 0,029814 \text{ g/s}$. Wyznaczamy $\hat{c} = -P/a = 2571,43 \text{ J/g}$ i niepewność $u(\hat{c}) = u(\hat{a})P/\hat{a}^2 = 328,56 \text{ J/g}$.

Po poprawnych zaokrągleniach otrzymujemy odpowiedź: $c = (2,57 \pm 0,33) \text{ kJ/g}$.