

Analiza niepewności pomiarowych

Wstęp do analizy danych

Wykład 1

1 Uwagi wstępne

Prowadzony przeze mnie przedmiot ma na celu przygotowanie Państwa do analizowania wyników pomiarów. Podczas wykładu posługuję się prezentacją, która jest dostępna na stronie przedmiotu

<http://pracownie1.fuw.edu.pl/anipw/>

jako **Slajdy/transparencje do wykładu**. Na tej samej stronie znajdują się też dodatkowe materiały związane z przedmiotem:

- Instrukcja jak pisać raport końcowy
- Konstrukcja histogramu
- Przykładowy raport

Materiały te mogą być pomocne przy opracowaniu danych zebranych podczas pomiarów i przygotowaniu raportu końcowego. Teksty kolejnych **Wykładów** są skrótami moich wykładów – można je traktować jako komentarze rozbudowujące i wyjaśniające treść **Slajdów/transparencji do wykładów**. Znajdą w nich Państwo także nieco dodatkowych uwag, na które podczas wykładu zwykle nie starcza czasu. **Wykłady 4 – 7** kończą przykładowe zadania do omawianej w nich części materiału. Szczegółowe rozwiązania tych zadań znajdą Państwo jako **Wykład .. – Odpowiedzi do zadań**.

Główna część materiału dotyczy zagadnień związanych z analizą danych: wyznaczaniem najlepszej oceny wartości mierzonej wielkości fizycznej oraz oceną dokładności uzyskanego wyniku, tj. wyznaczaniem niepewności wyniku pomiaru. Wyznaczanie najlepszej oceny wartości mierzonej wielkości i jej niepewności wymaga dokonania szczegółowej analizy metody pomiaru oraz przebiegu jej realizacji, to znaczy, przebiegu pomiaru. Do głębszego zrozumienia procesu pomiaru i sformułowania metod analizy jego wyników posłużą nam modele matematyczne korzystające z pojęć rachunku prawdopodobieństwa i metod statystyki matematycznej. Zaczniemy od najprostszych metod opisu i prezentacji dużych zbiorów danych liczbowych, czyli od **statystyki opisowej**.

2 Charakterystyki zbiorów danych liczbowych

Przyjrzyjmy się danym dotyczącym mas studentów I roku (anonimowa ankieta została przeprowadzona na Wydziale Fizyki na początku roku akademickiego 2000/2001) przedstawionym w postaci histogramu – Figure 1, poniżej. Podczas wykładu prezentowałem tabelę zebranych danych, w której studentki i studenci, kolejno, wpisywali swoją masę i wzrost. Taka tabela zawiera pełną informację, ale ta informacja do wielu celów jest zbyt bogata – na przykład do porównywania różnych grup studentów bardziej przydatny jest mniej szczegółowy opis syntetycznie przedstawiający cały zbiór danych. Często używaną charakterystyką jest wartość **średnia**.

Średnia μ : dla zbioru danych $i \rightarrow x_i, i = 1, \dots, N$ definiujemy wartość **średnią μ** :

$$\mu := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N).$$

Może nas także interesować szerokość rozkładu zbioru wartości x_i wokół ich średniej. Powszechnie stosowaną miarą rozrzutu danych jest **średnie odchylenie kwadratowe**.

Średnie odchylenie kwadratowe σ^2 :

$$\sigma^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \mu)^2$$

oraz pierwiastek z tej wielkości $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Wielkość σ nazywana jest też **dyspersją rozkładu**.

Jak łatwo sprawdzić suma kwadratów odchylen zbioru danych od zadanej liczby jest najmniejsza, gdy tą liczbą jest wartość średnia zbioru danych – odchylenia liczone są od wartości średniej.

Uwaga: W powyższych definicjach dla oznaczenia średniej i dyspersji użyte zostały greckie litery μ i σ dla podkreślenia, że obliczenia dotyczą całej populacji. W przyszłości wielokrotnie będziemy konstruowali wyrażenia dające dobre przybliżenie wartości μ i σ obliczane na podstawie **próbki** danych tj. danych z losowo wybranego podzbioru pełnej populacji. Dla wielkości μ odpowiednim przybliżeniem jest wielkość równa średniej danych próbki, którą często oznacza się jako $\bar{x}$ (kreska nad x wskazuje, że próbka została pobrana ze zbioru wielkości x).

Mediana i średnie odchylenie bezwzględne

Zdefiniowane wyżej charakterystyki są stosowane powszechnie, mają jednak istotną wadę, gdy liczba przypadków (liczebność populacji) jest niewielka. Obie charakterystyki – średnia i średnie odchylenie kwadratowe są czułe na pojedyncze wartości znacznie odbiegające od pozostałych wartości x_i w populacji (w próbce). Taka pojedyncza nawet wartość – powiedzmy x_k – znacznie większa od pozostałych, gdy liczebność populacji N jest niewielka, znacząco wpływa na wartość tych charakterystyk obliczanych dla całej populacji. Z tego powodu używana jest często charakterystyka wolna od tej wady: **mediana** i związane z nią **średnie odchylenie bezwzględne**:

medianę m dla zbioru liczb $x_i, i = 1, \dots, N$ uporządkowanych rosnąco (lub malejąco) definiujemy, jako $m = x_{n+1}$, gdy liczebność N zbioru jest liczbą nieparzystą, $N = 2n + 1$,

a gdy N jest liczbą parzystą, $N = 2n$, to dla jednoznaczności przyjmujemy $m = (x_{n-1} + x_{n+1})/2$. Tak zdefiniowana mediana dzieli zbiór wartości x_i na dwa równoliczne podzbiory.

Mediana jest całkowicie „nieczuła” na pojedyncze wartości x_i znacznie mniejsze lub znacznie większe od pozostałych wartości zbioru.

Z medianą związane jest też **średnie odchylenie bezwzględne** d :

średnie odchylenie bezwzględne d : jest miarą rozrzutu zbioru danych x_i , $i = 1, \dots, N$ wokół **mediany** m tego zbioru:

$$d := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} |x_i - m|$$

Jak łatwo sprawdzić suma wartości bezwzględnych odchyleń jest najmniejsza, gdy odchylenia liczone są od mediany.

Dla mas studentów i studentek I roku (rocznik 2000/2001; dane prezentowane podczas wykładu) odpowiednie charakterystyki wynoszą:

średnia mas studentów $\mu_M = 73,06$ kg

mediana mas studentów $m_M = 72$ kg

średnia mas studentek $\mu_K = 56,70$ kg

mediana mas studentek $m_K = 55,5$ kg

Dla wszystkich, tj. studentów i studentek razem:

średnia mas $\mu = 69,17$ kg

mediana mas $m = 70$ kg

Graficzna prezentacja danych – histogram

Wygodnym sposobem prezentacji danych jest **histogram**. Pełne dane dotyczące (deklarowanych) mas studentów przedstawia histogram (Figure 1) poniżej. Studenci podawali jako swoje masy całkowite liczby kilogramów, a więc histogram z krokiem 1 kg zawiera pełną informację – równoważną pełnej tabeli – o grupie studentów.

Brzeży przedziałów na osi poziomej zostały umieszczone w wartościach połówkowych, a każdy przedział ma szerokość 1 kg – każdą wartość podaną w tabeli można więc jednoznacznie przyporządkować do konkretnego przedziału na osi poziomej. Zwykle przyjmuje się, że przedziały histogramowania są **prawostronnie domknięte** – tzn. jeśli wśród danych pojawia się wartość równa wartości przyjętej jako granica przedziałów to doliczana jest jako należąca do przedziału po lewej stronie tej granicy.

Opis osi poziomej zawiera poza cyframi także nazwę wielkości i jej jednostkę (kg) – gdyby w tekście odwołującym się do tego histogramu był używany symbol na oznaczenie masy studenta, np. M , to i ten symbol powinien znaleźć się w opisie osi.

Opis osi pionowej zawiera nazwę wielkości i cyfry reprezentujące liczby studentów o masach mieszczących się w kolejnych przedziałach (wielkości niemianowane) – wysokość „słupka” odpowiada liczbie osób o masach zawartych wewnątrz przedziału stanowiącego podstawę słupka. Warto zwrócić uwagę, że między słupkami nie ma przerw – masa jest wielkością ciągłą, a więc podane

przez studentów liczby całkowite należy rozumieć jako reprezentujące wartości leżące wewnątrz całego przedziału.

Jak widać histogram mas studentów z krokiem $\Delta = 1$ kg ma dosyć bogatą strukturę (prawdopodobnie wynikającą z tendencji do podawania „okrągłych” wartości). Jeśli chcemy mieć bardziej syntetyczny obraz danych, to możemy wykonać histogram z większym krokiem. Dwa następne histogramy wykonano z krokiem $\Delta = 3$ kg.

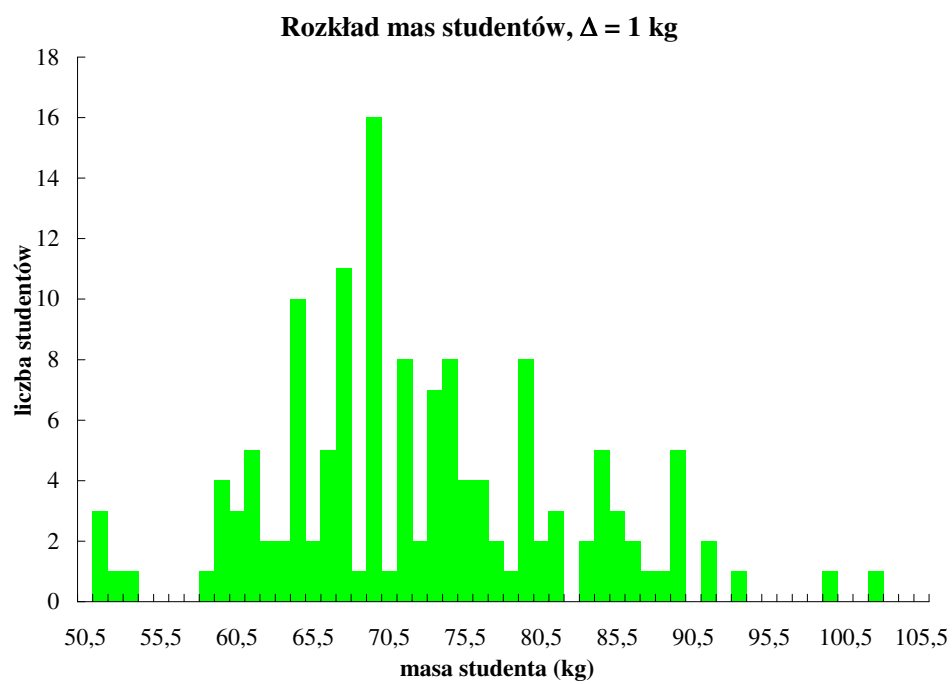


Figure 1: Masy studentów. Przedział histogramowania 1 kg.

Warto porównać oba histogramy dla przedziału histogramowania $\Delta = 3$ kg – ich kształty znacznie się różnią. Ten fakt należy potraktować jako wskazówkę, że przed wyciągnięciem

wniosków i formułowaniu hipotez dobrze jest sprawdzić, czy nie są one wynikiem przyjętych szerokości przedziałów i położenia granic przedziałów histogramowania.

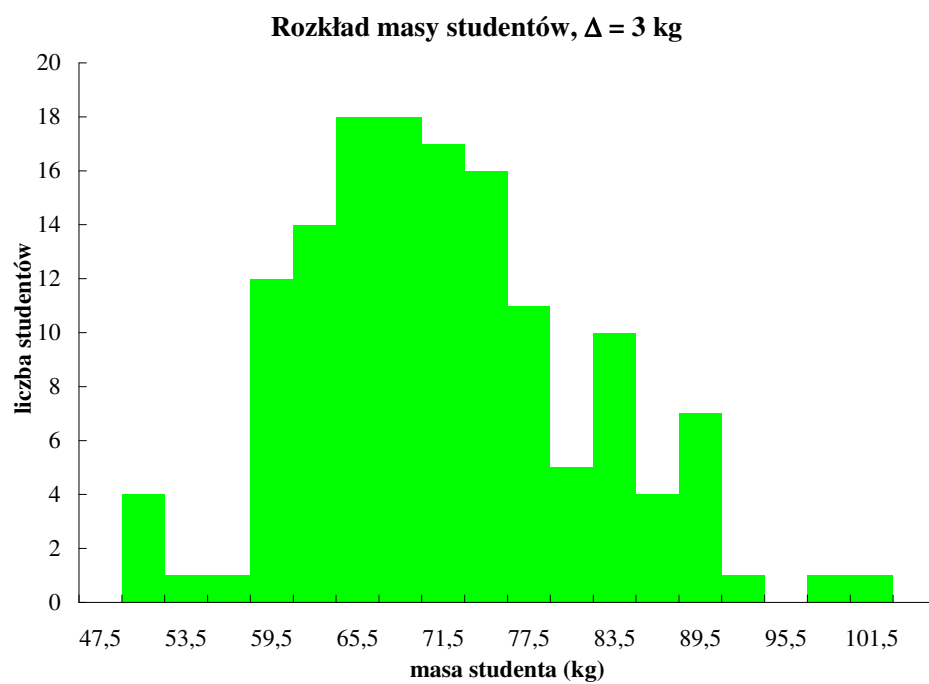


Figure 2: Masy studentów. Przedział histogramowania 3 kg.

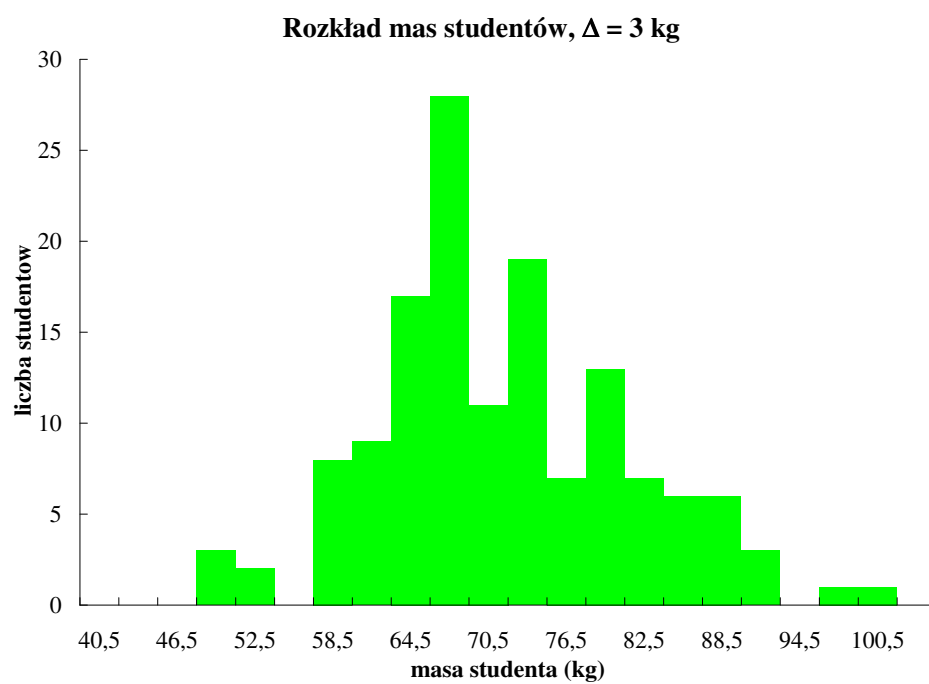


Figure 3: Masy studentów. Przedział histogramowania 3 kg – lewy brzeg przesunięty w stosunku do poprzedniego przykładu.

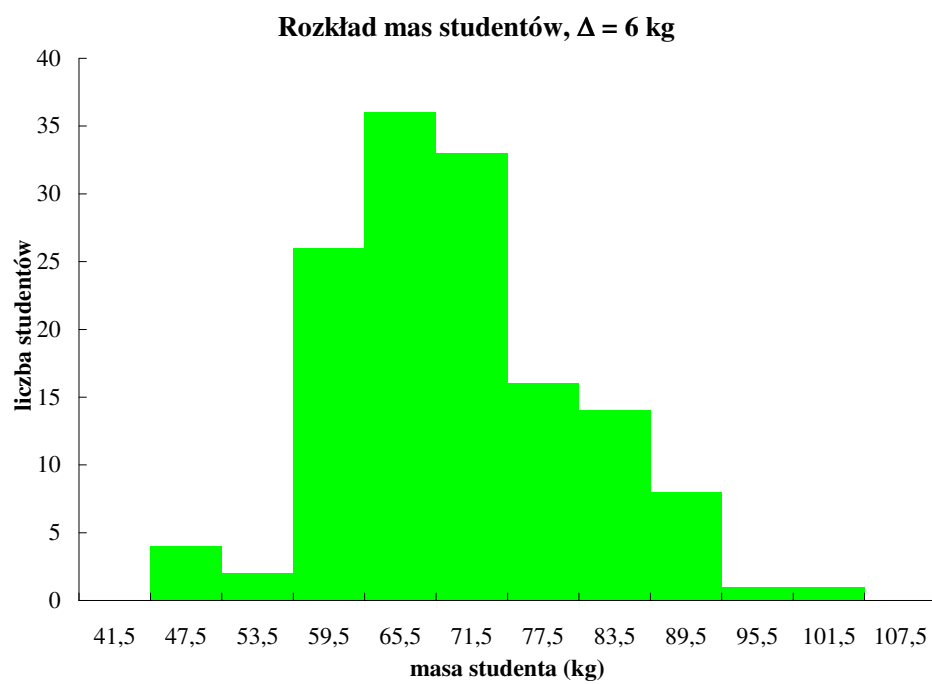


Figure 4: Masy studentów. Przedział histogramowania 6 kg.

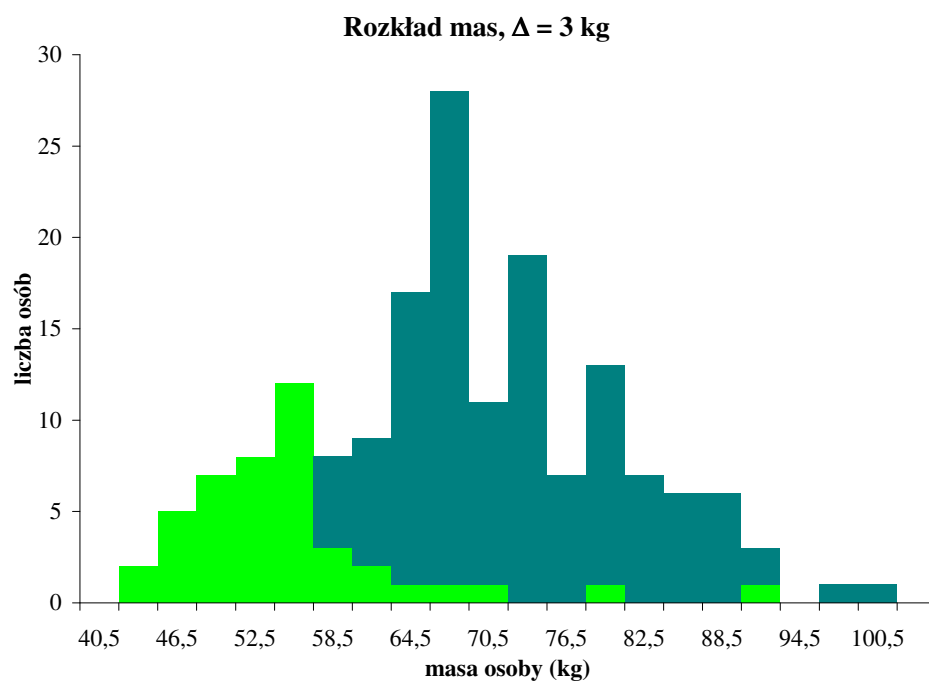


Figure 5: Masy studentów (ciemny kolor) i studentek (jasny kolor). Przedział histogramowania 3 kg – „słupki” studentów naniesione od górnych krawędzi histogramu dla studentek.

Na koniec jeszcze histogram ostatnich cyfr liczb pojawiających się w *tabliczce mnożenia* liczb od 1 do 10 – wielkości dyskretnej.

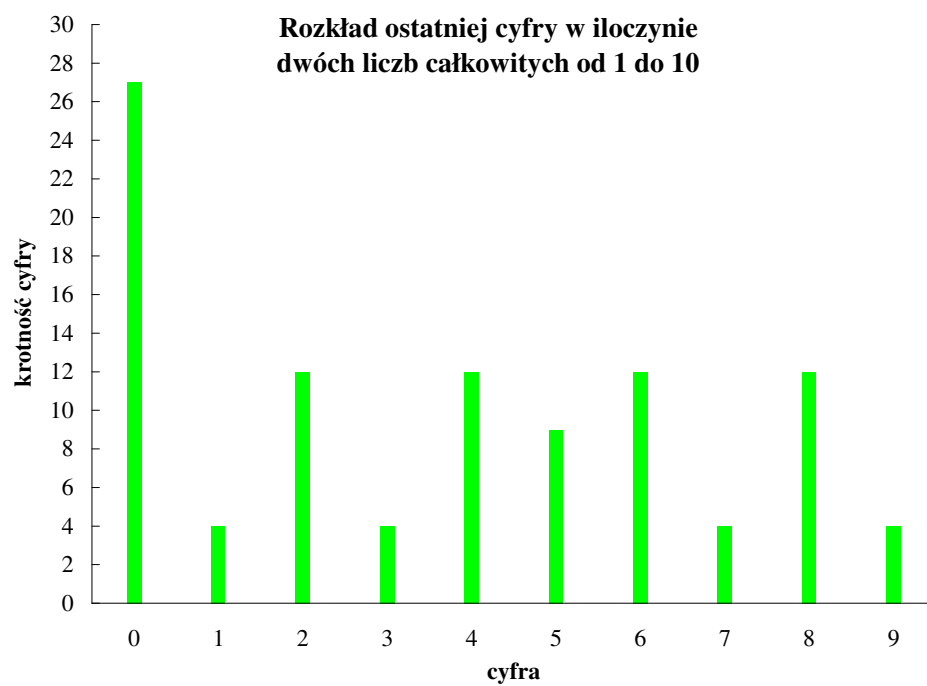


Figure 6: Rozkład ostatniej cyfry w iloczynach liczb całkowitych od 1 do 10

3 Bezpośredni pomiar pojedynczej wielkości fizycznej

Istotą pomiaru jest porównanie interesującej nas wielkości z przyjętym wzorcem $\rightarrow$ jednostką mierzonej wielkości. Zgodnie z polskim prawem w pomiarach żyjemy jednostek Układu SI. Jego konstrukcja jest wielkim osiągnięciem cywilizacji: jednakowy, precyzyjnie zdefiniowany układ jednostek został przyjęty na całym świecie – poza Stanami Zjednoczonymi, Liberią i Mjanmą (Birmą). W naukach przyrodniczych także w Stanach Zjednoczonych stosowany jest Układ SI. Od chwili przyjęcia we Francji definicji metra i sekundy, w roku 1791, oraz kilograma, w roku 1795, definicje jednostek układu były wielokrotnie zmieniane w celu zwiększenia precyzji wzorców, a z tym także dokładności wykonywanych pomiarów. Wraz z odkrywaniem nowych zjawisk wprowadzano także dalsze jednostki.

Od 2018 roku jednostki Układu SI: amper, kelwin, sekunda, metr, kilogram, kandela i mol oraz ich pochodne definiowane są poprzez przyjęcie jako dokładnych wartości podstawowych stałych fizycznych:

- prędkości światła w próżni, $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$
- stałej Plancka, $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$
- ładunku elementarnego, $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\text{ C}$
- stałej Boltzmanna, $k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$
- stałej Avogadra, $N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}\text{ 1/mol}$
- częstotliwości nadsubtelnego przejścia w atomie cezu 133, $\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770\text{ Hz}$
- skuteczności świetlnej monochromatycznego promieniowania o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$, $K_{cd} = 683\text{ lm/W}$

Definicje jednostek Układu SI można znaleźć na stronie Głównego Urzędu Miar:

<https://www.gum.gov.pl/>

lub na stronie Międzynarodowego Biura Miar i Wag (BIPM) – oficjalny tekst po angielsku:

<https://www.bipm.org/en/measurement-units/>

Wykonywanie pomiarów

Wykonując pomiary nie korzystamy bezpośrednio z wzorców odpowiednich jednostek, ale używamy odpowiednio wykalibrowanych przyrządów. Podczas pomiaru staramy się, tak dalece jak jest to możliwe, wyeliminować wszelkie czynniki, które mogłyby zakłócić jego przebieg. Dokładność uzyskanego wyniku zależy od:

- przyjętej metody pomiaru;
- sposobu i dokładności eliminowania czynników zakłócających jego przebieg;
- jakości przyrządów pomiarowych $\rightarrow$ dokładności i powtarzalności odtwarzania przez nie wzorca mierzonej jednostki.

Podczas następnych wykładów zajmiemy się analizą wpływu wymienionych wyżej czynników na dokładność pomiaru i budowaniem modeli matematycznych procesu pomiaru. Będziemy zakładali, że **dokładna wartość** mierzonej wielkości istnieje i jest dobrze zdefiniowaną, mianowaną liczbą rzeczywistą, a pomiar służy jak najdokładniejszemu poznaniu tej wartości.

Uwaga: Należy jednak pamiętać, że w wielu sytuacjach mamy do czynienia z wielkościami, dla których pojęcie dokładnej wartości ma ograniczony sens. Tak jest np. w przypadku masy człowieka – z każdym oddechem nasza masa nieznacznie się zmienia (wydychamy dwutlenek węgla i parę wodną powstające w procesach przemiany materii). Nie będziemy dalej wracali do tego zagadnienia.

Założymy, że:

- wielkość mierzona ma jednoznacznie określoną, ale nie znaną nam wartość μ ;
- jako wynik pomiaru otrzymujemy wartość x ;
- różnicę $\varepsilon = x - \mu$ nazywamy **błędem pomiaru**;
ponieważ nie znamy dokładnie wynosi μ , to nie jest nam także znana dokładna wartość błędu ε .

Na podstawie serii pomiarów będziemy starali się zdobyć wiedzę o rozkładzie prawdopodobieństwa wartości ε w naszych pomiarach.