# Wykład 5 – odpowiedzi do zadań

**Zadanie 1.** Podczas przepływu prądu o natężeniu $I$ przez grzałkę o oporze $R$ w czasie $t$, wydzielane jest ciepło $Q = I^2Rt$. Wyznacz ocenę ilości wydzielonego ciepła $Q$ i niepewność tej oceny, jeśli $R = (30,0 \pm 0,2)\ \Omega$, $I = (10,0 \pm 0,1)$ A oraz $t = (50 \pm 5)$ s.

**Rozwiązanie**. W treści zadania podany jest wzór pozwalający wyznaczyć szukaną wielkość $Q$ wraz z wszystkimi danymi pomiarowymi i ich niepewnościami. Rozwiązanie polega więc jedynie na poprawnym podstawieniu do wzorów na $Q$ i niepewność $u(Q)$.
$Q = I^2Rt = 10^2 \cdot 30 \cdot 50$ J $= 150$ kJ. Mamy także:

$$u^2(Q) = (2IRtu(I))^2 + (I^2tu(R))^2 + (I^2Ru(t))^2.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy: $u(Q) = 15,33$ kJ$\approx 15$ kJ.

**Odpowiedź:** $Q = (150 \pm 15)$ kJ.

**Zadanie 2.** Korzystając ze wzoru Snella:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

student miał wyznaczyć współczynnik załamania $n$ pewnego gatunku szkła. Wyniki jego pomiarów to, kąt padania $\alpha = 31° \pm 1°$oraz kąt załamania $\beta = 20° \pm 1°$. Wyznacz ocenę wartości współczynnika załamania $n$ i niepewność tej oceny.

**Rozwiązanie**. Podstawiamy wartość kątów do wzoru Snella i otrzymujemy:

$$n = \frac{0,515038..}{0,342020..} \approx 1,50587.$$

Do wyznaczenia niepewności $u(n)$ stosujemy wzór na propagację małych niepewności:

$$u^2(n) = \left(\frac{\partial n}{\partial\alpha}u(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial\beta}u(\beta)\right)^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}u(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{-\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta}u(\beta)\right)^2.$$

Obliczając pochodne funkcji trygonometrycznych korzystaliśmy z faktu, że gdy kąt wyrażony jest w mierze łukowej, to pochodną funkcji $\sin\alpha$ jest funkcja $\cos\alpha$ itd. Oznacza to, że wartości niepewności $u(\alpha)$ i $u(\beta)$ musimy wyrazić w radianach: $1° = \frac{\pi}{180}$ radiana $\approx 0,017453$ radiana. Po tej zmianie jednostki podstawiamy wartość $u(\alpha) = u(\beta) = 0,017453$ rad do wzoru na $u(n)$ i otrzymujemy: $u(n) \approx 0,084425$. Po poprawnym zaokrągleniu wyniku otrzymujemy:

**Odpowiedź:** $n = 1,506 \pm 0,084$.

**Zadanie 3.** Dysponując równią pochyłą o zmiennym kącie nachylenia z naklejonym na nią papierem, monetą 5 zł oraz kątomierzem o podziałce co 0,5°, studentka wyznaczała współczynnik $\mu$ tarcia statycznego monety o papier. Zwiększając powoli kąt nachylenia równi, na której spoczywała moneta, studentka rejestrowała wartość kąta granicznego, przy którym moneta zaczynała się ześlizgiwać z równi. Powtarzając pięciokrotnie pomiar otrzymała następującą serię wartości kąta granicznego: 14,5°, 14,5°, 14,0°, 14,0 oraz 15,0°. Współczynnik tarcia statycznego $\mu = \text{tg}\ \alpha$, gdzie $\alpha$ jest kątem granicznym. Wyznacz najlepszą ocenę wartości współczynnika $\mu$ oraz niepewność tej oceny.

**Rozwiązanie**. Najlepszą oceną kąta granicznego, kiedy moneta zaczyna zsuwać się po równi, jest średnia arytmetyczna wszystkich wyników pomiaru kąta:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = \frac{1}{5}(14,5^\circ + 14,5^\circ + 14,0^\circ + 14,0^\circ + 15,0^\circ) = 14,4^\circ,$$

Niepewność tak obliczonej oceny kąta granicznego wynosi:

$$u^2(\bar{\alpha}) = \frac{1}{4\cdot 5}(0,01 + 0,01 + 0,16 + 0,16 + 0,36)\cdot(1^\circ)^2 + 0,25\cdot(1^\circ)^2/3 = 0,118333\cdot(1^\circ)^2.$$

Ostatecznie $u(\bar{\alpha}) = 0,343996^\circ$.
Współczynnik tarcia $\hat{\mu} = \text{tg}\ \bar{\alpha} = 0,256756$, a jego niepewność:

$$u^2(\hat{\mu}) = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}u(\bar{\alpha})\right)^2.$$

Pochodna $\text{tg}\alpha$ względem $\alpha$ wynosi $1/\cos^2\alpha$ – pamiętamy o mierze łukowej
– $u(\bar{\alpha}) = 0,006004$ rad, co prowadzi do wyniku $u(\hat{\mu}) = 0,00639966 \approx 0,0064$.

**Odpowiedź:** $\mu = 0,2568 \pm 0,0064$.

**Zadanie 4.** Do wykonania doświadczenia chemicznego potrzebna jest objętość $V = 500$ cm$^3$ wody destylowanej. Student dysponuje szklaną, walcową menzurką o wewnętrznej średnicy $D = (8,0 \pm 0.1)$ cm i wysokości $H = 15$ cm oraz elektroniczną wagą kuchenną podającą masę z dokładnością $\Delta = 5$ g. W tablicach student odczytał gęstość $\rho = 0,99821$ g/cm$^3$ wody destylowanej w temperaturze 20℃ (taka temperatura panowała w laboratorium). Wysokość słupa wody w menzurce student mierzy linijką o podziałce $\delta = 0,1$ cm. Którą z dwóch metod powinien wybrać, aby jak najdokładniej odmierzyć potrzebną ilość wody destylowanej:

- Czy powinien odmierzyć odpowiednią wysokość słupa wody w menzurce?
- Czy powinien postawić pustą menzurkę na wadze, a następnie ostrożnie wlewać do niej wodę, aż odczyta odpowiednią różnicę mas?

Odpowiedź należy poprzeć odpowienimi obliczeniami.

**Rozwiązanie**. Decyzję dotyczącą metody należy podjąć po wyznaczeniu niepewności, z jaką potrzebna ilość wody zostanie odmierzona każdą z metod. Pojemność wewnętrzna walca o średnicy wewnętrznej $D$ i wysokości $h$ (wodę nalewamy do wysokości $h < H$) wynosi:

$$V = \pi\frac{D^2 h}{4}.$$

Niepewność $u_1$ tak wyznaczonej pojemności wynosi:

$$u_1^2 = \left(\frac{2\pi D h u(D)}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi D^2 u(h)}{4}\right)^2,$$

gdzie $u(D) = 0,1$ cm (wartość niepewności podana w treści zadania), $u(h) = 0,1/\sqrt{3}$ cm – (pamiętamy, że za niepewność pomiaru przyrządem o rozdzielczości $\delta$ przyjmujemy $\delta/\sqrt{3}$ ). Do wykonania obliczenia niepewności $u_1$ potrzebujemy oszacować wartość wysokości $h$, do jakiej należy nalać wody do menzurki: $h = 4V/(\pi D^2) = 9,94718..$ cm. Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy: $u_1 \approx 12,83$ cm$^3$ (jeśli przyjmiemy $u(h) = \delta$, co jest dopuszczalne, to $u_1 \approx 13,47$ cm$^3$).
W przypadku użycia wagi należy odmierzyć masę $m = V \cdot 0,99821$ g/cm$^3$ $= 499,105$ g. Powinniśmy jeszcze zastanowić się jak taki pomiar będzie przeprowadzany. Jeśli waga posiada funkcję tarowania (wiele wag elektornicznych taką funkcję posiada), to wówczas odczytujemy bezpośrednio masę dodaną po „wytarowaniu" wagi i możemy przyjąć $u_2 = \Delta/(\rho\sqrt{3}) = 2,8919$ cm$^3$ lub, gdy przyjmujemy $u(m) = \Delta$, $u_2 = \Delta/\rho = 5,00897$ cm$^3$. Jeśli pomiar wykonujemy poprzez dwukrotne ważenie: raz pustej menzurki, a następnie menzurki wypełnionej wodą, to nasz wynik będzie różnicą wyników obu ważeń: $m_{woda} = m_{menzurka+woda} - m_{menzurka}$, a więc $u(m_{woda}) = \sqrt{2}\Delta/\sqrt{3}$ (lub $u(m_{woda}) = \sqrt{2}\Delta$, gdy uznamy rozdzielczość wagi za niepewność wykonanych za jej pomocą pomiarów). Odpowiednio przeliczona niepewność $u_2 = 4,0898$ cm$^3$ lub $u_2 = 7,08375$ cm$^3$, gdy utożsamiamy niepewność pomiaru masy z rozdzielczością wagi.

**Odpowiedź:** użycie wagi jest metodą dokładniejszą i tą metodą powinien posłużyć się student. Podając niepewność student powinien oczywiście odpowiednio zaokrąglić otrzymaną ocenę do nie więcej niż 2 cyfr znaczących.

**Uwaga:** Podane w rozwiązaniu oceny niepewności wydają się niejednoznaczne. Należy jednak pamiętać, że wykonując pomiary mamy obowiązek dokładnie zapoznać się z „działaniem" przyrządów pomiarowych (czy waga ma funkcję tarowania, czy nie, i czy tej funkcji używamy). W przypadku, gdy mamy do czynienia z przyrządem analogowym (menzurka, waga kuchenna „ze wskazówką") możemy utożsamiać najmniejszą działkę podziałki z niepewnością wskazań. Nasza decyzja w znacznym stopniu zależy od oceny dokładności naniesienia skali – gdy podziałka analogowa wykonana jest bardzo starannie, to dopuszczalne jest nawet „interpolowanie" odczytu „pomiędzy" kreskami podziałki z dokładnością do 0,2 - 0,5 najmniejszej działki.

**Poprawne rozwiązanie** zadania tego typu powinno zawierać informacje o sposobie interpretowania danych – tę rolę spełniają w powyższym rozwiązaniu uwagi o przyjętym związku niepewności z rozdzielczością przyrządu oraz uwagi o funkcji tarowania wagi. Dopiero z takimi objaśnieniami można ocenić poprawność obliczeń.