

Analiza niepewności pomiarowych

Wstęp do analizy danych

Wykład 7

Testowanie hipotez

1 Uwagi wstępne

W poprzednich wykładach, o rozkładach prawdopodobieństwa, jakim podlegają wyniki pomiarów zakładaliśmy jedynie, że posiadają one skończone wartości oczekiwane oraz skończone wariancje i kowariancje. Szukaliśmy sposobów na znajdowanie najlepszych ocen wartości parametrów rozkładu na podstawie pobranej próby (serii pomiarów), albo modelu matematycznego – jak w przypadku opisu wpływu dokładności przyrządów pomiarowych na niepewność wyniku końcowego. Tylko podczas *Wykładu 4*, posługiwaliśmy się konkretną postacią gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Sformułowaliśmy wówczas tzw. test „ 3σ ”.

Przyjeliśmy, że wyniki bezpośredniego pomiaru pojedynczej wielkości fizycznej podlegają rozkładowi normalnemu. Sprawdzaliśmy, czy otrzymany wynik jest zgodny z przewidywaną teoretycznie wartością μ mierzonej wielkości x . Przypomnijmy jak przebiegało nasze postępowanie. Po wykonaniu pomiarów, obliczaliśmy wartość wielkości zbudowanej z uzyskanych wyników – był to moduł różnicy $|x - \mu|$, a następnie obliczaliśmy prawdopodobieństwo uzyskania otrzymanej wartości lub wartości jeszcze większej, gdyby badana hipoteza była prawdziwa. Jeśli prawdopodobieństwo to było mniejsze niż przyjęta *wartość krytyczna* α , to odrzucaliśmy hipotezę jako zbyt mało prawdopodobną. Przyjęta *wartość krytyczna* α , to akceptowane prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej – prawdopodobieństwo popełnienia **błędu pierwszego rodzaju**. Podsumujmy kolejne kroki testowania hipotezy na podstawie uzyskanych wyników pomiarów:

- decydujemy, jakie prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej (popełnienia **błędu I rodzaju**) jesteśmy skłonni zaakceptować – tzn. przyjmujemy wartość parametru α ;
- definiujemy wielkość, która dobrze „mierzy” zgodność wyników z badaną hipotezą i podlega znanemu nam rozkładowi prawdopodobieństwa (wielkość, zbudowana z wyników losowej próby, w literaturze fachowej nazywana jest **statystyką**);
- obliczamy wartość tej wielkości dla uzyskanych wyników pomiarów;
- obliczamy prawdopodobieństwo p uzyskania otrzymanej wartości lub wartości wskazującej na odstępstwo od badanej hipotezy większe niż odstępstwo naszych wyników;
- jeżeli $p < \alpha$, to badaną hipotezę odrzucamy uznając, że nie jest prawdziwa – w przeciwnym razie uznajemy, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy (nie oznacza to, że hipoteza jest prawdziwa – dalsze pomiary lub inne testy mogą skłonić nas do jej odrzucenia).

Obliczenie prawdopodobieństwa p wymaga znajomości lub wiarygodnego założenia postaci rozkładu prawdopodobieństwa, jakiemu podlegają wyniki wykonywanych prób. Wybór wartości krytycznej α wynika natomiast z oceny kosztów błędnej decyzji co do prawdziwości badanej hipotezy. Przyjęcie dużej wartości α może prowadzić do pochopnego odrzucenia hipotezy prawdziwej, a zbyt małej – do wydłużenia badań nad hipotezą fałszywą. Ważny jest też koszt związany z podjęciem błędnej decyzji. Przystępując do gry „orzeł, czy reszka” – przykład na stronie 35 *Slajdów do wykładu* – przy wyborze wartości α do testowania hipotezy „moneta jest uczciwa” na pewno będziemy brali pod uwagę wysokość stawki, jaką możemy w każdym rzucie wygrać lub przegrać.

Jak wynika z powyższego opisu można skonstruować wiele testów do badania tej samej hipotezy. Testy takie będą różniły się wyborem *statystyki*, czyli wielkości mierzącej stopień zgodności wyników z badaną hipotezą. Z drugiej strony, wybór sposobu testowania zależy oczywiście także od postaci testowanej hipotezy.

Zagadnienie sposobów konstruowania testów i porównywania stopnia ich przydatności (efektywności) jest przedmiotem intensywnych badań, którymi tutaj nie będziemy się zajmowali. Zajmiemy się natomiast dwoma testami powszechnie stosowanymi przez fizyków:

- testem zgodności dopasowania zależności funkcyjnej do wyników pomiarów – taki test pozwoli sprawdzić, czy wybrana przez nas funkcja wraz z podanymi wartościami jej parametrów lub ich wartościami znalezionymi metodą najmniejszych kwadratów, opisuje obserwowany doświadczalnie związek dwóch wielkości fizycznych;
- testem zgodności rozkładu zaobserwowanych wyników z zakładanym rozkładem prawdopodobieństwa – taki test pozwoli np. sprawdzić, czy wyniki bezpośrednich pomiarów rzeczywiście podlegają rozkładowi Gaussa (normalnemu), jak to w wielu miejscach zakładaliśmy na podstawie diskutowanego w §11 *Slajdów do wykładu* modelu błędu przypadkowego.

W obu przypadkach posłużymy się rozkładem χ^2 zdefiniowanym w dalszej części wykładu.

2 Test zgodności dopasowania

Badamy związek wielkości x i y . Na podstawie rozważań teoretycznych lub wcześniejszych pomiarów oraz postrzeganej przez nas regularności układu punktów pomiarowych na wykresie y jako funkcji x wnioskujemy, że zachodzi związek:

$$y = f(x; a_1, \dots, a_k).$$

Ten wyprowadzony teoretycznie lub odgadnięty na podstawie pomiarów związek jest naszą **hipotezą**. Tę hipotezę poddajemy testowi.

Dla serii wartości wielkości x wykonujemy pomiary odpowiadających im wartości wielkości y :

$$x_i \mapsto \hat{y}_i \pm \sigma_i; \quad i = 1, \dots, N > k.$$

O wartościach x_i zakładamy, że znane są dokładnie. Oczywiście nie oczekujemy, że wyniki naszych pomiarów ułożą się dokładnie na krzywej $y = f(x, a_1, \dots, a_k)$. Nawet, gdyby badana

zależność była ścisłym prawem fizyki – błędy przypadkowe spowodują, że przy najstaranniejszym wykonywaniu pomiarów zaobserwujemy odchylenie wartości $\hat{y}_i$ od $f(x_i, a_1, \dots, a_k)$. Zakładamy, że wynik pomiaru każdej z wielkości $\hat{y}_i$ jest zmienną losową o wartości oczekiwanej równej znanej funkcji argumentu x_i i o wariancji σ_i^2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\hat{y}_i) &= f(x_i; a_1, \dots, a_k) \\ \mathcal{E}\left((\hat{y}_i - f(x_i; a_1, \dots, a_k))^2\right) &= \sigma_i^2.\end{aligned}$$

O każdej z wariancji σ_i^2 zakładamy, że jest znaną, dodatnią liczbą rzeczywistą. Dla danego zbioru wartości parametrów $\{a_1, \dots, a_k\}$ naturalną miarą zgodności wyników pomiarów z zależnością $\hat{y}_i = f(x_i, a_1, \dots, a_k)$ jest używana już przez nas w *Wykładzie 6* wielkość:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{y}_i - f(x_i, a_1, \dots, a_k))^2}{\sigma_i^2}.$$

Im mniejsze $\mathcal{R}$, tym lepiej wyniki pomiarów $\hat{y}_i$ „pasują” do badanej zależności. Jeśli hipoteza jest prawdziwa i $\mathcal{R}$ obliczymy dla prawdziwych wartości a_i , to z przyjętych powyżej założeń wynika, że:

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = N,$$

bo każdy ze składników sumy definiującej $\mathcal{R}$ jest zmienną losową o wartości oczekiwanej zero i wariancji jeden. Do sformułowania kryterium ilościowego pozwalającego określić, czy obliczona dla naszych pomiarów wartość $\mathcal{R} = R$ jest „duża”, czy „mała” musimy znać rozkład prawdopodobieństwa, jakiemu podlega zmienna losowa $\mathcal{R}$.

Jeśli przyjmiemy, że każdy z wyników pomiarów $\hat{y}_i$ podlega rozkładowi normalnemu (Gaussa) o wartości oczekiwanej i wariancji zgodnej z poczynionymi wyżej założeniami, to gęstość prawdopodobieństwa g rozkładu zmiennej losowej $\mathcal{R}$ wynosi (§24 *Slajdów do wykładu*; użyte są tam nieco inne oznaczenia):

$$g(\mathcal{R}, N) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{N}{2})} \left(\frac{\mathcal{R}}{2}\right)^{\frac{N}{2}-1} \exp(-\mathcal{R}/2).$$

Zdefiniowany wyżej rozkład nazywany jest **rozkładem χ^2** , a liczba N jest nazywana **liczbą stopni swobody**.

Gdy znamy rozkład zmiennej $\mathcal{R}$, to możemy obliczyć prawdopodobieństwo p otrzymania wartości równej wartości R obliczonej dla naszych wyników lub od niej większej:

$$p(\mathcal{R} \geq R) = \int_R^\infty g(x, N) dx.$$

Jeśli tak obliczone prawdopodobieństwo p jest mniejsze od przyjętej wartości krytycznej α : $p(\mathcal{R} > R) < \alpha$, to odrzucamy hipotezę: $y = f(x; a_1, \dots, a_k)$. Oznacza to, odrzucenie koniunkcji: dana postać funkcji f i dane wartości parametrów $\{a_1, \dots, a_k\}$. Taka decyzja nie wyklucza, że wybrana postać funkcji $f(x; a_1, \dots, a_k)$ jest poprawna, bo to podstawione (dane jako część testowanej hipotezy) wartości parametrów $\{a_1, \dots, a_k\}$ mogą być błędne – wszystkie lub tylko niektóre z nich.

Jeśli uważamy, że postać wybranej funkcji $f(x; a_1, \dots, a_k)$ została dobrze dobrana, to możemy wartości parametrów wyznaczyć **metodą najmniejszych kwadratów**. Wiemy już, że jeśli

$f(x; a_1, \dots, a_k)$ jest liniową funkcją k parametrów a_i , których wartości $\hat{a}_i$ wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów (dopasowano do danych doświadczalnych $\hat{y}_i, i = 1, \dots, N$), to wartość oczekiwana:

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = \mathcal{E} \left(\sum_{i=1}^N \frac{(\hat{y}_i - f(x_i; \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k))^2}{\sigma_i^2} \right) = N - k,$$

gdzie k jest liczbą parametrów dopasowanych metodą najmniejszych kwadratów, a $\hat{a}_i, i = 1, \dots, k$, oznaczają wartości parametrów otrzymane tą metodą. Jeżeli, zgodnie z naszym założeniem, każdy z wyników $\hat{y}_i$ podlega rozkładowi normalnemu, to wartość $\mathcal{R}$ obliczona po podstawieniu wartości $\hat{a}_i$ otrzymanych metodą najmniejszych kwadratów podlega rozkładowi χ^2 o liczbie stopni swobody równej $N - k$. Możliwe jest więc przeprowadzenie testu. Obliczmy prawdopodobieństwo uzyskania wartości $\mathcal{R}$ równej lub większej od wartości R_{min} obliczonej po podstawieniu parametrów $\hat{a}_i$ uzyskanych metodą najmniejszych kwadratów. Do obliczenia tego prawdopodobieństwa **posłużymy się rozkładem χ^2 o liczbie stopni swobody równej $N - k$** . Jeżeli prawdopodobieństwo to jest mniejsze od przyjętej wartości krytycznej α , to odrzucamy hipotezę, że wybrana funkcja $f(x_i; \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k)$ opisuje związek wielkości x i y .

Przeprowadzając w praktyce opisane wyżej testy, w miejsce σ_i^2 podstawiamy niepewności $u(\hat{y}_i)$, które są naszymi najlepszymi ocenami wartości σ_i . Często badana funkcja nie jest liniową funkcją parametrów a_i . Metoda najmniejszych kwadratów pozwala znaleźć najlepsze wartości tych parametrów – dopasować funkcję do danych doświadczalnych. Obliczona dla takich parametrów wartość $\mathcal{R}$ bywa przez fizyków używana do przeprowadzenia opisanego wyżej testu wykorzystującego rozkład χ^2 z $N - k$ stopniami swobody. Nie jest to postępowanie w pełni uzasadnione, ale mimo to dosyć często w praktyce stosowane.

Uwagi:

Może się zdarzyć, że dla wybranej postaci funkcji f , metodą najmniejszych kwadratów znajdujemy wartości tylko niektórych jej parametrów – np. $l < k$ parametrów, a wartości pozostałych $k - l$ parametrów podstawiamy jako znane nam liczby. W takim przypadku, liczba stopni swobody rozkładu χ^2 , którym posługujemy się testując hipotezę, wynosi $N - l$. Inaczej: każdy parametr „dopasowany” metodą najmniejszych kwadratów zmniejsza liczbę stopni swobody o jeden.

Przeprowadzając test korzystamy zwykle z tabeli **krytycznych wartości $\mathcal{R}_{crit}(\alpha, n)$** obliczonych dla danego α – akceptowanego prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju i różnych liczb stopni swobody n (poniżej, taka tabela poprzedza treści zadań do materiału tego wykładu). Porównujemy obliczoną wartość $\mathcal{R}$ z wartością w tabeli – jeśli dla przyjętej przez nas wartości α i liczby stopni swobody n w naszym problemie, obliczona wartość $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{crit}(\alpha, n)$ to hipotezę odrzucamy .

Dotychczas rozważaliśmy przypadki, gdy obliczona wartość $\mathcal{R}$ jest duża. Zastanówmy się przez chwilę, co oznacza **zbyt mała wartość $\mathcal{R}$** – tzn. znacznie mniejsza od liczby stopni swobody. Może to oznaczać że:

- zostały znacznie zawyżone oceny niepewności wykonanych pomiarów;
- pomiary nie były niezależne;
- dane nie pochodzą z rzeczywistych pomiarów.

Dwie pierwsze możliwości wskazują na konieczność ponownego przeanalizowania wyników pomiarów. Ostatnie z wymienionych przypuszczeń pozwala podejrzewać oszustwo. Niestety, w historii nauki zdarzały się przypadki „fabrykowania danych”, a zostały one ujawnione po wnikliwej analizie statystycznej rzekomych „danych doświadczalnych”.

3 Sprawdzanie zgodności rozkładu wyników pomiarów z zadaniem rozkładem prawdopodobieństwa

W poprzednich wykładach wielokrotnie odwoływaliśmy się do konkretnych postaci rozkładów prawdopodobieństwa. Rozkłady te wyprowadzaliśmy na podstawie modelu matematycznego (rozkład dwumianowy, rozkłady Poissona i Gaussa jako graniczne przypadki rozkładu dwumianowego) lub po prostu przyjmowaliśmy jako założenie. W każdym z tych przypadków zasadne jest pytanie: Czy interesująca nas zmienna losowa rzeczywiście podlega przyjętemu przez nas rozkładowi? W tym paragrafie skonstruujemy metodę „doświadczalnego” sprawdzania założeń o rozkładzie, jakiemu podlega zmienna losowa. Metoda „doświadczalna” oznacza, że będzie ona polegała na pobraniu próby i sprawdzeniu, czy rozkład jej wyników jest zgodny z przyjętym założeniem. Sprawdzenie to będzie dokonywane za pomocą statystycznego testu – podobnie jak sprawdzanie zgodności dopasowania wybranej funkcji do wyników pomiarów. Zaczniemy od prostego przykładu:

Przykład (Badanie rozkładu wyników rzutu kostką do gry).

Przystępując do gry hazardowej, w której o wynikach decyduje liczba „oczek” w kolejnych rzutach kostką chcielibyśmy wiedzieć, czy używana kostka jest „uczciwa”, tj. czy każda z sześciu liczb oczek: 1, 2, 3, 4, 5 i 6 pojawia się z taką samą częstością jak pozostałe. Sprawdzenie musi polegać na wykonaniu odpowiednio dużej liczby N rzutów i analizie ile razy w uzyskanej serii wyników wystąpiła każda z liczb oczek. Nie spodziewamy się, że każda liczba oczek wystąpi **dokładnie** tyle samo razy, ale chcielibyśmy wiedzieć, jak duże różnice są do pogodzenia z hipotezą *kostka jest uczciwa*. Konstrukcja testu polega na zbudowaniu *statystyki* z częstości k_i , $i = 1, \dots, 6$, pojawienia się każdej z liczb oczek. Musimy jeszcze znać rozkład prawdopodobieństwa wartości, jakie taka statystyka może przyjąć: jeśli prawdopodobieństwo wartości obliczonej dla naszego doświadczenia będzie zbyt małe, to uznamy, że należy odrzucić hipotezę: *kostka jest uczciwa*.

Rozważmy ogólniejszy problem niż badanie „uczciwości” kostki do gry. Zaczniemy od konstrukcji rozkładu prawdopodobieństwa wyników N losowych prób, z których każda może dać jeden z M wyników. Nie będziemy zakładali, że te wyniki są jednakowo prawdopodobne.

Rozkład wielomianowy

Założenia:

- wykonujemy N prób;
- w każdej próbie możemy uzyskać jeden z M wyników;
- prawdopodobieństwo uzyskania wyniku i , $i = 1, \dots, M$, wynosi p_i ;
- kolejne wyniki pojawiły się $k_1, \dots, k_M$ razy.

Jakie jest prawdopodobieństwo P otrzymania obserwowanego zestawu wartości $k_1, \dots, k_M$?
Odpowiedź (rozumowanie analogiczne jak przy wyprowadzaniu rozkładu dwumianowego) daje **rozkład wielomianowy**

$$P(k_1, \dots, k_M; p_1, \dots, p_M, N) = \frac{N! p_1^{k_1} \dots p_M^{k_M}}{k_1! k_2! \dots k_M!}$$

Muszą być przy tym spełnione warunki:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M k_i &= N \\ \sum_{i=1}^M p_i &= 1. \end{aligned}$$

Oznacza to, że mamy tylko $M-1$ *liniowo niezależnych* wartości k_i – niech to będą $k_1, \dots, k_{M-1}$, wówczas:

$$\begin{aligned} k_M &= N - \sum_{i=1}^{M-1} k_i \\ p_M &= 1 - \sum_{i=1}^{M-1} p_i. \end{aligned}$$

Wykonując obliczenia analogiczne jak w przypadku rozkładu dwumianowego, otrzymamy dla każdej z liczb k_i wartości oczekiwane:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(k_i) &= N p_i \\ \mathcal{E}((k_i - N p_i)^2) &= N p_i (1 - p_i). \end{aligned}$$

Jako wniosek dostajemy warunek:

$$\mathcal{E} \left(\sum_{i=1}^M \frac{(k_i - N p_i)^2}{N p_i} \right) = \sum_{i=1}^M (1 - p_i) = M - 1.$$

Skonstruowaliśmy w ten sposób wielkość znakomicie nadającą się do przeprowadzenia testu zgodności rzeczywiście zaobserwowanego rozkładu wyników $\{k_1, \dots, k_M\}$ z wynikami $\{N p_1, \dots, N p_M\}$, jakich oczekiwaliśmy, gdyby wyniki prób opisywał zbiór prawdopodobieństw $\{p_1, \dots, p_M\}$.

Test zgodności rozkładu wyników próby z zadany rozkładem:

Znamy prawdopodobieństwa p_i i wyniki próby k_i . Naszą *statystyką* będzie wielkość:

$$\mathcal{R} := \sum_{i=1}^M \frac{(k_i - N p_i)^2}{N p_i}.$$

Można wykazać, że tak zdefiniowana wielkość $\mathcal{R}$ w granicy bardzo dużych N podlega **rozkładowi χ^2 o liczbie stopni swobody równej $M-1$** . **Test zgodności** wyników N prób z postulowanym rozkładem prawdopodobieństw $\{p_1, \dots, p_M\}$ polega na obliczeniu wartości $\mathcal{R}$ i porównaniu otrzymanego wyniku z wartością $\mathcal{R}_{crit}$ dla przyjętej wartości α tj. akceptowalnego prawdopodobieństwa popełnienia **błędu I rodzaju**. Jeśli obliczona wartość $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{crit}$

stwierdzamy, że nasze wyniki nie podlegają rozkładowi $\{p_1, \dots, p_M\}$.

Uwaga: liczbę prób N musimy dobrać tak, aby najmniejsza z liczb Np_i wynosiła co najmniej kilka – zwykle przyjmuje się $Np_i > 5$.

Skonstruowaliśmy powyżej test zgodności dla dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa. W poprzednich wykładach wielokrotnie zakładaliśmy, że wyniki pomiarów podlegają rozkładowi Gaussa (normalnemu) – jest to rozkład ciągły.

Jak sprawdzić, czy to dobre założenie, tj. czy obserwowany rozkład wyników jest z tym założeniem zgodny? **Ogólniej:** jak przetestować hipotezę dotyczącą postaci rozkładu ciągłej zmiennej losowej?

Rysunek 13 na stronie 69 *Slajdów do wykładu* przedstawia ideę, jak sprowadzić testowanie rozkładu ciągłego do opisanego wyżej testu dla rozkładu dyskretnego: cały zakres zmienności zmiennej losowej x dzielimy na skończoną liczbę M przedziałów i dla każdego z nich obliczamy prawdopodobieństwo otrzymania wartości x z tego przedziału. W ten sposób ciągłą gęstość prawdopodobieństwa „przekładamy” na dyskretny zbiór prawdopodobieństw $\{p_1, \dots, p_M\}$. Wykonujemy $N > M$ prób. Przeprowadzamy test jak dla rozkładu dyskretnego. Porównujemy liczby k_i „trafień” w kolejne przedziały z liczbami oczekiwanych trafień Np_i . Przedziały, na jakie dzielimy zakres zmienności zmiennej losowej x , nie muszą być jednakowe. Ich szerokości możemy dobrać tak, żeby łatwe było spełnienie warunku $Np_i > 5$ (wartość 5 jest tu przyjęta umownie jako ograniczenie dolne oczekiwanej liczby „trafień” w przedział i). Dobrym pomysłem jest np. taki podział zakresu zmienności zmiennej x , żeby wszystkie Np_i były jednakowe.

Tabela wartości krytycznych χ^2

	Liczba stopni swobody								
α	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,01	9,21	11,35	13,28	15,08	16,81	18,47	20,09	21,67	23,21
0,05	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31
0,10	4,61	6,25	7,78	9,24	10,64	12,02	13,36	14,68	15,99
0,15	3,79	5,32	6,75	8,12	9,45	10,75	12,03	13,29	14,53

Zadania do Wykładu 7

Zadanie 1. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać: $pV = nRT$, gdzie p oznacza ciśnienie, V objętość, n liczbę moli gazu, T temperaturę gazu w skali Kelvina, a R to uniwersalna stała gazowa. Student badał zmiany objętości V dla $n = 0,05$ mola gazu od jego temperatury T przy stałym ciśnieniu $p = 1015$ hPa. Po ustaleniu temperatury T , pomiar objętości V powtarzał wielokrotnie i obliczał wartość średnią $\bar{V}$. Wyniki pomiarów zebrał w tabeli:

Temperatura T/K	293	298	303	308	313
Średnia objętość $\bar{V}$ /litr	1,196	1,207	1,243	1,274	1,293

Niepewności kolejnych wartości $\bar{V}$ były bardzo zbliżone i wynosiły $u_v = 0,010$ litra. Przyjmij, że liczba moli n i ciśnienie p gazu znane są wystarczająco dokładnie.

Przeprowadź test hipotezy: *objętość gazu pod stałym ciśnieniem jest wprost proporcjonalna do temperatury gazu w skali Kelvina*. Jako dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej przyjmij wartość $\alpha = 0,05$.

Zadanie 2. Studentka miała za zadanie wyznaczyć opór R pewnego opornika. Do dyspozycji miała układ elektryczny, w którym mogła zmieniać napięcie na oporniku oraz amperomierz, którym, dla ustalonego napięcia U , mierzyła natężenie I prądu płynącego przez opornik. Wartość napięcia ustalana była z bardzo dużą dokładnością (przyjmij, że niepewność wartości U jest pomijalnie mała). Niepewność pomiaru natężenia prądu była niepomijalna i wynosiła u , zgodnie wartościami podanymi w tabeli. Zależność między natężeniem I i napięciem opisuje wzór: $U = RI$. Otrzymane wyniki studentka zapisała w tabeli:

Numer pomiaru	1	2	3	4	5
I [mA]	0,48	1,24	2,14	2,35	2,91
U [mV]	1,12	2,31	4,15	4,95	5,81
u [mA]	0,05	0,10	0,10	0,15	0,20

Przeprowadź test hipotezy: *natężenie prądu płynącego w przewodniku jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia, a współczynnik proporcjonalności wynosi $0,5 \Omega^{-1}$* . Jako dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej przyjmij wartość $\alpha = 0,01$.

Zadanie 3. Student badał przemianę izochoryczną gazu. Podgrzewał pewną ilość tego gazu w zamkniętym naczyniu i mierzył ciśnienie p i temperaturę T w skali Kelvina i uzyskał wyniki podane w tabeli. Przyjmij, że temperatura była mierzona z niepewnością $u = 0,5$ K, a ciśnienie było mierzone dostatecznie dokładnie.

Ciśnienie p (atmosfery)	1,0	1,4	1,6	2,0
Temperatura T/K	309,0	431,5	496,5	623,0

Przeprowadź test hipotezy: *w stałej objętości iloraz ciśnienia i temperatury gazu w skali Kelvina jest wielkością stałą*. Jako dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej przyjmij wartość $\alpha = 0,10$.