

SYMULACJE KOMPUTEROWE PROCESÓW
SINGULARNYCH I OSOBLIWYCH W
FINANSACH - WYBRANE ALGORYTMY
Szkic

Ryszard Kutner

*Zakład Dydaktyki Fizyki, Instytut Fizyki Doświadczalnej
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

Warszawa, grudzień 2009

Niniejszy materiał ani w całości ani we fragmentach nie może być powielany lub rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących i innych bez zgody autora.

Spis treści

I	Dwa światy procesów stochastycznych	5
1	Różne rodzaje błędzeń przypadkowych	7
1.1	Wariancje i skalowanie	8
1.2	Funkcja autokorelacji i widmo mocy	9
1.3	Pierwsze podejście do miary ryzyka	11
1.3.1	Wykładnik Hursta jako globalna charakterystyka zmienności procesu fraktalnego	12
1.3.2	Rozszerzająca klasyfikacja procesów stochastycznych	14
1.3.3	Uwagi podsumowujące i zapowiedź	14
1.4	Symulacja komputerowa procesów skorelowanych	16
1.5	Separowalne przeloty Weierstrassa	17
1.5.1	Algorytm separowalnego błędzenia Weierstrassa	20
1.6	Skalowanie przemieszczenia oraz wpływ ekstremalnych zdarzeń na ryzyko	20
II	Metody wyznaczania wykładnika Hursta	23
2	Ogólna klasyfikacja ryzyka rynkowego	25
2.1	Szereg czasowy a ryzyko	25
2.2	Algorytm metody przeskalowanego zasięgu R/S	26
2.3	Analiza Zdetrendowanych Fluktuacji	27
2.4	Wykładnik Hursta a nieseparowalne przeloty Weierstrassa	30
2.5	Algorytm ułamkowego ruchu Browna	33
2.6	Algorytm bezpośredniego odczytu wymiaru fraktalnego	35
2.7	Krótkie szeregi czasowe a metoda R/S	36
2.7.1	Algorytm zwiększania liczebności szeregu czasowego	36

2.8	Multifraktale	36
2.8.1	Algorytm symulacji multifraktałnego ruchu Browna	36
2.8.2	Estymacja ciągłej funkcji Höldera	37
III Modele ekonometryczne z długookresową zależnością		39
3	Ekonometryczny model ARFIMA	41
3.1	Fraktalny ruch Browna a ekonometryczny model ARFIMA	41
3.1.1	Model ARFIMA (0,d,0)	41
3.1.2	Model ARFIMA(p,d,q)	43
3.1.3	Związek pomiędzy procesem ARFIMA a ułamkowym szumem gaus- sowskim	43
3.1.4	Algorytm Durбина-Levinsona symulacji procesu ARFIMA(0,d,q)	44
3.2	Porównanie metod wyznaczania rzędu pochodnej ułamkowej	46
3.2.1	Metoda periodogramowa	47
3.2.2	Metoda estymatora Whittle'a	47
4	Symulacje komputerowe modeli średniej ruchomej oraz autoregresyj- nych o nieskończonej wariancji	51
4.1	Kluczowe twierdzenia oraz definicja i własności procesu	52

Część I

Dwa światy procesów stochastycznych

Rozdział 1

Różne rodzaje błędzeń przypadkowych

W niniejszej pracy analizujemy zarówno procesy stochastyczne jak też ich szumy. Wprowadzamy miary ryzyka dotyczące przede wszystkim stochastycznych procesów singularnych i osobliwych¹ wiedząc, że dla tych drugich prawdziwa wartość wariancji jest nieskończona.

W naszych rozważaniach precyzyjnie rozróżniamy:

- stacjonarne i niestacjonarne procesy stochastyczne,
- procesy zachodzące w czasie dyskretnym i w czasie ciągłym,
- jednocześnie odróżniamy sam proces stochastyczny od szumu jaki mu towarzyszy oraz
- singularność wariancji wynikającą z istnienia długookresowych korelacji od analogicznej wywołanej przez poszerzony rozkład.

Pozwala to nam na klasyfikację oraz prowadzenie pogłębionej analizy procesów stochastycznych zarówno na drodze analitycznej jak i numerycznej.

Pokazujemy, m.in. za pomocą symulacji komputerowych, jak przejawia się rozbieżność wariancji, omawiamy warunki w jakich to ma miejsce i odpowiadamy na zasadnicze pytanie: co w takich sytuacjach robić. Podejście to może odgrywać ważną rolę w analizie kryzysów i krachów zarówno giełdowych jak i (szerzej biorąc) gospodarczych wywołanych zdarzeniami ekstremalnymi.

¹Nazwy *proces singularny* i *proces osobliwy* nie są rozpowszechnione; tutaj używamy je dlatego aby zaetykietować procesy których wariancja jest, odpowiednio, potęgową funkcją czasu, gdzie wykładnik potęgi jest różny od 1, bądź też nie istnieje.

1.1 Wariancje i skalowanie

Szczególnie interesujące i użyteczne są poniższe zależności wariancji² procesu stochastycznego $X(t)$, czyli tradycyjnej (w sensie Markowitza) miary ryzyka, od czasu t dla asymptotycznie długich czasów³:

$$\langle X(t)^2 \rangle \sim \begin{cases} |t|, & \text{proces Wienera} \\ |t|^\eta, & \text{dyfuzja anomalna: subdyfuzja } \eta < 1, \text{ superdyfuzja } \eta > 1 \\ \infty, & \text{np. procesy Lévy'ego.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Widać, że wariancja dana wyrażeniami (1.1) skaluje się asymptotycznie w następujący sposób

$$\langle X(ct)^2 \rangle = c^\eta \langle X(t)^2 \rangle, \quad c, \eta > 0. \quad (1.2)$$

Zatem, zmienne losowe $X(t)$ oraz $X(ct)/c^H$, gdzie $H \stackrel{\text{def.}}{=} \eta/2$, posiadają asymptotycznie jednakowe wariancje a więc na mocy Centralnego Twierdzenia Granicznego posiadają jednakowe prawdopodobieństwo występowania⁴ zbudowane na rozkładzie Gaussa. Innymi słowy, proces $X(t)$ posiada następującą, niezwykle ważną asymptotyczną własność skalowania (w sensie stochastycznym)

$$X(ct) \stackrel{\text{stoch.}}{=} c^H X(t), \quad (1.3)$$

którą wykorzystujemy w rozdz. 2.6. Zaznaczmy, że dla wyrażenia stojącego w pierwszym wierszu (1.1) wykładnik $H = 1/2$.

Wykładnik H nosi nazwę wykładnika Hursta lub stopnia samopodobieństwa (o ile jest on niezależny od czasu) a odpowiadający mu proces stochastyczny nosi nazwę fraktalnego ruchu Browna. W procesie tym **zmienna losowa podlega (dla asymptotycznie długich czasów) rozkładowi Gaussa o wariacji danej, odpowiednio, wzorem drugim lub pierwszym w wyrażeniu (1.1)**. Widać, że proces posiadający wariancję daną wyrażeniem pierwszym jest marginalny w stosunku do danego wyrażeniem drugim. Rozważamy go tutaj ze względu na jego, wprost trudną do przecenienia, kanoniczną rolę w teorii procesów stochastycznych.

Warto zdać sobie sprawę, że **dla czasu dyskretnego subdyfuzyjne zachowanie wariancji nie jest możliwe**.

Dodajmy jeszcze, że zmienna losowa $X(t)$ może być zmienną złożoną np. $X(t) = \ln Y(t)$ - taka zależność definiuje np. geometryczny ruch Browna $Y(t)$ o ile $X(t)$ podlega arytmetycznemu (standardowemu) ruchowi Browna. Wówczas, zmienna $Y(t)$ posiada log-normalny rozkład prawdopodobieństwa (a nie rozkład Gaussa). Zauważmy, że szum

²Inne zależności, np. typu $t \ln t$ lub od potęgi logarytmu czasu, $\ln^\eta t$, są charakterystyczne dla procesów marginalnych lub wąskodedykowanych, którymi się tutaj w zasadzie nie zajmujemy.

³We wszystkich rozważaniach zakładamy, że wartość oczekiwana procesu, a stąd wartość oczekiwana jego szumu $\Delta X(t) \stackrel{\text{def.}}{=} X(t + \Delta t) - X(t)$, znikają. W definicji szumu przyrost liczymy wprzód w czasie, zdając sobie sprawę, że w praktycznych zastosowaniach najczęściej jest liczony wstecz w czasie tzn. $\Delta X(t) \stackrel{\text{def.}}{=} X(t) - X(t - \Delta t)$. Przy okazji zauważmy, że również odwrotnie proces $X(t)$ można zdefiniować za pomocą jego szumu (o ile jest zadany): $X(t) = \int_0^t dX(s)$.

⁴Mowa tutaj jedynie o dwóch pierwszych wyrażeniach w (1.1).

procesu $X(t)$ określa jednocześnie *chwilową logarytmiczną stopę zwrotu (wzrostu)* zmiennej $Y(t)$, gdyż

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \ln \left(\frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)} \right). \quad (1.4)$$

Jeżeli wspomniany powyżej wykładnik jest funkcją zależną od t , czyli jest wielkością lokalną w czasie, to H zastępujemy przez $H(t)$ i nazywamy wykładnikiem (funkcją) Höldera lub lokalnym stopniem samopodobieństwa a sam **proces nazywa się wtedy procesem multifrakalnym** (wielofrakalnym). Procesami wielofrakalnymi, a zwłaszcza ich symulacjami komputerowymi, zajmujemy się w dalszej części.

1.2 Funkcja autokorelacji i widmo mocy

Zauważmy, że relacje występujące w dwóch pierwszych wierszach w (1.1) pozwalają znaleźć odpowiedź na pytanie o autokorelację, zarówno:

- 1) samej zmiennej losowej $X(t)$ jak też
- 2) jej zmiany $\Delta X(t)$, czyli jej szumu w dwóch różnych chwilach t_1 oraz t_2 .

W pierwszym przypadku funkcja autokorelacji procesu⁵ wynosi:

$$\langle X(t_1) X(t_2) \rangle \sim |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H} \quad (1.7)$$

co oznacza, że proces $X(t)$ jest niestacjonarny (pomimo, że jego wariancja (1.5) jest stacjonarna).

W drugim przypadku funkcja autokorelacji szumu wynosi:

$$\langle \Delta X(t_1) \Delta X(t_1 + t) \rangle \sim |t + \Delta t|^{2H} + |t - \Delta t|^{2H} - 2|t|^{2H}, \quad (1.8)$$

skąd dla przedziału czasu $\Delta t \ll t$ otrzymujemy, że

$$\langle \Delta X(t_1) \Delta X(t_1 + t) \rangle \sim H(2H - 1) \frac{1}{|t|^{2-2H}} = \frac{1}{2} \eta(\eta - 1) \frac{1}{|t|^{2-\eta}}, \quad (1.9)$$

⁵Wyrażenie (1.7) można łatwo wyprowadzić, korzystając z pierwszych dwóch wzorów w wyrażeniu (1.1) rozumianych bardziej ogólnie

$$\langle [X(t_2) - X(t_1)]^2 \rangle \sim |t_2 - t_1|^\eta, \quad (1.5)$$

z drugiej zaś

$$\begin{aligned} \langle [X(t_2) - X(t_1)]^2 \rangle &= \langle [X(t_1)]^2 \rangle + \langle [X(t_2)]^2 \rangle - 2 \langle X(t_1) X(t_2) \rangle \\ &\sim |t_1|^\eta + |t_2|^\eta - 2 \langle X(t_1) X(t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Porównując obie strony równości (1.5) i (1.6) otrzymujemy poszukiwane wyrażenie (1.7). Przy okazji zauważmy, że **proces stochastyczny $X(t)$ posiada, dla asymptotycznie długich czasów, najważniejsze cechy ((1.3), (1.5) i (1.7)) charakteryzujące ułamkowy ruch Browna** (ang. *fractional Brownian motion*), który jest procesem niestacjonarnym.

co oznacza⁶, że jest ona asymptotycznie stacjonarna, czyli mamy tutaj do czynienia z szumem asymptotycznie stacjonarnym (w szerszym sensie) [6].

Korzystając z twierdzenia Wienera-Chinczyna, można z (1.9) otrzymać dla procesów stacjonarnych (w naszym przypadku dla szumu) widmo mocy (zwane także gęstością spektralną) $S(f)$ dla małych wartości f , jako (pełną) transformatę Fouriera funkcji autokorelacji [2]

$$S(f) = \langle \Delta X^{\mathcal{F}}(f) \Delta X^{\mathcal{F}}(-f) \rangle = \langle |\Delta X^{\mathcal{F}}(f)|^2 \rangle \sim \frac{1}{|f|^\gamma}, \quad \gamma = \eta - 1, \quad (1.11)$$

gdzie $\Delta X^{\mathcal{F}}(f)$ oznacza transformatę Fouriera szumu $\Delta X(t)$ a średniowanie wykonuje się dla ustalonej częstotliwości f . Powyższe wyrażenie na widmo mocy pokazuje, że dla $H = 1/2$ mamy do czynienia z białym szumem (stałe widmo mocy) a dla $H \neq 1/2$ z szumem kolorowym (zależne od częstotliwości widmo mocy). Często szum posiadający widmo mocy dane wzorem (1.11) nosi nazwę *szumu* $1/f^\gamma$ a dla szczególnego przypadku $\gamma = 1$, *szumu* $1/f$. Tego typu szумы spotyka się np. w zagadnieniach fizycznych, biologicznych i ekonomicznych. Efektywne wyznaczanie widma mocy dla procesów niestacjonarnych jest trudniejsze a oblicza się je najczęściej wprost z definicji. Zdarza się, że jednym z elementów formuły jest nadal widmo mocy dla szumu tego procesu [2].

Przykład I.1 (Proces stochastyczny położenia i prędkości w ruchu Browna)

Przypomnijmy, że dla arytmetycznego (standardowego) ruchu Browna⁷ z jakim mamy do czynienia nie tylko w fizyce, funkcja autokorelacji przyrostów zmiennej losowej zanika wykładniczo, tzn.

$$\langle \Delta X(t_1) \Delta X(t_1 + t) \rangle \sim \exp(-|t|/\tau_c) \quad (1.12)$$

a stąd wariancja

$$\langle [\Delta X(t_1)]^2 \rangle = \langle [\Delta X(0)]^2 \rangle \quad (1.13)$$

czyli jest niezależna od czasu, natomiast widmo mocy przyjmuje postać:

$$S(f) \sim \frac{1}{1 + (2\pi f\tau_c)^2}. \quad (1.14)$$

Jak widać, dla niskich częstotliwości ($f \ll 1/(2\pi\tau_c)$), czyli dla czasów znacznie dłuższych niż τ_c widmo mocy jest (z dobrym przybliżeniem) stałe. Zatem, proces stochastyczny przyrostów $\Delta X(t)$ zmiennej losowej $X(t)$ jest wtedy *białym szumem*, który można łatwo symulować

⁶Wzór w (1.8) wyprowadzono bezpośrednio z (1.7) podstawiając w miejsce czasu t_2 czas $t_1 + t$ oraz korzystając z definicji szumu. Przy okazji, zauważmy, że ze wzoru (1.5) wynika bezpośrednio

$$\langle \Delta X(t)^2 \rangle \sim \Delta t^\eta. \quad (1.10)$$

Co więcej, szum $\Delta X(t)$ jest gaussowski właśnie o wariancji (1.10).

⁷Należy zdawać sobie sprawę, że ruch Browna jest procesem stacjonarnym jeżeli chodzi o przyrosty $\Delta X(t)$ zmiennej losowej (prędkości cząstki Browna) natomiast niestacjonarnym jeżeli chodzi o samą zmienną losową $X(t)$ (położenie cząstki Browna).

na komputerze. Stąd, widmo mocy dla samej zmiennej losowej, czyli dla procesu Wienera dane jest następującym wyrażeniem [2]:

$$S(f) \sim \frac{1}{f^2 (f^2 + (1/2\pi\tau_c)^2)}. \quad (1.15)$$

Widać, że dla interesujących nas długich przedziałów czasu (znacznie dłuższych niż τ_c) mamy do czynienia z szumem $1/f^2$, czyli z zupełnie inną postacią widma mocy. Stąd powstaje pytanie o postać funkcji autokorelacji procesu stochastycznego Wienera $X(t)$.

Powyższe pytanie jest tym bardziej uzasadnione, że **proces Wienera jest niestacjonarny** i nie można do niego użyć twierdzenia Wienera-Chinczyna, pozwalającego na zastosowanie odwrotnej transformaty Fouriera do widma mocy danego wyrażeniem (1.15). Poszukiwaną funkcję korelacji można wyznaczyć wprost, pamiętając o statystycznej niezależności przyrostów zmiennej losowej $X(t)$ a mianowicie:

$$\langle X(t_1)X(t_2) \rangle \sim t_1 \sim t_2 + t_1 - (t_2 - t_1), \quad 0 < t_1 < t_2, \quad (1.16)$$

gdzie druga równość już łatwo poddaje się uogólnieniu (patrz wcześniejsze rozważania dotyczące fraktalnych ruchów Browna). Zauważmy jeszcze, że z pierwszego wyrażenia w formule (1.1) oraz ze wzoru (1.16) wynika bezpośrednio, że wielkość

$$\langle [X(t_2) - X(t_1)]^2 \rangle \sim t_2 - t_1, \quad t_1 < t_2; \quad (1.17)$$

jest ona także uogólniana w kontekście ułamkowych ruchów Browna. Oczywiście, obie wielkości (1.16) i (1.17) są szczególnymi przypadkami uzyskanych wcześniej, odpowiednio, (1.7) i (1.5).

Podkreślmy, że szczególnym przypadkiem wielkości (1.17) jest kwadrat zasięgu (zakresu, rozpiętości) błędzenia przypadkowego - sam zakres stanowi kluczową wielkość bardzo użytecznej dla naszych celów Metody Przeskalowanego Zasięgu R/S , omówionej w podrozdz.2.2.

Podsumowując to co powiedziano w powyższym przykładzie, wyrażenia (1.12) - (1.17) dotyczą zarówno procesu stochastycznego przyrostów zmiennej losowej skorelowanego w sposób krótkookresowy jak też procesu stochastycznego samej zmiennej losowej, stanowiąc punkt odniesienia dla analogicznych analiz singularnych i osobliwych procesów stochastycznych prowadzonych w niniejszej pracy.

1.3 Pierwsze podejście do miary ryzyka

Zauważmy, że tylko dla $H < 1$ funkcja autokorelacji szumu maleje w czasie - w przeciwnym razie ($H \geq 1$) mamy do czynienia z sytuacją patologiczną, czyli stałą albo rosnącą w czasie funkcją autokorelacji. To jest właśnie powód, dla którego (w naszych rozważaniach) wykładnik Hursta nie przyjmuje wartości równych albo większych od jedności.

Z grubsza rzecz biorąc, traktujemy tutaj wykładnik Hursta jako prawdopodobieństwo warunkowe tego, że kolejna zmiana procesu $X(t)$ jest zorientowana zgodnie z poprzednią (stanowiącą ten warunek, np. gdy poprzednia zmiana ceny była dodatnia to aktualna też

jest dodatnia); oczywiście $1 - H$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe tego, że dwie kolejne zmiany będą przeciwnie zorientowane. Zatem przyjmuje się, że właśnie **prawdopodobieństwo $1 - H$ jest dobrą miarą globalnego ryzyka związanego z procesami fraktalnymi**⁸, gdyż zdaje sprawę ze zmienności procesu - **im większa zmienność tym większe ryzyko**.

Komplementarną, względną miarą ryzyka, uwzględniającą pośrednio stopę zwrotu (wzrostu) a więc biorącą częściowo pod uwagę lokalny w czasie charakter ryzyka, może być stosunek fluktuacji szumu do fluktuacji sygnału:

$$\sqrt{\frac{\langle \Delta X(t)^2 \rangle}{\langle X(t)^2 \rangle}} \sim \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^H. \quad (1.18)$$

Miara ta wskazuje, że im mniejszy jest exponent Hursta tym większe jest ryzyko, gdyż ułamek $\Delta t/t$ jest zawsze mniejszy od 1. Miara ta, zachowując się podobnie do prawdopodobieństwo $1 - H$, tzn. rosnąc gdy H maleje, jednocześnie relaksuje potęgowo z czasem (np. dla $H = 1/2$ relaksacja ta ma charakter pierwiastkowy). Zatem, miara ta zawiera w sobie zarówno aspekt lokalny jak i globalny.

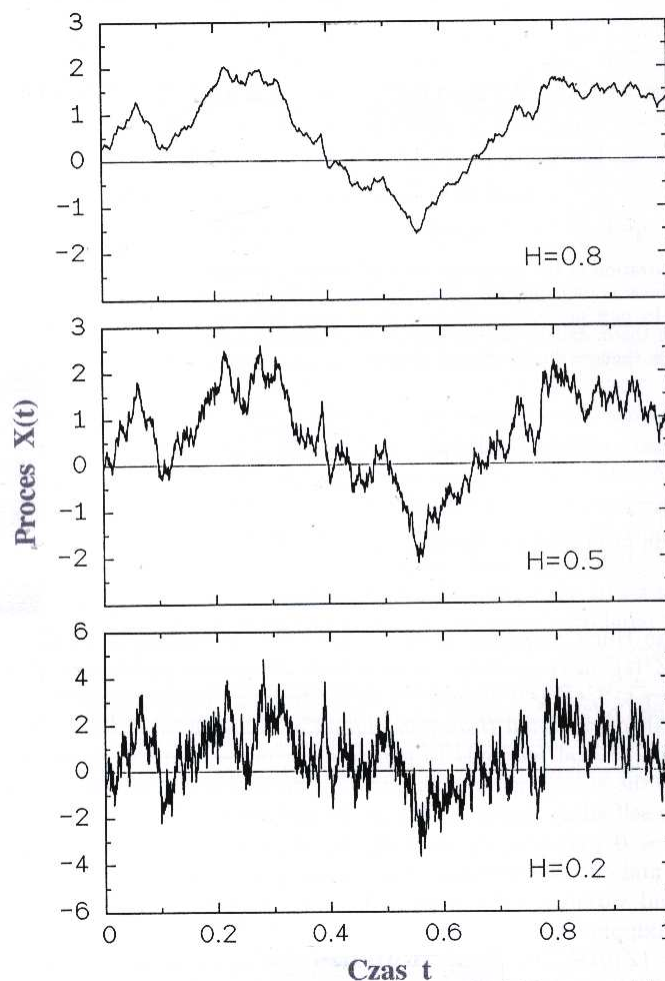
1.3.1 Wykładnik Hursta jako globalna charakterystyka zmienności procesu fraktalnego

Można już teraz dokonać, na podstawie wzorów (1.9) i (1.11), ważnej klasyfikacji zmienności fraktalnego procesu stochastycznego za pomocą wykładnika Hursta. Symulacje trzech różnych trajektorii fraktalnego ruchu Browna zamieszczone na rys.1.1 (uzyskane Metodą Losowego Przemieszczania Środka Odcinka opisaną w rozdz.2.5) w pełni ją ilustrują.

Klasyfikacja ta jest wkładem do dyskusji nad rolą powyżej zdefiniowanych dwóch miar ryzyka opartych na tym wykładniku. Widać, że

- 1) gdy $H = 1/2$, tzn. dla (arytmetycznego) ruchu Browna, brak jest jakichkolwiek autokorelacji a widmo mocy nie zależy od częstotliwości - mamy tutaj do czynienia z białym szumem a sam **proces jest** całkowicie nieprzewidywalny, jest **w pełni losowy**, gdyż występujące kolejno po sobie zmiany są ze sobą całkowicie nieskorelowane. Oznacza to, że np. aktualna zmiana ceny danego papieru wartościowego nie zależy ani od przeszłych ani przyszłych zmian jego wartości. Zatem, ryzyko jakie mu towarzyszy jest duże. Patrząc od strony zawartości informacyjnej szeregu można powiedzieć, że wykładnik Hursta mierzy wpływ informacji na rynek - wykładnik $H = 1/2$ oznacza, że cała dostępna rynkowi informacja została już przez niego zdyskontowana i nic co wydarzyło się w przeszłości a wydarzy w przyszłości nie ma na niego żadnego wpływu. O takim rynku mówimy, że jest (w pełni) efektywny. Jest to rynek wyidealizowany - w rzeczywistości wartość wykładnika Hursta odbiega (praktycznie rzecz biorąc dla wszystkich akcji, indeksów oraz pochodnych instrumentów finansowych) od $1/2$.

⁸W rozdz.2.2 wprowadzamy analogiczną miarę zdefiniowaną za pomocą pudełkowego wymiaru fraktalnego.



Rysunek 1.1: Trzy różne trajektorie ułamkowego ruchu Browna wysymulowane Metodą Losowego Przemieszczania Środka Odcinka dla trzech istotnie różnych wartości wykładnika Hursta. Wykresy zaczerpnięto z pracy [4].

- 2) dla $H < 1/2$ mamy do czynienia z *antypersystentnym* szeregiem czasowym czyli ujemnymi korelacjami pomiędzy kolejnymi wyrazami szeregu. Tego typu szeregi niosą ze sobą największe prawdopodobieństwo zmian, gdyż z dużym prawdopodobieństwem kolejne zmiany mają charakter naprzemienny. W tym przypadku można już mówić o długookresowych antyautokorelacjach wywołanych negatywnym sprzężeniem zwrotnym (formalnie analogicznych do tych, jakie obserwuje się np. w kardiologii w dynamice pracy serca [7]). Widmo mocy jest w tym przypadku rosnącą funkcją częstotliwości **a ryzyko jakie niesie ze sobą taki proces (szereg) jest największe, gdyż jego zmienność jest największa**. Zmienność ta chroni (do pewnego stopnia) rynek przed zbyt gwałtownym wzrostem lub spadkiem, wynikając z awersji do ryzyka uczestników gry rynkowej.
- 3) dla $H > 1/2$ mamy do czynienia z szeregiem *persystentnym*, czyli pozytywną korelacją pomiędzy kolejnymi zmianami szeregu, wskazującymi na istnienie trendu (a nie dryfu) pozwalającego przynajmniej na krótkoterminowe prognozowanie. O

procesie spełniającym tego typu własność mówimy, że **posiada długookresową pamięć** (ang. *long-term memory* lub po prostu *long memory*) inaczej zwaną **długozasięgową zależnością** (ang. *long-range dependence*). Szeregowi temu towarzyszy stosunkowo najmniejsze ryzyko. Widać, że wykładnik Hursta H może być miarą intensywności tej długookresowej zależności (a dokładniej samozależności) - im H większe tym intensywność większa, czyli zanikanie w czasie funkcji autokorelacji szumu wolniejsze.

Jak widać, funkcja autokorelacji ma postać formalnie identyczną jak dla ułamkowego ruchu Browna (o ile wykładnik Hursta H zdefiniujemy tak jak w wyrażeniu (1.3)). Opierając się na powyższych rozważaniach możemy twierdzić, że wszystkie procesy singularne dążą asymptotycznie do ułamkowego ruchu Browna. Do zagadnienia tego powracamy w dalszej części.

Tytułem wstępnej klasyfikacji można podsumować, że

- sygnatura stochastycznego procesu normalnego dana jest zależnością liniową przedstawioną w wierszu pierwszym wyrażenia (1.1),
- singularnego zależnością przedstawioną w drugim a
- procesu osobliwego w wierszu trzecim.

W niniejszej pracy zajmujemy się przede wszystkim procesami singularnymi i osobliwymi - pochodzą one zarówno z charakteru samych rozkładów jak też z korelacji, jakie mogą pojawić się w tego typu procesach stochastycznych.

1.3.2 Rozszerzająca klasyfikacja procesów stochastycznych

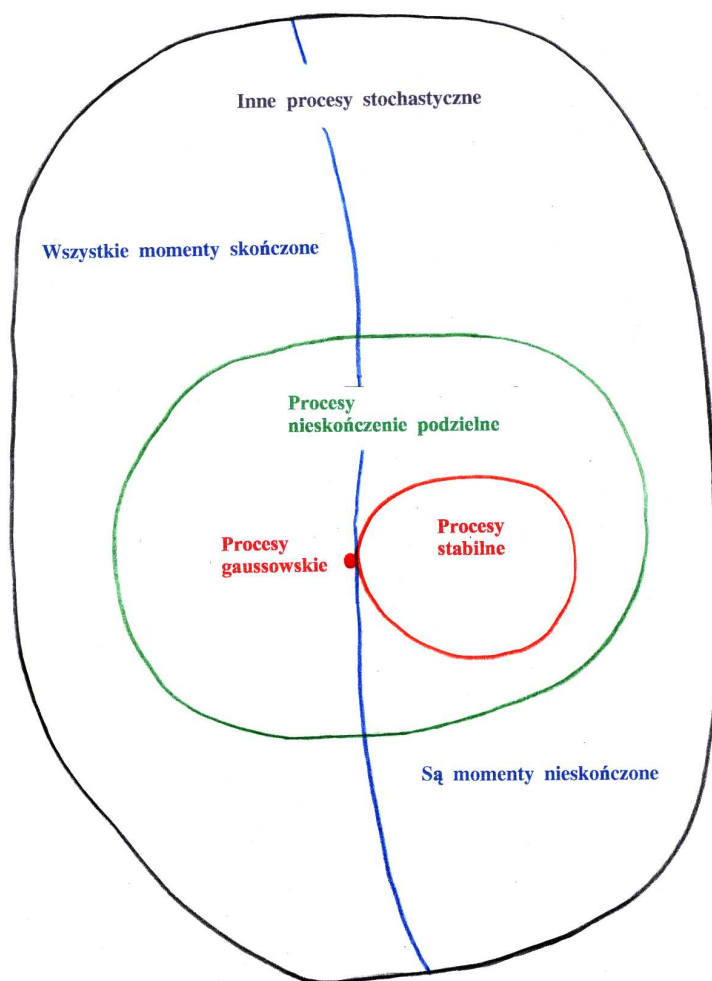
Na rys.1.2 przedstawiono ogólną klasyfikację procesów stochastycznych uwzględniającą także trzy omawiane bądź też sygnalizowane powyżej [1]⁹.

1.3.3 Uwagi podsumowujące i zapowiedź

Dla procesów singularnych i osobliwych¹⁰ **miary ryzyka wiążemy z wybranymi wykładnikami i wymiarami - pokazujemy jak je wyznaczać na drodze symulacji komputerowych**. Nasze rozważania mogą być przydatne w badaniach złożonych procesów ekonomicznych, takich jak np. dynamika dochodu narodowego, poziomu inflacji i odpowiadającego jej poziomu stóp procentowych a także ewolucji kursów walutowych oraz cen walorów na rynkach finansowych, które rządzone są rzadkimi zdarzeniami. Ponadto, omawiane tutaj podejścia mogą służyć prognozowaniu. Wspomniane procesy reprezentowane są za pomocą szeregów czasowych, przy czym szczególnie ważna dla badań typu

⁹Objaśnienie terminów zamieszczonych na rys.1.2 można znaleźć w cytowanej książce.

¹⁰Ponieważ procesy osobliwe omawiamy w dalszej części więc uwagi, jakie są wypowiedziane pod ich adresem należy traktować jako zapowiedź.



Rysunek 1.2: Wizja artystyczna przestrzeni wszystkich procesów stochastycznych podzielona na różne kategorie omawiane (w większym lub mniejszym stopniu) w niniejszej pracy. Objasnienie terminów zamieszczonych na rysunku można znaleźć w książce [1].

statystycznego jest wielkość tych szeregów - wskażemy jak można w sposób konsystentny zwiększyć liczebność takich szeregów.

Niestety, w pracy tej nie zajmujemy się już wielce interesującą analizą portfelową, czyli nie odpowiadamy na jedno z jej kluczowych i ważnych samo w sobie pytań a mianowicie, jak dobrać chwilową optymalną strukturę portfela do chwilowej wartości ryzyka?

Oczywiście, analiza rzeczywistości oparta tylko na wariancji procesu stochastycznego jest niewystarczająca. Należy także uwzględnić autokorelacje, czy ogólniej autokowariancje¹¹ (przynajmniej dwupunktowe) zarówno samej zmiennej losowej w różnych chwilach jak też jej przyrostu¹². Co więcej, wygodną, komplementarną wielkością wspomagającą funkcję

¹¹W tym słowie wstępnym zakładamy, co nie zmniejsza ogólności naszych rozważań, że wartość oczekiwana zmiennej losowej znika, czyli autokorelacja jest tożsamościowo równa autokowariancji.

¹²W fizyce mówi się najczęściej o pochodnej po czasie zmiennej losowej (np. położenia cząstki), czyli prędkości cząstki.

autokorelacji jest widmo mocy¹³ (ang. *power spectra*) [2]. Dzięki twierdzeniu Wienera-Chinczina wiemy, że jest ono dla procesów stacjonarnych po prostu transformatą Fouriera funkcji autokorelacji. Zatem znajomość funkcji autokorelacji pozwala wyznaczyć widmo mocy i odwrotnie.

W dalszym ciągu **starannie rozróżniamy procesy stacjonarne od niestacjonarnych**. Mówiąc o procesach niestacjonarnych mamy na myśli niestacjonarność w szerszym sensie [3]. Rozróżniamy także procesy, dla których czas jest traktowany na sposób dyskretny od tych dla których czas jest ciągły.

W niniejszej pracy własności procesów singularnych i osobliwych omawiamy na przykładzie dwóch niezwykle charakterystycznych procesów stochastycznych a mianowicie ułamkowego ruchu Browna oraz Weierstrassa wskazując również na ich możliwości zastosowań w szeroko rozumianych finansach.

1.4 Symulacja komputerowa procesów skorelowanych

Niezwykle **istotne zagadnienie** jakie można teraz sformułować **dotyczy sposobu generowania skorelowanych błędzeń przypadkowych**. Proponowany algorytm zakłada, że znane jest widmo mocy $S(f)$ błędzenia przypadkowego, które zamierzamy symulować. Innymi słowy, musimy oczywiście wiedzieć jakie błędzenie z punktu widzenia autokorelacji chcemy symulować. Ponieważ zainteresowani jesteśmy przede wszystkim błędzeniem skorelowanym na sposób długookresowy, więc w istocie wystarczy jedynie założyć znajomość wykładnika potęgi γ widma mocy (patrz wyrażenie (1.11)). Widać, że takie podejście nie definiuje jednoznacznie procesu stochastycznego a jedynie klasę procesów o jednakowej zależności czasowej funkcji autokorelacji. W dalszym ciągu zakładamy, że na tej drodze będziemy symulować stacjonarne (w szerszym sensie) zmiany (przyrosty) $\Delta X(t)$ zmiennej losowej $X(t)$, tzn. będziemy symulować stacjonarny, ułamkowy szum gaussowski (ang. *stationary, fractional Gaussian noise*) a stąd ułamkowy ruch Browna.

Sam algorytm, zwany Metodą Fourierowskiego Filtrowania (ang. *Fourier Filtering Method*) [8], składa się z trzech prostych kroków.

- 1) W pierwszym kroku należy zbudować jednowymiarowy ciąg nieskorelowanych wartości gaussowskiej¹⁴, stacjonarnej, zmiennej losowej $\Delta Y(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, a następnie dokonać ich dyskretnej transformacji Fouriera

$$\Delta Y^{\mathcal{F}}(f) \approx \sum_{j=1}^n \Delta Y(t_j) \exp(-i j f), \quad f \stackrel{\text{def.}}{=} 2\pi \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.19)$$

przy czym nie ma tutaj żadnych ograniczeń na liczbę losowań n . Należy jednak podkreślić, że na takiej drodze uzyskujemy błędzenie w czasie dyskretnym. Ma to istotne znaczenie dla samego procesu, gdyż niemożliwia skonstruowanie antyautoskorelowanej zmiennej losowej, czyli procesu dla którego $\eta < 1$ (patrz druga równość w wyrażeniu (1.1)). Złożoność tej sytuacji polega na tym, że szum takiego procesu może być antyautoskorelowany.

¹³Za pomocą widma mocy dokonuje się np. wygodnego rozróżnienia procesów stochastycznych.

¹⁴Można także losować te wartości po prostu z rozkładu jednorodnego.

2) Teraz należy zdefiniować następująco transformatę Fouriera symulowanego szumu

$$\Delta X^{\mathcal{F}}(f) = [S(f)]^{1/2} \Delta Y^{\mathcal{F}}(f). \quad (1.20)$$

Jak widać, spełnia ona jak trzeba wymaganą relację (1.11)

$$S(f) = \langle \Delta X^{\mathcal{F}}(f) \Delta X^{\mathcal{F}}(-f) \rangle = S(f) \langle \Delta Y^{\mathcal{F}}(f) \Delta Y^{\mathcal{F}}(-f) \rangle, \quad (1.21)$$

gdzie $\langle \Delta Y^{\mathcal{F}}(f) \Delta Y^{\mathcal{F}}(-f) \rangle$ jest widmem mocy białego szumu, czyli wielkością stałą (tutaj równą 1) a średniowanie $\langle \dots \rangle$ zostało przeprowadzone dla ustalonej częstotliwości f . Należy teraz dokonać odwrotnej transformacji Fouriera (od zmiennej f do zmiennej t), uzyskując w ten sposób poszukiwany szum $\Delta X(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, procesu dyskretnego $X(t_j)$.

3) W ostatnim kroku poszukiwany proces $X(t_j)$ otrzymuje się z dzięki oczywistej zależności pomiędzy procesem a jego szumem

$$X(t) = \sum_{j=1}^n \Delta X(t_j). \quad (1.22)$$

Dodajmy, że powyższy algorytm jest alternatywny jeżeli chodzi o szum, w stosunku do przedstawionego w podrozdz.2.5 a opierającego się na metodzie *Losowego Przemieszczania Środka Odcinka* (ang. *Random Midpoint Displacement Method*).

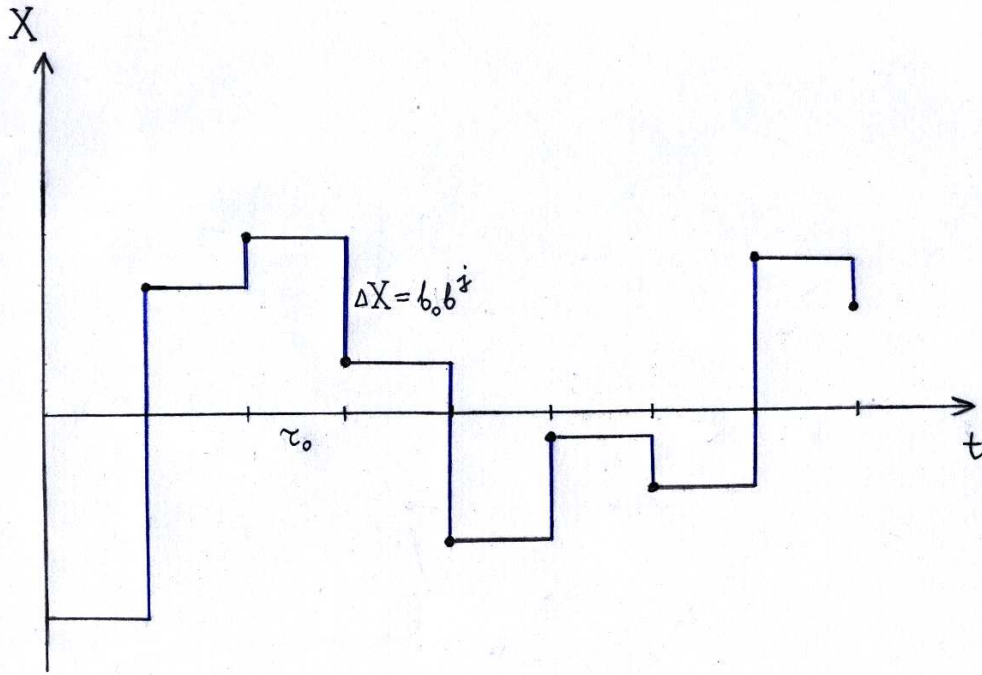
1.5 Separowalne przeloty Weierstrassa

Jednym z filarów tradycyjnego rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej jest paradygmat mówiący (popularnie rzecz ujmując), że estymaty momentów (np. wartość oczekiwana danej zmiennej losowej oraz jej wariancja) stabilizują się zbiegając do swoich wartości oczekiwanych (prawdziwych) wraz ze wzrostem liczby danych (wartości zmiennej losowej), z których buduje się te momenty. Wprawdzie dążenie to jest wolne ale sam fakt jego istnienia pozwala na stosowanie tradycyjnego formalizmu rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. W niniejszym rozdziale wskazujemy, na przykładzie najprostszego, separowalnego błędzenia przypadkowego typu przelotów Weierstrassa, dlaczego tradycyjna miara ryzyka Markowitza (zdefiniowana jako odchylenie standardowe) jest niewystarczająca.

Rozważmy na razie abstrakcyjny model jednowymiarowego, skokowego błędzenia przypadkowego z wyczekiwaniem (patrz rys.1.3), tzn. losowej replice podlega na przemian wyczekiwanie i skok błędzącego obiektu (nazwijmy go nieco żartobliwie *pchlą finansowa*).

Założmy, że zmienna losowa ΔX może przyjmować dyskretne, pogrupowane pokoleniowo wartości, podlegając następującemu rozkładowi prawdopodobieństwa

$$\psi(\Delta X, \Delta t) = \delta(\Delta t - \tau_0) \sum_{j=1}^{\infty} w(j) \frac{1}{2} \left[\delta(\Delta X - b_0 b^j) + \delta(\Delta X + b_0 b^j) \right], \quad (1.23)$$



Rysunek 1.3: Schematyczna ilustracja stałokrokowego w czasie procesu skokowego przelotów Weierstrassa.

przy czym czas jest także zdyskretyzowany o stałym kroku dyskretyzacji równym τ_0 ; symbol δ oznacza deltę Diraca, stała b_0 jest najkrótszą długością skoku, wielkość $b > 1$ określa stosunek wzrostu długości skoków w kolejnych pokoleniach, natomiast $w(j)$ jest wagą pokolenia o numerze j . Do dyskusji tej geometrycznej hierarchizacji powracamy w rozdz.2.4, gdzie omawiamy nieseparowalne przeloty Weierstrassa.

Następnie, przyjmujemy dla prostoty (i w zgodzie z potęgowym charakterem długości skoków), że kolejne wagi maleją o stały czynnik $1/N$:

$$\frac{w(j+1)}{w(j)} = \frac{1}{N}, \quad N > 1, \quad (1.24)$$

skąd otrzymujemy (po wykorzystaniu warunku unormowania wag), że

$$w(j) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^j}. \quad (1.25)$$

Taka postać wagi oznacza, że (średnio rzecz biorąc) skok z pokolenia następnego występuje N razy rzadziej niż ten z pokolenia aktualnego i jest on b razy dłuższy. Zauważmy, że skoki te są od siebie statystycznie niezależne, tzn. błądzenie to nie jest skorelowane. Taka postać wag i długości skoków umożliwiła zbudowanie prostego algorytmu symulującego zdefiniowane powyżej separowalne błądzenie Weierstrassa (patrz podrozdz.1.5.1).

Możemy teraz łatwo wyznaczyć jednokrokową wariancję $\langle \Delta X^2 \rangle$, mianowicie

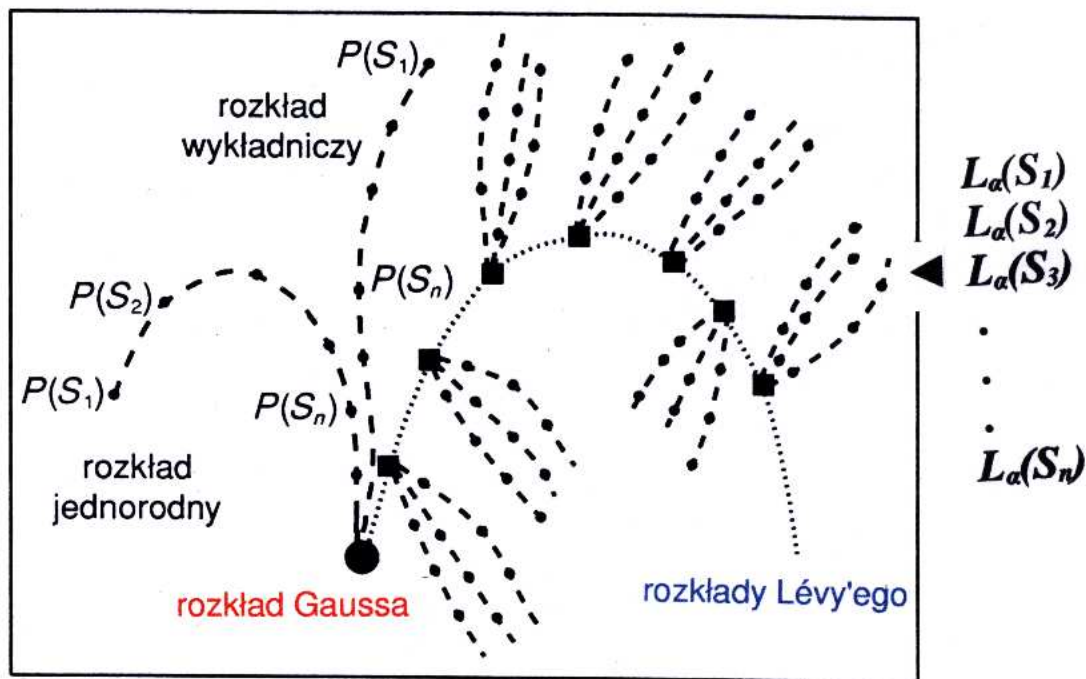
$$\langle \Delta X^2 \rangle = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{b^2}{N}\right)^j = \begin{cases} \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{b^2}{N}} & \text{jeżeli } b^2/N < 1, \text{ czyli } \alpha > 2 \\ \infty & \text{jeżeli } b^2/N \geq 1, \text{ czyli } \alpha \leq 2, \end{cases} \quad (1.26)$$

gdzie $\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \ln N / \ln b$. Stąd otrzymujemy bezpośrednio sumaryczną (wielokrokową) wariancję separowalnego błędzenia Weierstrassa dla długich czasów (tzn. $t \gg \tau_0$) dla obu zakresów α :

$$\langle X(t)^2 \rangle = \langle \Delta X^2 \rangle \frac{t}{\tau_0}. \quad (1.27)$$

Jak widać, sumaryczna wariancja jest sterowana wariancją jednokrokową, która parametryczne dzieli wszystkie separowalne błędzenia Weierstrassa na dwa światy:

- świat procesów gaussowskich o sumarycznej wariancji liniowo zależnej od czasu, w którym obowiązuje Centralne Twierdzenie Graniczne oraz
- świat procesów (przelotów) Lévy'ego o wariancji nieskończonej (zarówno jednokrokowej jak i sumarycznej) i wykładniku Lévy'ego równym α ; w świecie tym działa Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne Lévy'ego-Chinczyna (patrz rys.1.4).



Rysunek 1.4: Wizja artystyczna przestrzeni rozkładów prawdopodobieństwa asymptotycznie dążących do rozkładu Gaussa bądź Lévy'ego. Zmienna losowa S_j , $j = 1, 2, \dots, n$, oznacza sumaryczną zmienną losową, natomiast indeks (wykładnik) Lévy'ego $0 < \alpha < 2$.

Dodajmy, że dla procesów gaussowskich najistotniejsze własności opisuje korpus rozkładu podczas gdy dla procesów Lévy'ego jego "ogon", przy czym oba rodzaje rozkładów są stabilne.

Jak widać, świat przelotów Lévy'ego to świat niczym nieograniczonych fluktuacji - świat "szaleńczego" ryzyka, nieporównywalny ze światem gaussowskim, gdzie ryzyko (w sensie Markowitza) jest ograniczone. Rodzi się teraz pytanie, **jak w rzeczywistości przejawia**

się fakt istnienia, teoretycznie rzecz biorąc, nieskończonej wariancji? Odpowiedź na to ważne pytanie przedstawiamy na drodze symulacji komputerowej.

1.5.1 Algorytm separowalnego błędzenia Weierstrassa

Algorytm separowalnego błędzenia Weierstrassa składa się z dwóch zasadniczych kroków.

- 1) Celem wykonania pierwszego kroku wystarczy zauważyć, że wagę $w(j)$ można interpretować w grze w "oła i reszkę" jako prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki, gdy wcześniej j -razy z rzędu wypadła orzeł, przy czym prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie wynosi $1/N$. Oczywiście, przeprowadzenie takiego losowania nie nastęrcza już żadnych trudności.
- 2) Następnie, dysponując tak wylosowaną wartością j , można natychmiast wyznaczyć $b_0 b^j$, czyli przemieszczenie pchły finansowej o $\Delta X = b_0 b^j$.

Dysponując tym prostym ale niezwykle ważnym algorytmem można wytworzać i analizować szeregi czasowe o dowolnej (choć zawsze skończonej) długości. Właśnie program "Levy3-Java" symuluje tym algorytmem (dla lepszej wizualizacji) dwuwymiarowe separowalne błędzenie Weierstrassa, umożliwiając prowadzenie różnych eksperymentów numerycznych a w tym zwłaszcza obserwację bezpośredniego wpływu rzadkich zdarzeń na pomiar ryzyka.

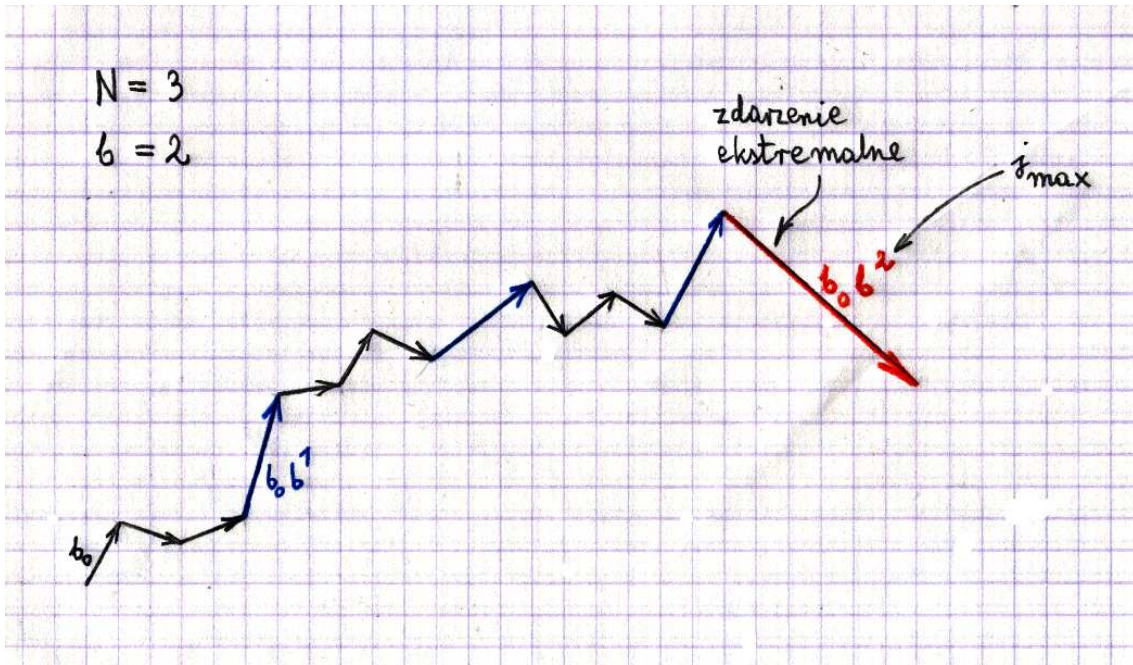
1.6 Skalowanie przemieszczenia oraz wpływ ekstremalnych zdarzeń na ryzyko

W tym rozdziale odpowiadamy na ważne praktyczne pytanie a mianowicie: **jak estymata jednokrokowej wariancji (oznaczmy ją przez $\langle \Delta X^2 \rangle_L$) dąży do swojej nieskończonej wartości oczekiwanej (dla $\alpha < 2$), gdy liczba L pojedynczych przemieszczeń pchły finansowej wzrasta nieograniczenie?**

Rozważmy w tym celu separowalne jednowymiarowe błędzenie Weierstrassa przyjmując, dla przykładu, że $N = 3$ a $b = 2$. Na rys.1.5 uporządkowano pojedyncze przemieszczenia mrówki finansowej zgodnie z regułą (1.25) (zaniedbując fluktuacje liczby przemieszczeń w ramach poszczególnych pokoleń), gdzie na $N = 3$ skoki z danego pokolenia przypada jeden z pokolenia wyższego, przy czym j_{max} określa liczbę pokoleń, jakie pojawiły się w trakcie tych L przemieszczeń.

Stąd, dla $j_{max} \gg 1$, można łatwo wyznaczyć następujące wielkości charakteryzujące to błędzenie:

- maksymalną wartość pojedynczego przemieszczenia $|\Delta X_{max}| = b_0 b^{j_{max}}$,
- liczebność $L = \sum_{j=0}^{j_{max}} N^j = \frac{N^{j_{max}+1}}{N-1} \approx \frac{1}{1-1/N} N^{j_{max}}$



Rysunek 1.5: Wizja artystyczna separowalnego błędzenia Weierstrassa po (wspomnianym w tekście) uporządkowaniu; jest ono tutaj dwuwymiarowe celem lepszej wizualizacji. Jak widać, na trzy skoki z pokolenia $j = 0$ (czarne strzałki) przypada jeden skok z kolejnego ($j = 1$, niebieskie strzałki) i analogicznie na trzy skoki z tego pokolenia przypada jeden z następnego ($j = 2$, czerwona strzałka). Dla prostoty przyjęto, że $b_0 = b$.

- estymatę jednokrokowej wariancji

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta X^2 \rangle_L &= b_0^2 \frac{(b^2)^0 N^{j_{max}} + (b^2)^1 N^{j_{max}-1} + \dots + (b^2)^{j_{max}} N^0}{L} \\
 &= b_0^2 \frac{N^{j_{max}} (b^2/N)^{j_{max}+1} - 1}{L (b^2/N - 1)} \\
 &\approx b_0^2 \begin{cases} \frac{1}{L} \frac{1}{1-b^2/N} N^{j_{max}} = \frac{1-1/N}{1-b^2/N}, & \text{jeżeli } b^2 < N \equiv \alpha > 2 \\ \frac{1}{L} \frac{1}{1-N/b^2} (b^2)^{j_{max}} = \frac{(1-1/N)^{2/\alpha}}{1-N/b^2} L^{2/\alpha-1}, & \text{jeżeli } b^2 > N \equiv \alpha < 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

gdzie przy wyprowadzeniu równości w pierwszym wyrażeniu powyżej (w nawiasie klamrowym) skorzystaliśmy ze wzoru na liczebność L , odtwarzając dzięki temu (jak trzeba) pierwsze wyrażenie w (1.26). Natomiast druga równość, rządzona przez ekstremalne zdarzenie jakim jest pojawienie się samotnej maksymalnej wartości

$$|\Delta X_{max}| = b_0 b^{j_{max}} = (1 - 1/N)^{1/\alpha} L^{1/\alpha} \quad (1.28)$$

pojedynczego przemieszczenia, daje odpowiedź na postawione na wstępie tego podrozdziału pytanie. Pozwala ona także odpowiedzieć na analogiczne pytanie dotyczące estymaty sumarycznej wariancji $\langle X(t)^2 \rangle_L$ dla $\alpha < 2$ oraz $L \gg 1$ a mianowicie:

$$\langle X(t)^2 \rangle_L = L \cdot \langle \Delta X(t)^2 \rangle_L \approx \frac{(1 - 1/N)^{2/\alpha}}{1 - N/b^2} L^{2/\alpha} = \frac{1}{1 - N/b^2} (\Delta X_{max})^2, \quad (1.29)$$

tzn. wielkość ta

- 1) skaluje się z L z wykładnikiem potęgi $2/\alpha$, czyli ma charakter singularny oraz
- 2) rządzona jest przez ekstremalne zdarzenie. Dodajmy, że te ekstremalne zdarzenia rządzą nie tylko dynamiką osobliwą ale i singularną, o której jest mowa w następnej części.

Warto w tym miejscu dodać, że pojawienie się w jakiejś pojedynczej realizacji procesu zdarzenia o znikomym prawdopodobieństwie, a zatem znacznie odbiegającego swoją wielkością od wszystkich pozostałych, można traktować jak wystąpienie zdarzenia superekstremalnego (nazywanego w literaturze anglosaskiej *dragon-king* czyli królewskim smokiem w odróżnieniu do zdarzeń ekstremalnych zwanych czarnymi łabędziami, ang. *black swans*).

Przy okazji zauważmy, że im wykładnik α jest mniejszy tym zmienność błędzenia jest większa, gdyż wtedy $|\Delta X_{max}|$ jest większe. Dlatego, **jako miarę globalnego ryzyka inwestycyjnego w papier wartościowy opisany separowalnym błędzeniem Weierstrassa można przyjąć odwrotność α , czyli $1/\alpha$.**

Część II

Metody wyznaczania wykładnika Hursta

Rozdział 2

Ogólna klasyfikacja ryzyka rynkowego

Termin *ryzyko* pochodzi od starowłoskiego słowa *risicare* co oznacza *odważenie się*. Z ryzykiem rynkowym mamy do czynienia wtedy, gdy ceny papierów wartościowych zależą bezpośrednio od sytuacji na rynku. Oczywiście, zależność ta jest w większym lub mniejszym stopniu stale obecna. Zatem, ryzyko rynkowe jest nieusuwalnym elementem aktywności rynkowej.

Miary ryzyka rynkowego dzieli się zwyczajowo na trzy grupy:

- 1) miary zmienności (ang. *volatility*), np. zmienności ceny, stopy zwrotu (lub wzrostu), rozkładu prawdopodobieństwa,
- 2) miary wrażliwości (w fizyce podatności) np. wrażliwości ceny lub stopy zwrotu (wzrostu); oznacza się je tradycyjnie literami alfabetu greckiego i nazywa skrótowo wskaźnikami greckimi (ang. *greeks*),
- 3) miary zagrożenia wyrażającej się możliwością spadku ceny lub stopy zwrotu (wzrostu), czyli możliwością wystąpienia nadmiernych strat (analizowanych np. metodą VaR, ang. *Value at Risk*).

W niniejszych rozważaniach zajmujemy się tylko grupą pierwszą, wykorzystując **podejście fraktalne i multifraktalne**.

2.1 Szereg czasowy a ryzyko

Zasadnicze pytanie na jakie postaramy się odpowiedzieć brzmi: **czy dysponując szeregiem czasowym (np. ceną papieru wartościowego albo stopą zwrotu na nim) jesteśmy w stanie określić ryzyko rynkowe inwestowania w te papiery?** Odpowiedzi na to pytanie poszukujemy, traktując wspomniany szereg jako realizację jakiegoś fraktalnego albo multifraktalnego błędzenia przypadkowego. Na wykonanie pierwszego kroku w tym kierunku pozwala Metoda Przeskalowanego Zasięgu (Zakresu) (ang. *Rescaled Range Analysis*).

2.2 Algorytm metody przeskalowanego zasięgu R/S

Istota Metody Przeskalowanego Zasięgu (Zakresu) R/S zasadza się na fakcie, że rozpiętość (ang. *span*) błędzenia przypadkowego skaluje się tak jak dyspersja sumarycznego przemieszczenia czy też ogólniej, że sumaryczne rozmiary liniowe błędzenia przypadkowego skalują się jednakowo. Metoda R/S jest kluczową a zarazem najprostszą metodą wyznaczenia wykładnika Hursta H sterującego zmiennością szeregu czasowego. Tym samym, wykładnik ten można powiązać z ryzykiem inwestycyjnym - im większa zmienność tym większe ryzyko.

Przypuśćmy zatem, że dysponujemy dyskretnym szeregiem czasowym $\{y_l\}_{l=1}^L$ $L \gg 1$, stanowiącym np. przyrost ceny papieru wartościowego lub stopę zwrotu (zwykłą lub logarytmiczną) na nim w kolejnych, dyskretnych chwilach $l = 1, 2, \dots, L$.

- 1) W pierwszym kroku budujemy zespół statystyczny równolicznych, rozłącznych podciągów wyjściowego szeregu czasowego:

$$\{y_l\}_{l=1}^n, \{y_l\}_{l=n+1}^{2n}, \dots, \{y_l\}_{l=(j-1)n+1}^{jn}, \dots, \{y_l\}_{l=L-n+1}^L; \quad (2.1)$$

przyjmując, że tych podciągów jest J , tzn. $j = 1, 2, \dots, J$, $L = n J^1$.

- 2) Następnie, wyznaczamy wartość średnią

$$\bar{y}^j = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n y_l^j, \quad (2.2)$$

oraz "lokalne" odchylenie standardowe

$$S^j = \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (y_l^j - \bar{y}^j)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.3)$$

dla każdego podciągu $j (= 1, 2, \dots, J)$ z osobna, gdzie wprowadziliśmy teraz dla wygody podwójne oznaczenia elementów wyjściowego szeregu czasowego; następnie wprowadzamy skumulowane odchylenie zdefiniowane następująco:

$$Y_k^j \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{l=1}^k (y_l^j - \bar{y}^j), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.4)$$

- 3) W kolejnym kroku wprowadzamy rozpiętość (zakres) dla każdego podciągu

$$R^j \stackrel{\text{def.}}{=} \max_{1 \leq k \leq n} \{Y_k^j\} - \min_{1 \leq k \leq n} \{Y_k^j\}, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (2.5)$$

a stąd średnią (po zespole statystycznym) wartość przeskalowanego zakresu, która stanowi estymatę jego wartości oczekiwanej $E(R/S)(n)$, wyrażamy następująco:

$$\overline{(R/S)}(n) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J R^j / S^j \quad (2.6)$$

¹Innymi słowy, musimy tak dobrać długości szeregów L i n aby n było dzielnikiem L .

- 4) Wreszcie, obliczamy średnią wartość przeskalowanego zakresu dla kolejnych, dyskretnych chwil n (czyli długości wspomnianych wcześniej podciągow) pamiętając, że wartość oczekiwana przeskalowanego zakresu skaluje się z czasem potęgowo, dla asymptotycznie długich czasów:

$$E(R/S)(n) = \text{const} n^{E(H)}, \quad (2.7)$$

gdzie wykładnik potęgi $E(H) \geq 0$ jest właśnie poszukiwanym przez nas wartością oczekiwaną (prawdziwą) wykładnika Hursta². Tak otrzymane dane przedstawiamy w skali log – log dopasowując do nich linię prostą (regresja liniowa):

$$\log(\overline{R/S})(n) = H \log n + \log \text{const}. \quad (2.8)$$

gdzie H jest empiryczną wartością wykładnika Hursta. Oczywiście, z tego dopasowania otrzymujemy współczynnik kierunkowy prostej, czyli wykładnik H z jakimś błędem dopasowania ΔH .

Stosowalność metody R/S jest ograniczona

- tylko do długich szeregów, tak aby możliwy był ich podział na wystarczająco dużą liczbę zadowalająco długich podciągow,
- do szeregów wcześniej zdetrendowanych i pozbawionych sezonowości.

Jak już mówiliśmy o tym w rozdz.1, **wykładnik Hursta** rządzi błędzeniem przypadkowym a więc jego zmiennością stanowiąc tym samym narzędzie klasyfikacji szeregów. Co więcej, **jako wielkość sterująca zmiennością może być** (zgodnie z koncepcją ryzyka wprowadzoną przez Markowitza) **miarą ryzyka**³

Bogatszą, globalną miarą ryzyka jest pudełkowy wymiar fraktalny $D_f = 2 - H$ szeregu czasowego, czyli wykresu funkcji Y_k^j w zależności od dyskretnego czasu k , gdzie $1 \leq k \leq n$, dla dowolnie wybranego podciągu j ⁴. Algorytm pozwalający wyznaczyć tę wielkość omawiamy w podrozdz.2.6.

Istnieje kilka lepszych metod wyznaczania wykładnika Hursta, z których *Analiza Zdetrendowanych Fluktuacji* (ang. *Detrended Fluctuation Analysis*) stworzona przez fizyków [9] cieszy się szczególnie dużą popularnością. Omawiamy ją w kolejnym rozdziale.

2.3 Analiza Zdetrendowanych Fluktuacji

Analizę Zdetrendowanych Fluktuacji (AZF) przedstawiamy w wersji najprostszej, dotyczącej dyskretnych szeregów czasowych, $\{\Delta X_j\}_{j=1}^N$, dla których kolejne chwile czasu j

²Zwyczajowo nie wprowadza się osobnej notacji dla prawdziwej wartości wykładnika Hursta pozostawiając Czytelnikowi rozróżnienie pomiędzy nią a jego empiryczną wartością lub estymatą. W dalszym ciągu my także rezygnujemy z takiego rozróżnienia.

³Dokładniej rzecz biorąc, lepszą globalną miarą ryzyka może być wielkość $1 - H$, na co wskazywaliśmy w rozdz.1.3.

⁴Możnaby także rozważać kilka podciągow lub nawet cały szereg ale wtedy należałoby odpowiednio przededefiniować znaczenie zmiennej k i indeksu j .

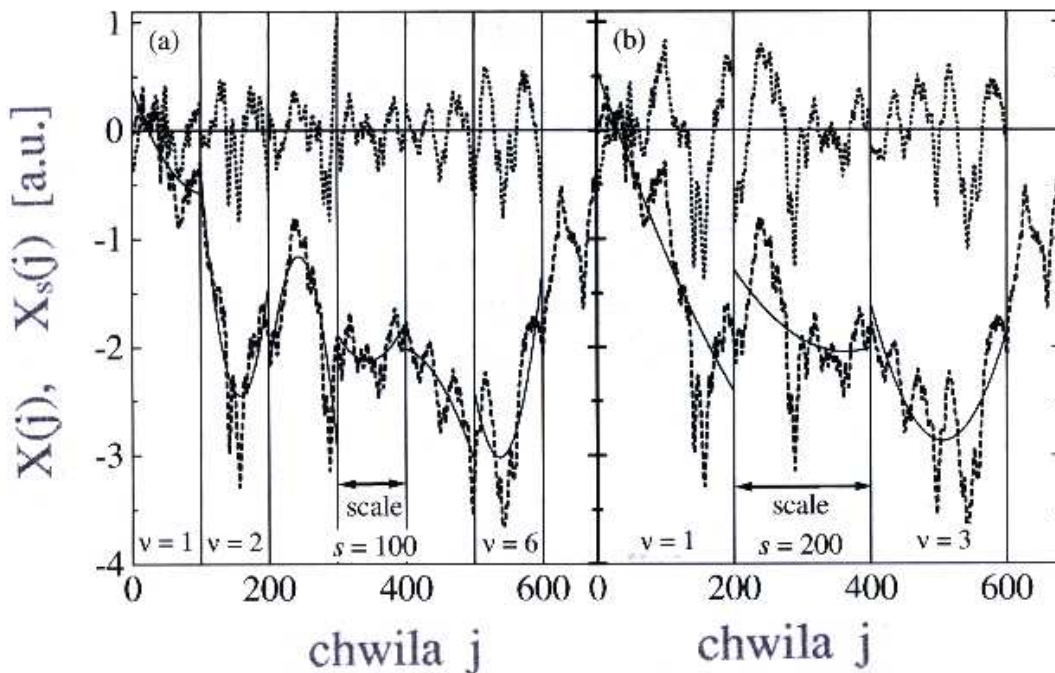
są równoodległe. Przyjmijmy, że szum ten jest centrowany (tzn. $\{\langle \Delta X_j \rangle\}_{j=1}^N = 0$, patrz rozdz. 2.2). Załóżmy dalej, że szum ten jest skorelowany w sposób długookresowy (tzn. w wyrażeniu (1.9) wykładnik $\eta > 1$).

Algorytm AZF składa się z czterech następujących kroków.

- 1) W pierwszym kroku budowany jest proces stochastyczny zwany dalej profilem

$$X(j) = \sum_{k=1}^j \Delta X_k. \quad (2.9)$$

Profil ten został, m.in., przedstawiony na rys.2.1 w postaci linii przerywanej.



Rysunek 2.1: Przykładowa, schematyczna wizualizacja zasadniczych elementów Analizy Zdetrendowanych Fluktuacji dla dwóch różnych segmentowań (same szeregi uzyskano za pomocą Metody Fourierowskiego Filtrowania przedstawionej w rozdz.1.4). Linia przerywana przedstawia wyjściowy profil $X(j)$ zdefiniowany wzorem (2.9), natomiast kropkowa - profil zdetrendowany $X_s(j)$ dany formułą (2.11) dla zadanej wielkości s pojedynczego segmentu. Wykres zamieszczony na rysunku zaczerpnięto z pracy [9].

- 2) W drugim kroku przedział czasu dzielony jest na rozłączne segmenty o długości s każdy; stąd liczba tych segmentów wynosi

$$N = s N_s + N'_s, \quad (2.10)$$

gdzie $0 \leq N'_s < N_s$ jest resztą z dzielenia. Aby nie stracić tej reszty, analogiczny podział robimy segmentując przedział czasu z prawa na lewo - w ten sposób dysponujemy podwojoną liczbą $2N_s$ segmentów.

- 3) W kolejnym kroku w każdym z tych segmentów dopasowujemy metodą najmniejszych kwadratów wielomian $w_\nu^{(n)}$ jednakowego stopnia n do wcześniej utworzonego profilu a następnie dokonujemy lokalnego detrendowania, otrzymując sygnał (zdetrendowany profil, patrz rys. 2.1)

$$X_s(j) = X(j) - w_\nu^{(n)}(j), \quad (2.11)$$

gdzie $\nu = 1, 2, \dots, 2N_s$, indeksuje segment.

- 4) Wreszcie, w ostatnim kroku wyznaczamy wariancję zdetrendowanego szeregu dla każdego segmentu $[(\nu - 1)s, \nu s]$ z osobna

$$F_s^2(\nu) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s X_s^2((\nu - 1)s + j) \quad (2.12)$$

a następnie konstruujemy funkcję fluktuacyjną jako pierwiastek ze średniej po wszystkich segmentach

$$F^{(n)}(s) = \left[\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} F_s^2(\nu) \right]^{1/2}. \quad (2.13)$$

Jeżeli zachodzi taka potrzeba można następująco ulepszyć funkcję korelacyjną za pomocą czynnika multiplikatywnego

$$F_{mod}^{(n)}(s) = \frac{F^{(n)}(s)}{K_{1/2}^{(n)}}, \quad (2.14)$$

gdzie

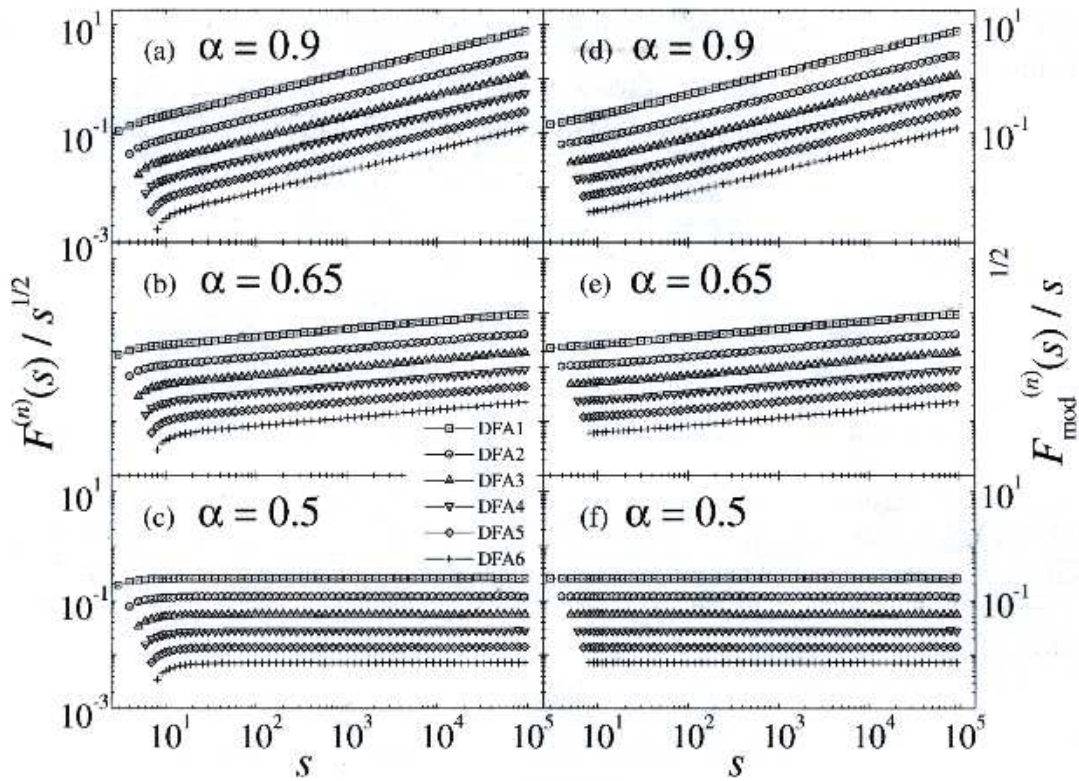
$$K_{1/2}^{(n)} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{F_{shuff}^{(n)}(s)/s^{1/2}}{F_{shuff}^{(n)}(s')/s'^{1/2}}, \quad s' \gg 1, \quad (2.15)$$

(w praktyce wystarczy wybrać $s' \approx N/20$), umożliwiające poprawę wyników dla krótkich segmentów (patrz porównanie przebiegu obu wspomnianych powyżej funkcji fluktuacyjnych zamieszczone na rys.2.2), przy czym indeks *shuff* oznacza funkcję fluktuacyjną zbudowaną dla potasowanego wyjściowego szeregu.

Algorytm pozwala osiągnąć nasz **zasadniczy cel** a mianowicie, wyznaczyć **zależność funkcji fluktuacyjnej od wielkości segmentu s** . Jeżeli szereg $\{\Delta X_j\}_{j=1}^N$ jest szumem skorelowanym na sposób długookresowy (patrz relacja (1.9) w rozdz.1.2) to funkcja fluktuacyjna skaluje się dla długich segmentów (patrz drugie wyrażenie dotyczące superdyfuzji we wzorze (1.1)),

$$F^{(n)}(s) \sim s^H, \quad (2.16)$$

co już pozwala wyznaczyć wykładnik Hursta H w oparciu o regresję liniową (nachylenie prostej) w skali log-log (patrz wykresy na rysunku 2.2, gdzie przyjęto eksponens $\alpha \equiv H$).



Rysunek 2.2: Przykładowa wizualizacja zredukowanej funkcji fluktuacyjnej $F^{(n)}(s)/s^{1/2}$, gdzie licznik dany jest wyrażeniem (2.13) oraz analogicznej ulepszonej (zmodyfikowanej) $F_{\text{mod}}^{(n)}(s)/s^{1/2}$, tutaj licznik dany jest wzorem (2.14), dla pięciu kolejnych stopni wielomianu $w_v^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, 5$. Wykresy zamieszczone na rysunku zaczerpnięto z pracy [9].

2.4 Wykładnik Hursta a nieseparowalne przeloty Weierstrassa

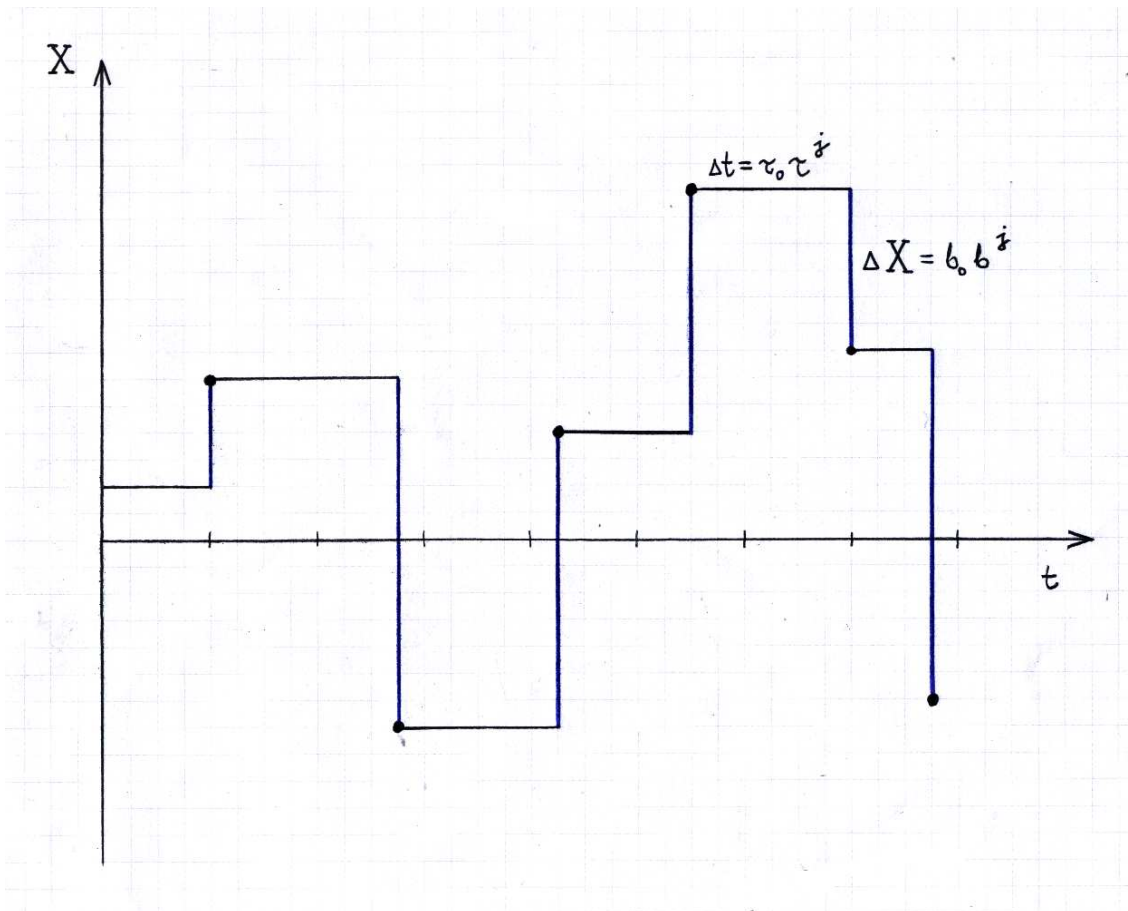
Rozważmy teraz nieco bardziej realistyczny proces błędzenia skokowego zwany nieseparowalnymi przelotami Weierstarssa. Model ten, należący (formalnie rzecz biorąc) do kategorii błędzeń z czasem ciągłym (notowania ciągłe, ciągły monitoring, etc.), jest jednym z najprostszych pokazujący w jaki sposób można zrealizować subdyfuzję (jak już mówiliśmy, nieosiągalną dla błędzeń z czasem dyskretnym). Jest on bezpośrednim uogólnieniem modelu separowalnych przelotów Weierstrassa omówionego w rozdz.1.5.

Założmy teraz, że nie tylko zmienna losowa ΔX może przyjmować dyskretne (pogrupowane pokoleniowo) wartości, ale także zmienna czasowa Δt , podlegając następującemu rozkładowi prawdopodobieństwa [10]

$$\psi(\Delta X, \Delta t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} w(j) \delta(\Delta t - \tau_0 \tau^j) \left[\delta(\Delta X - b_0 b^j) + \delta(\Delta X + b_0 b^j) \right], \quad (2.17)$$

przy czym zarówno szum "przestrzenny" ΔX jak i czasowy Δt podlega najprostszemu

rozkładom wyrażonym za pomocą delt Diraca⁵. Wycinek przykładowej trajektorii zamieszczono na rys.2.3, gdzie teraz przedziały czasu Δt pomiędzy kolejnymi skokami są różnej długości, w przeciwieństwie do separowalnych przelotów Weierstrassa (patrz rys.1.3 w rozdz.1.5).



Rysunek 2.3: Schematyczna wizualizacja wycinka trajektorii nieseparowalnych przelotów Weierstrassa. Teraz przedziały czasu Δt są różnej długości, w przeciwieństwie do separowalnych przelotów Weierstrassa dyskutowanych w rozdz.1.5. Czarne kółka symbolizują tikowe dane empiryczne.

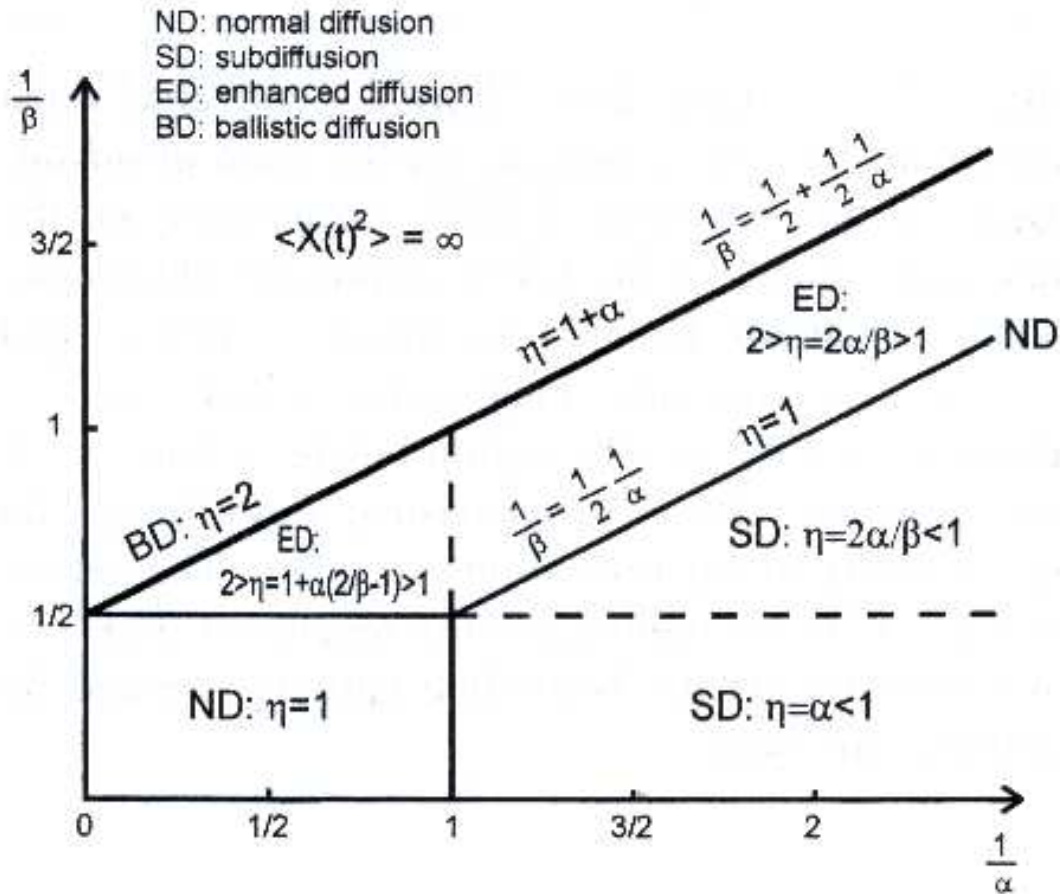
Jak wynika z definicji (2.17), obie zmienne są tutaj sprzężone⁶, przy czym kolejne losowania obu par zmiennych $(\Delta X, \Delta t)$ są od siebie niezależne. Dodajmy, że waga $w(j)$ jest taka sama jak dla separowalnych przelotów Weierstrassa (zdefiniowana równością (1.25)).

Definicja (2.17) umożliwia, w zależności od wartości wejściowych parametrów sterujących $b, \tau, N > 1$, konstrukcję wszystkich rodzajów błędzeń określonych wzorem (1.1). Bardziej szczegółowo, w postaci graficznej, błędzenia te zostały sklasyfikowane na diagramie

⁵Najogólniejszym jest tutaj rozkład dwóch zmiennych w postaci $\frac{1}{b_0 \tau_0} \frac{1}{b \tau^j} \phi\left(\frac{|\Delta X|}{b_0 b^j}, \frac{\Delta t}{\tau_0 \tau^j}\right)$ umożliwiającą dyskretne skalowanie oparte na bazach b, τ i N określających wykładniki skalujące α i β zdefiniowane w tekście.

⁶Zmienna przestrzenna i czasowa są sprzężone ale nie są skorelowane, gdyż korelacje te są niszczone przez szum zmiennej przestrzennej.

fazowym zamieszczonym na rys.2.4. Widać, że



Rysunek 2.4: Diagram fazowy różnych rodzajów błędzeń omówionych w tekście. Jak widać, klasyfikacji dokonano ze względu na wartość wykładnika $\eta = 2H$. Rysunek zaczerpnięto z pracy [10].

- superdyfuzja została tutaj dodatkowo podzielona na *wzmocnioną dyfuzję* (ang. *enhanced diffusion*) oraz *dyfuzję balistyczną* (ang. *ballistic diffusion*).
- przeloty Lévy'go mają miejsce dla wykładników $\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \ln N / \ln \tau$ i $\beta \stackrel{\text{def.}}{=} \ln N / \ln b$ spełniających kluczową nierówność

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha}, \quad (2.18)$$

patrz na rys.2.4 obszar powyżej najgrubszej ukośnej linii prostej, gdzie wariancja $\langle X(t)^2 \rangle = \infty$, dla asymptotycznie długich czasów.

Reasumując należy podkreślić, iż

- obecność skalowania w danych empirycznych oznacza, tak jak w zjawiskach krytycznych w fizyce, że **szczegóły dotyczące analizowanego układu nie są istotne**. Właśnie dlatego w definicji przelotów Weierstrassa (zarówno separowalnych jak i nieseparowalnych) uwzględniono wartości szumów (tak przestrzennego jak i czasowego) jedynie z dokładnością do rzędu wielkości.
- W pracy [10] wykazano, że **żaden dodatkowy szum przestrzenny lub czasowy o skończonej wariancji nie jest w stanie zamaskować** (zasłonić) lub usunąć **skalowania widocznego** (dla odpowiednio dobranych wartości wykładników α i β) **dla asymptotycznie długich czasów**.

To co powiedziano powyżej usprawiedliwia szczególnie prostą postać gęstości prawdopodobieństwa zadanej wyrażeniem (2.17), ułatwiając prowadzenie analizy długookresowej.

2.5 Algorytm ułamkowego ruchu Browna

Szczególnie popularnym algorytmem umożliwiającym symulację komputerowa ułamkowego ruchu Browna nosi nazwę "Losowe Przemieszczanie Środka Odcinka" (ang. *Random Midpoint Displacement Method*). Metoda ta opiera się *de facto* na generowaniu zmiennej losowej spełniającej warunek (1.5). Jest to kluczowy warunek definiujący ułamkowy ruch Browna, z którego można już wyprowadzić pozostałe (np. (1.3) i (1.7)). Algorytm umożliwia generowanie ułamkowego ruchu Browna w przedziale czasu $[0, t]$ ⁷.

Wyjściowo przyjmujemy, że jednowymiarowe błędzenie startuje w chwili zero z początku układu współrzędnych. Natomiast położenie cząstki Browna w chwili t , czyli $X(t)$, losujemy z rozkładu Gaussa o średniej zero i wariancji $\langle X(t)^2 \rangle = t^{2H} \sigma^2$, gdzie H jest zadany wykładnikiem Hursta, ustalonym raz na zawsze dla całej procedury.

W następnym, 1 kroku dzielimy wyjściowy przedział czasu na połowę. Naszym zadaniem jest znalezienie położenia cząstki Browna $X(t/2)$ - przyjmujemy, że jest ono sumą dwóch składników

$$X(t/2) = \frac{1}{2} X(t) + \gamma_1 G_1, \quad (2.19)$$

gdzie zmienna gaussowska G_1 jest losowana z tego samego rozkładu Gaussa co wyjściowa zmienna $X(t)$, natomiast czynnik skalujący γ_1 musi być wyznaczony w taki sposób aby wariancja $\langle X(t/2)^2 \rangle$ skalowała się tak jak dla ułamkowego ruchu Browna o wprowadzonym powyżej wykładniku Hursta H . Zatem, musi być spełniona równość:

$$\begin{aligned} \langle X(t/2)^2 \rangle &= \frac{1}{2^2} \langle X(t)^2 \rangle + \gamma_1^2 \langle G_1^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2^2} t^{2H} \sigma^2 + \gamma_1^2 t^{2H} \sigma^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^{2H} \sigma^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

stąd otrzymujemy natychmiast, że

$$\gamma_1 = \pm \frac{1}{2^{1H}} \sqrt{1 - 2^{2H-2}}. \quad (2.21)$$

⁷W literaturze podaje się zwykle algorytm definiujący ułamkowy ruch Browna w przedziale jednostkowym - podany tutaj algorytm jest wygodniejszy w praktycznych zastosowaniach.

czyli może być przyjmować zarówno wartość dodatnią jak i ujemną (np. można dopuścić losową zamianę znaku czyli nałożyć szum dychotomiczny) - oczywiście, może się to odbić na znaku zmiennej losowej.

W kolejnym, 2 kroku dzielimy obie połowy odcinka $[0, t]$ ponownie na dwie równe części - zajmijmy się przykładowo pierwszą połową odcinka konstruując zmienną losową $X(t/4)$ w chwili $t/4$ (dla chwili $3t/4$ konstrukcja przebiega analogicznie). Niech,

$$X(t/4) = \frac{1}{2}X(t/2) + \gamma_2 G_2, \quad (2.22)$$

gdzie G_2 jest zmienną gaussowską posiadającą identyczny rozkład jak G_1 . Analogicznie jak krok wcześniej, ta nowa zmienna powinna mieć wariancję, która skaluje się zgodnie z definicją ułamkowego ruchu Browna o ustalonym na wstępie wykładniku Hursta:

$$\begin{aligned} \langle X(t/4)^2 \rangle &= \frac{1}{2^2} \langle X(t/2)^2 \rangle + \gamma_2^2 \langle G_2^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{t}{2} \right)^{2H} \sigma^2 + \gamma_2^2 t^{2H} \sigma^2 = \left(\frac{t}{4} \right)^{2H} \sigma^2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdzie przy wyprowadzeniu drugiej równości skorzystaliśmy z wyrażenia (2.20). Rozwiązując równanie w (2.23) na niewiadomą γ_2 otrzymujemy:

$$\gamma_2 = \pm \frac{1}{2^{2H}} \sqrt{1 - 2^{2H-2}}. \quad (2.24)$$

Postępując analogicznie jak powyżej uzyskujemy w j -ym kroku procedury ($j = 1, 2, 3, \dots$) zmienną losową postaci

$$X(t/2^j) = \frac{1}{2}X(t/2^{j-1}) + \gamma_j G_j; \quad (2.25)$$

jej wariancja dana jest wzorem

$$\begin{aligned} \langle X(t/2^j)^2 \rangle &= \frac{1}{2^2} \langle X(t/2^{j-1})^2 \rangle + \gamma_j^2 \langle G_j^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{t}{2^{j-1}} \right)^{2H} \sigma^2 + \gamma_j^2 t^{2H} \sigma^2 = \left(\frac{t}{2^j} \right)^{2H} \sigma^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Stąd, otrzymujemy ogólne wyrażenie na poszukiwany współczynnik skalujący:

$$\gamma_j = \pm \frac{1}{2^{jH}} \sqrt{1 - 2^{2H-2}}. \quad (2.27)$$

W dalszym ciągu, opisany algorytm łatwo daje się uogólniać np. na procesy, w których zmienna losowa G_j posiada rozkład niegaussowski, przy czym rozkład ten (tak jak gaussowski) ma skończoną wariancję. Innym kierunkiem uogólnień jest uzmiennienie wykładnika H , czyli uzależnienie jego wartości od kroku procedury j , tzn. przejście od H do $H(j)$ - temu ostatniemu kierunkowi umożliwiającemu **symulację kluczowego dla niniejszych rozważań multifraktalnego ruchu Browna**, poświęcamy podrozdział 2.8.1.

2.6 Algorytm bezpośredniego odczytu wymiaru fraktalnego

Bezpośredni odczyt pudełkowego wymiaru fraktalnego opiera się na:

- a) metodzie pudełkowej jego obliczenia (stąd pełna nazwa tego wymiaru to *pudełkowy wymiar fraktalny*) oraz
- b) poleceniach odczytujących stan ekranu (np. kolor pixela).

Przypomnienie algorytmu metody pudełkowej

Przypomnijmy, że wykładnik Hursta określa w następujący sposób odpowiedź procesu $Y(t)$ na przeskalowanie jego argumentu

$$Y(bt) = b^H Y(t) \equiv Y(t) = \frac{Y(bt)}{b^H}. \quad (2.28)$$

Zatem, proces $Y(t)$ pozostaje niezmienny jeżeli w parze z przeskalowaniem jego argumentu idzie odpowiednie przeskalowanie samego procesu. Innymi słowy, przeskalowanie osi poziomej wykresu o czynnik b a pionowej o czynnik b^H pozostawia wykres niezmiennym.

Można teraz zrealizować następującą procedurę:

- 1) Pokrywamy wyjściowo wykres funkcji $Y(t)$ kwadratami (dwuwymiarowymi pudełkami) o długości boku $\varepsilon(0) = r$ w liczbie $L(0) = N$. Następnie wprowadzamy zstępujące pokrycie mniejszymi pudełkami o boku o połowę krótszym. Obliczamy, korzystając z równania (2.28), liczbę mniejszych pudełek pokrywających wykres; łatwo można sprawdzić, że wynosi ona $L(1) = 2^{2-H} N$. Analogicznie rzecz się ma przy pokryciu pudełkami o boku $\varepsilon(2) = r/2^2$ - liczba tych pudełek wynosi $2^{2(2-H)} N$. Uogólniając na pokrycie pudełkami w k -tym pokoleniu, czyli o boku $\varepsilon(k) = r/2^k$, otrzymujemy:

- liczbę pudełek liczoną w poziomie $L_{\parallel}(k) = \sqrt{N} 2^k$ oraz
- liczebność pokrycia wynoszącą $L(k) = 2^{k(2-H)} N$.

- 2) Obie powyższe wielkości można połączyć za pomocą wymiaru pudełkowego D_f (będącego szczególnym przypadkiem wymiaru fraktalnego) wiedząc, że liczba pudełek liczona w poziomie podniesiona do potęgi D_f daje liczebność całkowitego pokrycia. Stąd,

$$D_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L(k)}{L_{\parallel}(k)} = 2 - H \geq 0. \quad (2.29)$$

Algorytm ten pozwala na w pełni zautomatyzowane odczytywanie przez komputer wymiaru fraktalnego danego szeregu a tym samym w pełni zautomatyzowane **wyznaczanie ryzyka inwestycyjnego** (np. w papier wartościowy, którego dynamikę ceny reprezentuje dany szereg czasowy).

2.7 Krótkie szeregi czasowe a metoda R/S

Jak już mówiliśmy, właściwą estymatę wykładnika Hursta uzyskuje się tylko dla asymptotycznie długich szeregów danych. Jednakże, w praktyce mamy do czynienia zawsze z szeregami o skończonej liczbie wyrazów a często po prostu z szeregami krótkimi. W takiej sytuacji pojawia się problem poprawności analizy R/S , tzn. poprawności wyznaczenia na takiej drodze wykładnika Hursta.

2.7.1 Algorytm zwiększania liczebności szeregu czasowego

2.8 Multifraktale

Rozszerzenie fraktalnego ruchu Browna na multifraktalny nastąpiło w połowie ostatniej dekady zeszłego stulecia i **związane jest po prostu z uzależnieniem wykładnika Hursta od czasu**, czyli przejściu od wykładnika globalnego H do wykładnika lokalnego $H(t)$, który nosi nazwę funkcji Höldera [11]. Jeżeli funkcja Höldera jest nieciągła (np. przedziałami ciągła) to taki proces stochastyczny nazywamy uogólnionym multifraktalnym ruchem Browna (ang. *Generalized Multifractal Brownian Motion*). Zauważmy, że funkcja Höldera, zmieniając w czasie swoją wartość może prowadzić do zmiany rodzaju błędzenia, np. od antypersystentnego do persystentnego. Wszystko co poprzednio mówiliśmy na temat wykładnika Hursta i jego roli w procesach stochastycznych a stąd w definicji miar ryzyka, przenosi się bezpośrednio na funkcję Höldera. Aby móc symulować multifraktalny lub uogólniony multifraktalny ruch Browna, funkcja Höldera musi być zadana.

2.8.1 Algorytm symulacji multifraktalnego ruchu Browna

Algorytm multifraktalnego ruchu Browna uzyskuje się poprzez bezpośrednie uogólnienie równości (2.26) z podrozdz.2.5 dotyczącej wariancji zmiennej losowej

$$X(t/2^j) = \frac{1}{2}X(t/2^{j-1}) + \gamma_j G_j, \quad (2.30)$$

posiadającej formalnie taką samą postać jak dla fraktalnego ruchu Browna. W przypadku multifraktalnego ruchu Browna wariancja tej zmiennej przybiera postać:

$$\begin{aligned} \langle X(t/2^j)^2 \rangle &= \frac{1}{2^2} \langle X(t/2^{j-1})^2 \rangle + \gamma_j^2 \langle G_j^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{t}{2^{j-1}} \right)^{2H(t/2^{j-1})} \sigma^2 + \gamma_j^2 t^{2H(t)} \sigma^2 = \left(\frac{t}{2^j} \right)^{2H(t/2^j)} \sigma^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

gdzie **wykładnik H został tutaj uzależniony od czasu** (czyli od kroku procedury). Rozwiązując powyższe równanie na niewiadomą γ_j^2 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \gamma_j^2(t) &= \frac{1}{2^{2H(t/2^j)j}} \left[1 - 2^{2[H(t/2^j) - H(t/2^{j-1})]j + 2H(t/2^{j-1}) - 2} t^{2[H(t/2^{j-1}) - H(t/2^j)]} \right]^{1/2} \\ &\times t^{2[H(t/2^j) - H(t)]}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Jak widać, współczynnik skali nie ma teraz charakteru lokalnego zależąc od różnic wykładników Höldera zarówno w kolejnych chwilach jak też chwili aktualnej i początkowej. Powyższy wzór stanowi uogólnienie, odpowiadającego mu, dla fraktalnego ruchu Browna, gdyż dla niezależnego od czasu wykładnika H przechodzi jak trzeba w (2.21). Oczywiście, dla czasu $t=1$ (co zwykle przyjmuje się w literaturze przedstawiającej ten algorytm) ma miejsce uproszczenie wyrażenia (2.32) do postaci, w której formalnie rzecz biorąc nie jest już widoczna zależność od t .

2.8.2 Estymacja ciągłej funkcji Höldera

Kolejne zadanie jakie staje przed nami to **znalezienie metody pozwalającej wyestymować funkcję Höldera, dysponując multifrakalnym szeregiem czasowym**. Od razu dodajmy, że funkcja ta będzie liczona w ramach przybliżenia traktującego ją jak funkcję przedziałami stałą. Wtedy, w każdym z tych przedziałów mamy, *de facto*, do czynienia z wykładnikiem Hursta (na ogół innym w każdym z przedziałów). Wprawdzie wykładnik Hursta wyznaczaliśmy już wcześniej (patrz rozdz.2.2) za pomocą metody R/S - tutaj (dla odmiany) skorzystamy z relacji pomiędzy wariancją procesy gaussowskiego a jego średnią wartością absolutną, słusznej dla asymptotycznie długiego czasu t

$$\langle \delta X(t)^2 \rangle = \frac{\pi}{2} \langle |\delta X(t)| \rangle^2. \quad (2.33)$$

Relacja ta, stanowiąca prostą odmianę twierdzenia fluktuacyjno-dyssypacyjnego, jest także prawdziwa dla fraktalnego szumu gaussowskiego (wtedy, zgodnie z naszymi wcześniejszymi oznaczeniami $\delta \equiv \Delta$).

Przypuśmy zatem, że poszukujemy wartości wykładnika Höldera w jakiejś chwili czasu $0 < t' < t$. W pierwszym etapie należy zdyskretyzować otoczenie chwili t' (która jest asymptotycznie odległą) - niech krokiem dyskretyzacji będzie $\Delta t \ll \delta t \ll t$ przyjmując, że właśnie w tym otoczeniu wykładnik Höldera jest (z dobrym przybliżeniem stały). Otoczenie to jest następującym przedziałem czasu: $[t' - n\delta t/2, t' + n\delta t/2]$, gdzie $T = n\delta t$ określa jego wielkość. Należy go tak wybierać, aby zmienność funkcji Höldera była w nim niewielka, czyli aby funkcja Höldera była co najwyżej wolnozmienna tzn. $Span(H)/H \ll 1$ (gdzie $Span(H)$ określa rozpiętość wykładnika Hursta w przedziale $[t' - n\delta t/2, t' + n\delta t/2]$) oraz aby $n \gg 1$.

W drugim etapie wyznaczamy estymatę średniej wartości absolutnej szumu we wspomnianym otoczeniu chwili t'

$$\overline{|\delta X(t')|} = \frac{1}{n} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} |\delta X(t' - j\delta t/2)|. \quad (2.34)$$

Następnie, korzystając z (2.33) i pamiętając, że

$$\langle \delta X(t)^2 \rangle = const (\delta t)^{2H}. \quad (2.35)$$

(patrz wyrażenie (1.10) w rozdz.1.2) otrzymujemy, że

$$2H(t') \ln(\delta t) + \ln const = 2 \ln \overline{|\delta X(t')|} + \ln(\pi/2). \quad (2.36)$$

W trzecim etapie usuniemy nieznaną stałą $\ln const$, czyli wyprowadzimy końcowy wzór, z którego wyznaczamy lokalny wykładnik $H(t')$. W tym celu należy powtórzyć oba etapy dla takiej samej wielkości otoczenia T ale innej wartości n , np. może ona wynosić m i być o czynnik mniejsza od poprzedniego n . Z (2.36) otrzymujemy ostatecznie, że

$$H(t') = \frac{\ln \left(\frac{|\overline{\delta_n X(t')}|}{|\overline{\delta_m X(t')}|} \right)}{\ln(m/n)}, \quad (2.37)$$

gdzie δ_n oznacza dyskretyzację otoczenia t' z krokiem T/n (analogicznie δ_m). Jak widać, wykładnik Höldera $H(t')$ ma, jak należało oczekiwać, strukturę fraktalną.

Dodajmy, że wykładnik Hursta można także obliczyć analogicznie, korzystając bezpośrednio z (nieobciążonej) estymaty dyspersji

$$\left(\overline{[\delta X(t')]^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} [\delta X(t' - j\delta t/2)]^2 \right)^{1/2}, \quad (2.38)$$

którą należy podstawić do wzoru (2.37) zamiast znajdujących się tam obu estymat wartości absolutnych.

Rozszerzenie tego algorytmu na sytuację nieciągłej funkcji Höldera, czyli na uogólniony multifraktalny ruch Browna, jest natychmiastowe - wystarczy rozważać otoczenia pomiędzy punktami nieciągłości i do nich stosować powyższy algorytm.

Część III

Modele ekonometryczne z długookresową zależnością

Rozdział 3

Ekonometryczny model ARFIMA

3.1 Fraktalny ruch Browna a ekonometryczny model ARFIMA

Ekonometryczny model ARFIMA (p,d,q) (ang. *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (p,d,q)) jest ściśle związany z ułamkowym ruchem Browna, stanowiąc uogólnienie popularnych modeli typu ARIMA (p,d,q) (ang. *Autoregressive Integrated Moving Average* (p,d,q)) na ułamkowe wartości parametru d [6, 11]. Modele ARFIMA (p,d,q) stanowią narzędzie dobrze opisujące procesy ekonomiczne, w których występuje długo-okresowa pamięć (zależność). W dalszym ciągu (celem lepszego zrozumienia istoty rzeczy) rozważamy najprostszą wersję modelu, czyli taki, dla którego p = q = 0.

3.1.1 Model ARFIMA (0,d,0)

Model ARFIMA (0,d,0) jest procesem stochastycznym $Y(t)$ zdefiniowanym za pomocą następującego fraktalnego, stochastycznego równania różnicowego

$$\Delta_{\tau}^d Y(t) = \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

gdzie operator fraktalnego różnicowania Δ_{τ}^d rzędu (rzeczywistego a nie tylko naturalnego) d i kroku dyskretyzacji τ działający na dowolny proces $Y(t)$ jest dany w postaci

$$\Delta_{\tau}^d Y(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{d}{j} Y(t - j\tau), \quad (3.2)$$

przy czym

$$(-1)^j \binom{d}{j} \stackrel{\text{def.}}{=} (-1)^j \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d+1-j)} = \frac{1}{\Gamma(-d)} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)} = \binom{j-d-1}{j}, \quad (3.3)$$

natomiast ε_t jest szumem gaussowskim tzn. szumem o znikającej wartości oczekiwanej, jednostkowej wariancji i zerowej kowariancji (czyli szumem δ -skorelowanym); w dalszym ciągu przyjmujemy $\tau = 1$ i pomijamy wszędzie tam, gdzie pełni rolę indeksu (co upraszcza ale nie zmniejsza ogólności uzyskanych wyników).

Można wykazać, że dla d będącego liczbą naturalną sumowanie w (3.2) rozciąga się tylko do d . W takiej sytuacji operator Δ^d jest zwykłym operatorem wstecznego różnicowania rzędu d ; w szczególnym przypadku $d = 1$ ten operator fraktalnego różnicowania przechodzi w zwykły operator wstecznego różnicowania (rzędu pierwszego)

$$\Delta Y(t) = Y(t) - Y(t - \tau) = (1 - L)Y(t) \quad (3.4)$$

gdzie L jest operatorem opóźnienia o $\tau = 1$; w takiej sytuacji równanie (3.1) przechodzi w stochastyczne równanie różnicowe dyskretnego (w czasie) ruchu Browna bez dryfu.

Równanie (3.1) można rozwiązać dzięki temu, że operator fraktalnego różnicowania daje się odwrócić, zatem

$$Y(t) = \Delta^{-d} \varepsilon_t, \quad (3.5)$$

gdzie operator odwrotny [15]

$$\Delta^{-d} \varepsilon_t \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-d}{j} \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+d-1}{j} \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \quad (3.6)$$

tzn.

$$c_j \stackrel{\text{def.}}{=} \binom{j+d-1}{j} = (-1)^j \binom{-d}{j}. \quad (3.7)$$

Jak widać, **poszukiwane rozwiązanie jest średnią ruchomą (krocząca) zawierającą całą historię procesu**, sterowanego tylko zwykłym szumem gaussowskim.

Korzystając z asymptotycznej postaci stosunku dwóch funkcji gamma Eulera

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} \approx z^a, \quad |arg(z+a)| < \pi, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

(przy czym rozbieżność $|z|$ można rozumieć w sensie $|z| \gg 1$), wyrażenie (3.5) można przedstawić (z dokładnością do pierwszych wyrazów) w postaci:

$$Y(t) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(d)} \frac{1}{j^{1-d}} \varepsilon_{t-j\tau}, \quad (3.9)$$

gdzie współczynniki c_j zanikają potęgowo z j , co usprawiedliwia konieczność sumowania aż do nieskończoności. I odwrotnie, jeżeli z analizy szeregu czasowego wynika, że współczynniki autoregresji maleją w czasie potęgowo to jako tzw. zerową hipotezę (ang. *null hypothesis*) można przyjąć model ARFIMA (p,d,q) tym bardziej, że jest on stacjonarny.

Jak, praktycznie rzecz biorąc, zrealizować sumowanie szeregu wolnozbieżnego do nieskończoności? Od pozytywnej odpowiedzi na to pytanie zależy znaczenie modelu ARFIMA(p,d,q). Powracamy do tego pytania w rozdz.3.1.4, gdzie rozwiązania dostarcza algorytm Durbin-Levinsona.

3.1.2 Model ARFIMA(p,d,q)

Dodajmy dla kompletności rozważań, że **w ogólności model ARFIMA (p,d,q) można zdefiniować następująco [16]:**

$$\Phi_p(L) Y(t) = \Theta_q(L) \Delta^{-d} \varepsilon_t, \quad (3.10)$$

gdzie operator opóźnienia o czas $\tau = 1$ jest postaci $L \stackrel{\text{def.}}{=} 1 - \Delta$, natomiast wielomiany operatorowe

$$\Phi_p(L) \stackrel{\text{def.}}{=} 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \quad (3.11)$$

oraz

$$\Theta_q(L) \stackrel{\text{def.}}{=} 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q, \quad (3.12)$$

przy czym $\phi_j, j = 1, \dots, p$ a $\theta_j, j = 1, \dots, q$, są rzeczywistymi współczynnikami, odpowiednio, pierwszego i drugiego wielomianu.

W dalszym ciągu zajmujemy się już tylko procesem ARFIMA (0,d,0).

3.1.3 Związek pomiędzy procesem ARFIMA a ułamkowym szumem gaussowskim

Wykażemy teraz, że **proces ARFIMA (0,d,0) ma funkcję autokorelacji taką samą jak ułamkowy szum gaussowski o wykładniku Hursta $H = d + 1/2$, $-1/2 \leq d \leq 1/2$; ten warunek ograniczający dla rzędu d wynika z ograniczenia wykładnika Hursta ($0 \leq H \leq 1$).**

Rozważmy w tym celu funkcję autokorelacji

$$\langle Y(i) Y(i+h) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j c_{j+h}; \quad (3.13)$$

taka postać tej funkcji wynika bezpośrednio z braku kowariancji gaussowskiego szumu ε_t . Jak widać, proces $Y(t)$ jest stacjonarny (w szerszym sensie) tzn. jego kowariancja jest niezależna od czasu i . Pozwala to stosować twierdzenie Wienera-Chinczina, czyli np. wyznaczyć funkcję autokorelacji jako odwrotną transformatę Fouriera widma mocy dla tego procesu. Takie podejście jest łatwiejsze od obliczenia funkcji korelacji wprost z (3.13). Zarysujemy tutaj tę dwuetapową drogę postępując za [6, 15].

I etap: wyznaczenie widma mocy

Zauważmy, że proces ARFIMA (0,d,0) dany równaniem (3.5) jest konwolucją (dyskretną w czasie) zatem, po przetransfourierowaniu do przestrzeni częstości f przechodzi w zwykły iloczyn

$$\tilde{Y}(f) = \tilde{c}(f) \tilde{\varepsilon}(f), \quad (3.14)$$

gdzie $\tilde{Z} \equiv Z^{\mathcal{F}}$ oznacza transformatę Fouriera funkcji Z . Stąd (po wykorzystaniu własności δ -skorelowanego szumu gaussowskiego ε), widmo mocy

$$\begin{aligned} S(f) &= \langle |\tilde{Y}|^2 \rangle = |\tilde{c}(f)|^2 = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+d-1}{j} \exp(-\imath j f) \right|^2 = \left| [1 - \exp(\imath f)]^{-d} \right|^2 \\ &= \frac{1}{[2 \sin(f/2)]^{2d}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

stąd dla $f \rightarrow 0$ gęstość spektralna

$$S(f) \approx \frac{1}{f^{2H-1}} \quad (3.16)$$

rozbiega się potęgowo, tak jak fraktalny szum gaussowski (porównaj z wyrażeniem (1.11)). Warto podkreślić, że wszystkie formuły w (3.15) są ściśle.

II etap: wyznaczenie funkcji autokorelacji

Wykorzystując wspomniane twierdzenie Wienera-Chinczina oraz stosując odwrotną transformatę Fouriera do widma mocy danego ostatnią równością we wzorze (3.15) otrzymujemy [17], że dla $h \gg 1$:

$$\begin{aligned} \gamma(h) = \langle Y(i) Y(i+h) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(f) \cos(h f) df = \frac{1}{2^{2d} \pi} \int_0^{\pi} \sin^{-2d}(\phi) \cos(2h\phi) d\phi \\ &= (-1)^h \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d+h) \Gamma(1-d-h)} \\ &\approx C_d h^{2d-1} = \frac{C_d}{h^{2-2H}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie współczynnik $C_d = \frac{\sin(\pi d)}{\pi} \Gamma(1-2d)$. Jak widać, funkcja autokowariancji ma takie samo zachowanie asymptotyczne jak ta dla fraktalnego szumu gaussowskiego (patrz (1.9), przyjmując $t = h$ oraz $d = H - 1/2$). Przy okazji, z trzeciej równości otrzymujemy kładąc $h = 0$, że

$$\langle Y(t)^2 \rangle = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)^2}, \quad (3.18)$$

czyli ograniczoną wariancję procesu $Y(t)$ niezależną od czasu t (tzn. proces stacjonarny o czym mówiliśmy dyskutując wyrażenie (3.13)).

Rozważania przeprowadzone w tym rozdziale pokazują, że proces ARFIMA (0,d,q) dla asymptotyczne długiego czasu nie jest niczym innym jak szumem ułamkowego ruchu Browna, czyli ułamkowym szumem gaussowskim, omawianym już przez nas w rozdz.1.2.

3.1.4 Algorytm Durбина-Levinsona symulacji procesu ARFIMA(0,d,q)

Symulację procesu $Y(t)$ o zerowej wartości oczekiwanej i autokowariancji danej ostatnią równością w (3.17), można przeprowadzić za pomocą algorytmu **Durbina-Levinsona** [18]. Jest to kilkukrokowy algorytm pracujący na zasadzie rekurencji oraz indukcji zupełnej a zadanie długookresowej zależności funkcji autokorelacji od czasu pozwala mu ominąć problem sumowania do nieskończoności wolnozbieżnego szeregu określającego proces $Y(t)$ (patrz przybliżona równość (3.9)).

I krok: uzyskanie wartości początkowej procesu $Y(1)$

W tym wyjściowym kroku

- 1) generowane są δ -skorelowane szumy gaussowskie ε_j , $j \geq 1$, stanowiące ciąg niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie $N(0, 1)$.
- 2) Wprowadzana jest początkowa wariancja $v_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma(0)$ a następnie definiowana jest wyjściowa wartość procesu

$$Y(1) = \sqrt{v_0} \varepsilon_1. \quad (3.19)$$

Teraz można przystąpić do znalezienia $Y(2)$.

II krok: symulacja $Y(2)$

Najpierw definiowane są:

- 3) współczynnik $w_{1,1} \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma(1)/v_0$
- 4) a następnie kolejna wariancja $v_1 = v_0 (1 - w_{1,1})^2$

Dysponując tymi wielkościami można zbudować

$$Y(2) = w_{1,1} Y(1) + \sqrt{v_1} \varepsilon_2 \quad (3.20)$$

Kolejny krok pozwala wysymulować $Y(n)$ dla dowolnej chwili $n \geq 2$.

III krok: symulacja komputerowa procesu $Y(n)$ dla dowolnej chwili $n \geq 3$

Wprowadźmy najpierw następujące reguły rekurencyjne dla $n \geq 2$:

- 5) określające współczynnik $w_{n,n} = [\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} w_{n-1,j} \gamma(n-j)] / v_{n-1}$ oraz współczynniki $w_{n,j} = w_{n-1,j} - w_{n,n} w_{n-1,n-j}$, dla $j < n$,
- 6) wyznaczające wariancje¹ $v_n = v_{n-1} (1 - w_{n,n}^2)$.

¹Proszę zauważyć, że w pracy [6] wystąpił błąd w wyrażeniu na v_n .

Proces $Y(t)$ symuluje się (krok po kroku) dzięki następującej rekurencji:

$$Y(n+1) = w_{n,1}Y(n) + \dots + w_{n,n}Y(1) + \sqrt{v_n}\varepsilon_{n+1}, \quad (3.21)$$

skąd np.:

$$Y(3) = w_{2,1}Y(2) + w_{2,2}Y(1) + \sqrt{v_2}\varepsilon_3, \quad (3.22)$$

przy czym $Y(1)$ i $Y(2)$ mamy z dwóch poprzednich kroków.

Można sprawdzić (rachunek dla większych wartości n jest prosty ale żmudny), że uzyskany w ten sposób proces spełnia (tak jak należy) pierwszą równość w (3.17). Na przykład, podstawiając (3.19) i (3.20) do (3.17) i korzystając z definicji współczynnika $w_{1,1}$ (podanej w II kroku), łatwo otrzymuje się, że

$$\langle Y(1)Y(2) \rangle = \sqrt{v_0} \langle \varepsilon_1 (w_{1,1}\sqrt{v_0}\varepsilon_1 + \sqrt{v_1}\varepsilon_2) \rangle = w_{1,1}v_0 = \gamma(1). \quad (3.23)$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} \langle Y(1)Y(3) \rangle &= \sqrt{v_0} \langle \varepsilon_1 (w_{2,1}Y(2) + w_{2,2}Y(1) + \sqrt{v_2}\varepsilon_3) \rangle \\ &= \sqrt{v_0} \langle \varepsilon_1 (w_{2,1}w_{1,1}Y(1) + w_{2,2}Y(1)) \rangle \\ &= v_0 (w_{2,2} + w_{2,1}w_{1,1}) = v_0 [w_{2,2} + w_{1,1}^2(1 - w_{2,2})] \\ &= v_0 [w_{2,2}(1 - w_{1,1}^2) + w_{1,1}^2] \\ &= \gamma(2) - w_{1,1}\gamma(1)\frac{v_0(1 - w_{1,1}^2)}{v_1} + v_0w_{1,1}^2 = \gamma(2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

choć tym razem rachunek jest nieco dłuższy.

Podsumowując ten paragraf można stwierdzić, że symulacje komputerowe procesu ARFIMA(0,d,0) służą m.in.:

- do opisu szczególnych procesów posiadających długą pamięć,
- do testowania różnych metod wyznaczania wykładnika Hursta a stąd rzędu pochodnej ułamkowej (patrz rozdz.3.2),
- jako punkt wyjścia dla zastosowania bardziej złożonego modelu ARFIMA(p,d,q) (patrz rozdz.3.1.2)).

3.2 Porównanie metod wyznaczania rzędu pochodnej ułamkowej

W powszechnym użyciu jest przynajmniej dziewięć metod² otrzymywania wykładnika Hursta [6], czyli rzędu pochodnej ułamkowej z danego szeregu czasowego. W niniejszym rozdziale omawiamy przykładowo dwie spośród nich:

²Na przykład, najpopularniejszą z metod i historycznie pierwszą, czyli metodę R/S , omówiliśmy już w rozdz.2.2.

- jedną, która wydaje się być najprostszą, opartą na periodogramie i
- drugą, która wydaje się być szczególnie dokładną - chodzi tutaj o metodę opartą na estymatorze Whittle'a.

3.2.1 Metoda periodogramowa

Metoda ta opiera się na obserwacji, że widmo mocy $S(f)$ można przybliżać w następujący sposób [2]:

$$S(f) \approx S_{est}(f) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{j=1}^N Y(j) \exp(ijf) \right|^2, \quad (3.25)$$

gdzie $\{Y(j)\}_{j=1}^N$ jest szeregiem czasowym (empirycznym albo symulowanym). Oczywiście, przybliżenie to jest tym lepsze im liczba wyrazów szeregu, N , jest większa. Tym samym, prawa strona powyższego wyrażenia jest estymatorem, $S_{est}(f)$, gęstości spektralnej $S(f)$ zwanym periodogramem.

Jak wiadomo, w przypadku występowania długookresowej pamięci, periodogram skaluje się z częstotliwością f dla niskich częstotliwości jak f^{1-2H} (patrz rozdz.1.2). Dlatego, w skali $\log - \log$ poszukiwany wykładnik $1 - 2H$ można wyznaczyć na drodze regresji liniowej, jako wartość współczynnika kierunkowego prostej. W praktyce używa się odpowiednio zmodyfikowanej metody periodogramowej zwiększającej liczebność zbioru niskich częstotliwości.

3.2.2 Metoda estymatora Whittle'a

Estymator Whittle'a jest oparty na periodogramie - używa on następującej, względnej wielkości odchylenia:

$$F(f; \xi) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_{est}(f) - S(f; \xi)}{S(f; \xi)} df = Q(f) - 2\pi, \quad (3.26)$$

gdzie wielkość względna

$$Q(f; \xi) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_{est}(f)}{S(f; \xi)} df, \quad (3.27)$$

przy czym tutaj $S(f; \xi)$ oznacza teoretyczną gęstość spektralną zależną od wektora parametrów ξ (w szczególności wektor może być jednoskładnikowy), który teraz został ujawniony. W metodzie tej wielkość $F(f, \xi)$, a tym samym wielkość $Q(f, \xi)$, jest minimalizowana względem parametrów ξ skąd otrzymujemy poszukiwane wartości najlepszych parametrów. Metoda ta jest ogólna i może być stosowana do różnych procesów; w przypadku procesu ARFIMA(0,d,0) sytuacja jest jednoparametrowa - możemy wybrać $\xi = d$ albo $\xi = H$.

Na rys.3.1 podano *benchmark* dziewięciu najczęściej używanych metod wyznaczania wykładnika Hursta uzyskany na bazie niezależnych 50 symulacji algorytmem Durбина-Levinsona

szeregu czasowego (ułamkowego szumu gaussowskiego) składającego się z 10 000 elementów. Przez \hat{H} oznaczono tam (siłą rzeczy, przybliżoną) wartość nominalnej wartości wykładnika Hursta H , natomiast³

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \left(H_k - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K H_k \right)^2 \quad (3.28)$$

i

$$MSE = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (H_k - H)^2 \quad (3.29)$$

definiują jego średnie odchylenie kwadratowe (wariancję) oraz średni błąd kwadratowy (liczone po 50-cio elementowym zespole). Z zestawienia wynika, że metoda oparta na estymatorze Whittle'a jest najlepsza, ponieważ daje \hat{H} najbliższe H i najdokładniejsza, gdyż jej błędy $\hat{\sigma}^2$ i MSE są najmniejsze.

³W pracy [6] podano błędny wzór na estymatę odchylenia standardowego $\hat{\sigma}^2$.

Estimation method		Nominal H									
		FGN					S-Plus FARIMA(0,d,0)				
		0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	.6	.7	.8	.9	
Variance	\hat{H}	.495	.588	.687	.772	.844	.591	.686	.773	.840	
	$\hat{\sigma}$.026	.027	.024	.022	.031	.031	.036	.028	.032	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.026	.029	.027	.036	.063	.031	.038	.039	.068	
DiffVar	\hat{H}	.483	.601	.694	.779	.878	.593	.686	.780	.872	
	$\hat{\sigma}$.057	.060	.077	.059	.076	.061	.071	.071	.070	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.059	.059	.076	.062	.079	.061	.072	.073	.075	
Absolute	\hat{H}	.497	.595	.700	.795	.896	.594	.698	.797	.888	
	$\hat{\sigma}$.028	.028	.024	.028	.049	.033	.040	.037	.040	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.028	.028	.023	.028	.049	.033	.039	.037	.041	
Higuchi	\hat{H}	.499	.595	.702	.795	.896	.596	.698	.797	.887	
	$\hat{\sigma}$.027	.027	.024	.028	.049	.032	.040	.037	.041	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.027	.027	.024	.028	.049	.032	.040	.037	.042	
Var. of Residuals	\hat{H}	.491	.589	.686	.782	.884	.583	.677	.772	.865	
	$\hat{\sigma}$.012	.015	.014	.018	.016	.016	.016	.017	.017	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.015	.019	.020	.026	.022	.023	.028	.033	.039	
R/S	\hat{H}	.535	.609	.687	.766	.821	.614	.688	.760	.823	
	$\hat{\sigma}$.023	.024	.020	.024	.027	.023	.022	.022	.026	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.042	.025	.024	.042	.083	.027	.025	.046	.081	
Periodogram	\hat{H}	.501	.601	.709	.812	.911	.609	.715	.816	.905	
	$\hat{\sigma}$.032	.029	.033	.025	.028	.039	.033	.031	.028	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.032	.029	.034	.028	.030	.039	.034	.035	.028	
Modified Periodogram	\hat{H}	.482	.595	.690	.796	.896	.598	.699	.808	.896	
	$\hat{\sigma}$.062	.048	.044	.058	.048	.051	.053	.049	.052	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.064	.048	.044	.057	.048	.051	.052	.049	.051	
Whittle	\hat{H}	.501	.601	.699	.800	.900	.601	.700	.800	.897	
	$\hat{\sigma}$.006	.006	.005	.007	.007	.008	.007	.009	.007	
	$\sqrt{\text{MSE}}$.006	.006	.005	.007	.007	.008	.007	.009	.008	

Rysunek 3.1: *Benchmark* dziewięciu najczęściej stosowanych metod wyznaczania wykładnika Hursta. Widać, że metoda oparta na estymatorze Whittle'a jest najdokładniejszą. Zestawienie zaczerpnięto z pracy [6].

Rozdział 4

Symulacje komputerowe modeli średniej ruchomej oraz autoregresyjnych o nieskończonej wariancji

Od blisko dwóch dekad nieustannie wzrasta zainteresowanie modelowaniem procesów typu ARMA (ang. *Autoregressive Moving Average*), które przejawiają dłuookresową (długoczasową, długozasięgową) pamięć [18]. Wynika to z faktu, że coraz częściej mamy do czynienia (nie tylko w finansach czy ogólniej w ekonomii) z dodatnim sprzężeniem zwrotnym zawartym w szeregach czasowych, które może prowadzić do gwałtownie, wręcz wybuchowo narastających a także nagle opadających zbczoy lokalnych pików.

W niniejszym rozdziale zajmujemy się modelami generowanymi przez procesy niegaussowskie a dokładniej przez stochastyczne zmienne losowe podlegające stabilnemu rozkładowi Pareto-Lévy'ego. Rozkład ten posiada następujące własności, z których korzystamy w dalszym ciągu:

$$\langle |Y(t)|^\delta \rangle = \begin{cases} \infty & \text{dla } \delta \geq \alpha \\ < \infty & \text{dla } \delta < \alpha, \end{cases} \quad (4.1)$$

a stąd

- wariancja $Var[Y(t)] = \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy dla $0 < \alpha < 2$ oraz
- wartość oczekiwana $\langle Y(t) \rangle < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $1 < \alpha < 2$,

z których korzystamy w dalszym ciągu.

4.1 Kluczowe twierdzenia oraz definicja i własności procesu

Podamy teraz (bez dowodu) kluczowe twierdzenie pozwalające zdefiniować (w kolejnym kroku) liniowy proces o nieskończonej wariancji.

Twierdzenie III.1 (Zbieżność absolutna "ważonego" szeregu czasowego)

Niech dany będzie ciąg $\{\varepsilon_t\}$ niezależnych zmiennych losowych posiadających identyczny rozkład (ang. *independent identically distributed variables*, iid) - w tym przypadku jest to rozkład Pareto-Lévy'ego o wykładniku $0 < \alpha < 2$. Ponadto, jeżeli $\{w_j\}$ jest ciągiem współczynników (niekoniecznie rzeczywistych) posiadających, dla

$$\delta = \begin{cases} \alpha & \text{gdy } \alpha < 1 \\ 1 & \text{gdy } \alpha \geq 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

następującą własność zbieżności:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |w_j|^\delta < \infty, \quad (4.3)$$

wówczas, nieskończony szereg

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j \varepsilon_{t-j}, \quad (4.4)$$

jest zbieżny absolutnie z prawdopodobieństwem równym 1, tzn. spełniona jest nierówność

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |w_j \varepsilon_{t-j}| < \infty \quad (4.5)$$

z prawdopodobieństwem równym 1.

Bibliografia

- [1] R.N. Mantegna and H.E. Stanley: *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge 2000 (istnieje polskie tłumaczenie).
- [2] R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume: *Fizyka statystyczna II. Mechanika statystyczna stanów nierównowagowych* (tłum. z ang.), Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 1991.
- [3] A.D. Wentzell: *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1980.
- [4] A. Bunde and S. Havlin: *A Brief Introduction to Fractal Geometry in Fractals in Science*, Springer-Verlag, Berlin 1995, pp. 1-25.
- [5] J.-P. Bouchaud: *Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk management*, Cambridge, 2000.
- [6] M.S. Taqqu, V. Teverowsky and W. Willinger: *Estimators for long-range dependence: an empirical study*, *Fractals* **3** (1995) 785-798.
- [7] S.V. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, C.-K. Peng, H.E. Stanley: *Fractals in Biology and Medicine: From DNA to the Heartbeat in Fractals in Science*, eds. A. Bunde and S. Havlin, Springer-Verlag, Berlin 1995.
- [8] H.A. Makse, S. Havlin, M. Schwartz and H.E. Stanley: *Method for generating long-range correlations for large systems*, *Phys. Rev. E* **53** (1996) 5445-5449.
- [9] J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H.A. Rego, S. Havlin, A. Bunde: *Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis*, *Physica A* 295 (2001) 441-454.
- [10] R. Kutner: *Hierarchical spatio-temporal coupling in fractional wanderings. (I) Continuous-time Weierstrass flights*, *Physica A* 264 (1999), 84-106.
- [11] A. Mastelarz-Kodzis: *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, Wydawnictwa Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2003.
- [12] R. Zieliński: *Metody Monte Carlo*, WNT, Warszawa 1970.
- [13] R. Zieliński: *Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych*, WNT, Warszawa 1972.

- [14] P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, 2004.
- [15] B.J. West and P. Grigolini: *Fractional Differences, Derivatives and Fractal Time Series in Applications of Fractional Calculus in Physics*, Ed. R. Hilfer, World Sci. Publ., Singapore 2000.
- [16] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu: *Stable Non-Gaussian Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, London 1994.
- [17] I.M. Rzyk i I.S. Gradsztejn: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964; 3.454.4.
- [18] J.P. Brockwell and R.A. Davis: *Time Series: Theory and Methods*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York 1991.
- [19] Oprogramowanie *Matlab*.
- [20] Oprogramowanie *Mathematica*.
- [21] R. Nowak: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2002.