

WPROWADZENIE DO EKONOFIZYKI:
NIEGAUSSOWSKIE PROCESY STOCHASTYCZNE
ORAZ NIEDEBYE'OWSKA RELAKSACJA W REALU.
*Elementy teorii ryzyka rynkowego wraz z
elementami teorii zdarzeń ekstremalnych*

Ryszard Kutner

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Warszawa, czerwiec 2015 (wersja beta)

Materiał w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych bez pisemnej zgody autora

Spis treści

I	Wstęp	11
1	Motywacja	13
2	Zasadnicze pytania	17
2.1	Rys historyczny: rozkłady potęgowe	17
2.1.1	Skalowanie i log-periodyczność a bąble i krachy giełdowe	19
2.2	Kluczowe pytanie matematyczne	22
2.2.1	Niezbędne wyjaśnienia	24
2.2.2	Paradoks Petersburski i jego konsekwencje	26
2.3	Motywacja fizyczna	28
2.4	Relaksacja fraktalna	30
2.4.1	Rola pamięci w relaksacji	32
2.4.2	Spowolniona relaksacja na Warszawskiej GPW	33
2.5	Dynamika materiału lepko-sprężystego a relaksacja fraktalna	33
2.5.1	Model Zenera ciała stałego	34
2.6	Subdyfuzja fraktalna	36
II	Procesy gaussowskie	41
3	Ruch Browna, opalescencja krytyczna, błękit nieba, rozpraszanie krytyczne	43
3.1	Ruch Browna	43
3.2	Słów kilka o fraktalnym ruchu Browna	46
3.3	Zjawisko opalescencji krytycznej i zjawisko Tyndalla	46
3.4	Wstępne definicje	47
3.5	Pierwszy i drugi moment	48
3.6	Propagator	51
3.6.1	Dekompozycja propagatora	51
3.6.2	Rozkłady asymptotycznie gaussowskie	54
3.7	Proces Markowa - równanie Mistrza	55

3.8	Dyfuzja	58
3.8.1	Dyfuzja Ficka	60
3.9	Centralne twierdzenie graniczne raz jeszcze	60
3.10	Dyfuzja oraz unoszenie	61
3.10.1	Twierdzenie o fluktuacji i dyssypacji	65
3.10.2	Równanie ciągłości a liczba Avogadro - przełomowe doświadczenie Perrina	66
3.11	Równanie Fokkera-Plancka-Smoluchowskiego	69
3.12	Autokorelacje - złamanie Centralnego Twierdzenia Granicznego	71
3.12.1	Dyspersja a funkcja autokorelacji	72
3.13	CTG a zanik potęgowy: zderzenie dwóch światów	74
3.13.1	Rozkład Gaussa i rozkład potęgowy w jednym	75
3.13.2	Od rozkładu Gaussa do rozkładu logarytmiczno-normalnego	78
3.14	Łańcuchy multiplikatywne: rozkład logarytmiczno-normalny	79
3.14.1	Od rozkładu log-normalnego do potęgowego	82
3.14.2	Log-normalne oraz potęgowe dochody jednostek w społeczeństwie	83
3.14.3	Potęgowe dochody przedsiębiorstw	84
3.14.4	Stochastyczny proces multiplikatywny w obecności bariery	85
3.14.5	Model drabinowy dochodów gospodarstw domowych	87
3.14.6	Od równania Markowa do równania Fokkera-Plancka	88
3.14.7	Multiplikatywno-addytywny proces stochastyczny a proces multiplikatywny z odpychającą barierą	89
3.14.8	Równanie Langevina a rozkład potęgowy	90
3.14.9	Od nieliniowego równania Langevina do równania Fokkera-Plancka	92
4	Analiza portfelowa	97
4.1	Bańka kredytowa - przypowieść	97
4.2	Dwumianowy model dynamiki instrumentów finansowych	98
4.2.1	Od awersji do ryzyka do miary neutralnej względem ryzyka - podejście intuicyjne	99
4.2.2	Podstawowe idee i definicje: pierwszy krok na drzewku dwu- mianowym - istota problemu	101
4.2.3	Uogólnienie: dowolny krok na drzewku dwumianowym	104
4.2.4	Ryzyko fluktuacyjne strategii arbitrażowej	110
4.2.5	Strategia zabezpieczająca portfel	112
4.2.6	Korekta związana z wypłatą dywidendy	119

4.3	Procesy martyngałowe	120
4.3.1	Filtry	120
4.3.2	Warunkowe średnie ważone - martyngał	122
4.3.3	Reprezentacja martyngałowa procesów dyskretnych	127
4.4	Opcje jako zasadniczy instrument stymulujący rynek finansowy	131
4.4.1	Kontrakty terminowe	131
4.5	Ciągła w czasie wycena opcji - model Blacka-Scholesa a przewodnic- two cieplne	133
4.5.1	Od błędzenia na drzewie dwumianowym do modelu Blacka- Scholesa	134
4.5.2	Arbitrażowe drzewo dwumianowe i wycena opcji	136
4.5.3	Wycena europejskiej opcji kupna	138
4.5.4	Od dynamiki stochastycznej do formuły Blacka-Scholesa	142
4.5.5	Dynamika infinitezymalnej zmiany ceny opcji	143
4.5.6	Portfel pozbawiony ryzyka - równanie Blacka-Scholesa	144
4.5.7	Portfel pozbawiony ryzyka w modelu BS z punktu widzenia modelu dwumianowego	147
4.5.8	Równanie BS jako formalne równanie dyfuzji Ficka lub prze- wodnictwa cieplnego Fouriera	148
4.5.9	Formuła wyceny opcji kupna Blacka-Scholesa	150
4.5.10	Analiza wrażliwości modelu Blacka-Scholesa	153
4.5.11	Formalne własności modelu BS: spełnienie warunku brzego- wego (4.150)	165
4.5.12	Rozwiązanie równania (4.149)	165
4.5.13	Elementy rynku rzeczywistego - własności opcji kupna uwzględ- niające prowizję	168
4.5.14	Dochód posiadacza opcji sprzedaży	171

III Procesy niegaussowskie 175

5	Fraktale stochastyczne	177
5.1	Fraktale matematyczne a fraktale fizyczne	177
5.2	Fraktale przypadkowe	178
5.2.1	Ograniczone fraktale samopodobne	178
5.2.2	Paradoks graniczny - struktura prawie wszędzie pusta	181
5.2.3	Dolny wymiar samopodobieństwa	182
5.2.4	Gęstość struktury	182
5.2.5	Wymiar pudełkowy ograniczonych struktur fraktalnych	183
5.2.6	Nieograniczone fraktale samopodobne	184
5.3	Fraktale statystyczne	189
5.3.1	Ograniczone fraktale statystyczne	189

5.3.2	Różne sposoby defektowania struktur	190
5.4	Multifraktalność	191
5.4.1	Osobliwa gęstość niezmiennicza	192
5.4.2	Wymiary uogólnione Rényi'ego	195
5.4.3	Konstrukcja widma osobliwości	197
5.4.4	Związek multifraktalności z termodynamiką	198
5.5	Statystyczne struktury multifraktalne	198
5.5.1	Statystyczna kantoryzacja masy	201
5.6	Multifraktalna Analiza Fluktuacji	
	Detrendowanych	202
5.6.1	Związek funkcji fluktuacyjnej z sumą statystyczną	205
6	Transport dyspersyjny - doświadczenia Sharfe'a, Gilla i Pfistera	207
6.1	Błądzenie w czasie ciągłym	208
6.1.1	Podstawowe wielkości	208
6.1.2	Funkcja rozkładu czasów oczekiwania w obecności dryfu	211
6.1.3	Propagtor jednocząstkowy	212
6.1.4	Postać zamknięta propagatora	215
6.1.5	Uogólnione równanie mistrza	216
6.1.6	Pierwszy moment	216
6.1.7	Rola pierwszego oczekiwania oraz przelotu	217
6.1.8	Niejednorodne uogólnione równanie mistrza	218
6.2	Przypadkowe pułapkowanie	219
6.2.1	Ciągła funkcja rozkładu czasów oczekiwania	219
6.2.2	Wielkości pokrewne	222
6.2.3	Równanie skalowania	223
6.2.4	Rozkład Lévy'ego a rozkład Poissona	225
6.2.5	Średni czas oczekiwania	227
6.2.6	Oczekiwanie Weierstrassa–Mandelbrota	227
6.2.7	Dyskretna funkcja rozkładu czasów oczekiwania	228
6.2.8	Czasowe równanie skalowania	230
6.2.9	Gra petersburska - przypomnienie	232
6.3	Błądzenia fraktalne	232
6.4	Przeloty Weierstrassa	233
6.4.1	Definicje i interpretacje	233
6.4.2	Czynnik strukturalny przelotów Weierstrassa	239
6.4.3	Przestrzenne równanie skalowania	239
6.4.4	Renormalizacyjne rozwiązanie równania skalowania	242
6.4.5	Dyfuzja anomalna	243
6.4.6	Rzadkie, ekstremalne zdarzenia	246
6.4.7	Średnia po zespole statystycznym	248
6.4.8	Rozkład Pareto-Lévy'ego	249

6.5	Multifraktalne błędzenie w czasie ciągłym na gaussowskim amorficznym substracie	252
6.5.1	Nietermodynamiczna multifraktalność - pouczający przykład	252
6.5.2	Termodynamiczna funkcja rozdziału a multifraktalność	255
IV	CTRW a dyfuzja fraktalna	261
7	Wybrane elementy CTRW	263
7.1	Introduction and motivation	263
7.2	Basic elements of the biased Hierarchical Continuous-Time Random Flight	264
7.2.1	Scaling relation obeyed by the waiting-time distribution	268
7.2.2	Explicit asymptotic form of the waiting-time distribution	269
7.2.3	Asymptotic form of the propagator	270
7.2.4	Explicit asymptotic form of the first and second moments . . .	270
7.3	Błądzenia fraktalne	272
7.3.1	Błądzenie losowe w czasie fraktalnym a model dolinowy	272
7.3.2	Równanie dyfuzji fraktalnej Lévy'ego	274
V	Współczesna teoria oceny ryzyka rynkowego	277
8	Ryzyko w ujęciu tradycyjnym i nowoczesnym	279
8.1	Tradycyjna analiza poziomu ryzyka	280
8.1.1	Twierdzenia graniczne na giełdzie	283
8.1.2	Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne na NYSE	284
8.1.3	Stabilny, symetryczny rozkład Lévy'ego	286
8.2	Kolaps danych a Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne na NYSE	288
8.3	Statistics of extremes	289
8.3.1	Twierdzenie Graniczne Maksimów	291
8.3.2	Rozkład maksimów a rozkład bazowy - ogólna formuła	293
8.3.3	The Gumbel distribution versus the Fréchet one	295
8.3.4	Pictorial analysis of rank ordering	298
8.3.5	Generalized Extreme Value Theory	302
8.3.6	Concluding remarks	304
8.4	Nowoczesne podejście do oceny ryzyka	304

8.4.1	Zasadnicze pytania	306
8.4.2	Rachunek skumulowanych strat. Podejście dynamiczne w ramach formalizmu CTRW	308
8.4.3	Charakterystyczne przykłady	312
8.5	Podsumowanie tabelaryczne	319
8.5.1	Kanoniczny algorytm symulacji kwantyli - prawdopodobieństwo strat a VaR	319
8.5.2	Wybrane metody redukcji dyspersji	322
VI	Dodatki	325
A	Pochodna fraktalna dowolnego stopnia - definicja Riemanna Liouville'a	327
A.1	Podstawowe własności pochodnej fraktalnej	328
B	Obliczenie średniej nadwyżki $\langle \Delta n \rangle$	329
C	Metoda Punktu Siodłowego	331
D	Własności funkcji rozkładu czasów oczekiwania	333
E	Ścisła funkcja rozkładu czasów oczekiwania	335
F	Funkcja rozkładu czasów oczekiwania Weierstrassa-Mandelbrota	337
G	Użyteczne transformaty Laplace'a	341
H	Sferyczne przeloty Weierstrassa	343
H.1	Rozwiązanie regularne	344
H.2	Rozwiązanie singularne	345
H.2.1	Pełna postać rozwiązania singularnego	345
H.2.2	Bieguny i residua	347
I	Ścisły czynnik strukturalny dla jednowymiarowych przelotów Weierstrassa	349
J	Twierdzenie Abeliana i twierdzenie Tauberina	351

Dodatek A0: Wymiar Hausdorffa

Dodatek A01: Wymiar Hausdorffa a wymiar samopodobieństwa

Dodatek A02: Wymiar Hausdorffa a wymiar pudełkowy

Dodatek A2: Pułapki o skończonej głębokości

Dodatek C: Wykładnicza oraz potęgowa asymptotyka funkcji rozkładu

Część I

Wstęp

Rozdział 1

Motywacja

Niniejsza praca (aspirująca do miana podręcznika) jest roboczą wersją dwóch interdyscyplinarnych wykładów jakie prowadzę dla studentów nowopowstałej na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego specjalności pn.: **Metody fizyki w ekonomii (ekonofizyka)**. Pierwszy z nich nosi nazwę **Metody fizyki w ekonomii - wprowadzenie** drugi to **Niegaussowskie procesy stochastyczne w naukach przyrodniczych z elementami ekono- i socjofizyki**.

Zasadniczym celem tych wykładów jest ilościowa, staranna i systematyczna analiza wybranych, ważnych zagadnień z dziedziny rynków finansowych oraz gospodarek wolnorynkowych, prowadzona przez pryzmat modeli używanych do opisu zjawisk i procesów fizycznych. Jest to obiecujące podejście zwłaszcza, że bierzemy pod uwagę przede wszystkim modele dopuszczające występowanie zdarzeń ekstremalnych a nawet superextremalnych (czyli rzadkich), które (jak się wydaje) odgrywają coraz większą rolę także na rynkach finansowych i w gospodarkach wolnorynkowych. Innymi słowy, zajmujemy się tutaj przede wszystkim takimi modelami, które pełnią (lub mogą pełnić) dualną rolę: są stosowane zarówno w fizyce jak też (po reinterpretacji a często i uogólnieniu) do opisu zjawisk i procesów zachodzących na rynkach finansowych oraz w gospodarce makroskali. Prowadzi to do uściśnionej oraz pogłębionej interpretacji nie tylko wspomnianych zjawisk i procesów ekonomicznych ale także socjologicznych a w tym zwłaszcza typu bąbli i krachów giełdowych (D. Sornette: *Why Stock Markets Crash. Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2002, [1]). Tego typu podejście do ekonomii i socjologii mieści się w ramach wschodzących, interdyscyplinarnych dziedzin wiedzy potocznie zwanych, odpowiednio, ekonofizyką i socjofizyką.

Należy zaznaczyć, że w niniejszej pracy wykorzystujemy jako narzędzie matematyczne przede wszystkim niegaussowskie procesy stochastyczne, np. typu Lévy'ego, prowadzące do rozkładów prawdopodobieństwa posiadających ciężkie (pogrubione) ogony.

Pojęcie ciężkiego (pogrubionego, tłustego) ogona rozkładu prawdopodobieństwa [3, 7] jest najczęściej używanym w niniejszej pracy. Zdefiniujmy je tutaj, abyśmy od samego początku wiedzieli precyzyjnie o czym jest mowa. Zatem,

mamy do czynienia z pogrubionym ogonem rozkładu prawdopodobieństwa $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \exp(|x|)P(x) = \infty, \quad (1.1)$$

przy czym (bezwymiarowa) zmienna x może przyjmować zarówno wartości ciągłe jak i dyskretne. Innymi słowy, dany rozkład prawdopodobieństwa posiada ciężki ogon wtedy i tylko wtedy, gdy asymptotycznie zanika wolniej niż funkcja eksponens (rozkład wykładniczy); funkcja eksponens pełni tutaj rolę funkcji progowej. Zatem możemy powiedzieć, że dany rozkład prawdopodobieństwa nie posiada ciężkiego ogona wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (1.1) nie jest spełniony.

Aby przybliżyć ten warunek zauważmy, że obszerną klasę rozkładów posiadających pogrubione ogony tworzy np. klasa funkcji zanikających potęgowo. Warto też zdać sobie sprawę, że istnieją rozkłady posiadające tłusty ogon nie należące do wspomnianej klasy, np. rozkład logarytmiczno-normalny. Warunek (1.1) można nazwać mocnym, gdyż używa się także słabszego warunku definiującego (trudniejszego do analitycznego operowania), gdzie zamiast rozkładu $P(x)$ występuje jego rozkład skumulowany.

Należy podkreślić, że rozkłady i procesy gaussowskie (a w tym np. Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG)) traktowane są tutaj tylko jako niezbędny punkt odniesienia¹, gdyż są one niewystarczające do opisu otaczającej nas rzeczywistości. Tego typu podejście jest usprawiedliwione faktem, że procesy niegaussowskie mogą być nieergodyczne czyli np. mogą być rządzone właśnie przez zdarzenia rzadkie, stanowiące najprawdopodobniej podstawę zarówno wspomnianych bąbli i krachów giełdowych, jak też będące podstawą spowolnionej, niedebye'owskiej relaksacji foto-prądów w materiałach amorficznych, leżąc także u podstaw nieergodycznego chłodzenia laserowego stanowiącego przecież niezbędny etap doświadczalny prowadzący do uzyskania kondensatu Bosego-Einsteina (W.D. Phillips: *Laserowe chłodzenie i pułapkowanie atomów obojętnych*, Postępy Fizyki, Tom 49 (1998) 310-335, [4]; F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji: *Lévy Statistics and Laser Cooling. How Rare Events Bring Atoms to Rest*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002, [5]). Oczywiście, oznacza to konieczność zastąpienia dobrze znanego Centralnego Twierdzenia Granicznego przez tzw. Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne Lévy'ego-Chinczina dotyczące rozkładów stabilnych posiadających zarówno skończoną jak i nieskończoną wariancję.

Ponadto, wspomniana na wstępie interdyscyplinarność bazuje m.in. na obserwacji, że procesy stochastyczne za pomocą których staramy się opisać otaczającą nas rzeczywistość fizyczną bądź też ekonomiczno-socjologiczną (np. dynamika stochastyczna rozwoju populacji w obecności zewnętrznego źródła, rozprzestrzeniania

¹Mówimy tutaj o rozkładach i procesach gaussowskich w wąskim sensie, tzn. o takich, które spełniają CTG. Innymi słowy, dla których wariancja jest liniową funkcją czasu (dyskretnego lub ciągłego). Zatem, nie mamy tutaj na myśli np. Fraktalnego Ruchu Browna (FRB) - będzie jeszcze o tym mowa w dalszej części.

się epidemii, migracji ludności, opisująca ewolucję portfela inwestora giełdowego, itd, itp) mają często charakter multiplikatywno-addytywny tzn. zawierają zarówno szum multiplikatywny jak też szum addytywny (D. Sornette: *Linear stochastic dynamics with nonlinear fractal properties*, Physica A (1998) 295-314). Za pomocą tego typu procesów, wprowadzając odpowiednią konkurencję obu rodzajów szumu, można odtworzyć dla asymptotycznych wartości zmiennych losowych zarówno rozkład Gaussa (R.N. Mantegna, H.E. Stanley: "Ekonofizyka. Wprowadzenie", Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2001; [15]) jak też logarytmiczno-normalny (E.W. Montroll, M.F. Shlesinger: *On the wonderful world of random walks w Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastics to Hydrodynamics*", *Studies in Statistical Mechanics*, Vol.XI, eds. J.L. Lebowitz, E.W. Montroll, North-Holland, Amsterdam 1984; [16]) a zwłaszcza rozkład potęgowy (D. Sornette: *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*, Springer-Verlag, Berlin 2000; D. Sornette: "Multiplicative processes and power law", Physical Review E 57 (1998) 4811-4813; [17]), czyli rozkłady odgrywające zasadniczą rolę zarówno w naukach przyrodniczych jak też ekonomiczno-społecznych² (J.-P. Bouchaud, M. Potter: *Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001, [2]).

Do pracy dodaliśmy tytułem uzupełnienia rozdziały poświęcone materiałom lepko-sprężystym takim jak np. biopolimery, w których relaksacja deformacji zachodząca pod wpływem przyłożonego naprężenia jest opisana dynamiką fraktalną tzn. różnego rodzaju fraktalnymi równaniami relaksacji (Th. F. Nonnenmacher, Ralf Metzler: "Applications of Fractional Calculus Techniques to Problems in Biophysics" in "Applications of Fractional Calculus in Physics", ed. R. Hilfer, World Scientific, Singapore 2000). Jak się okazuje, rozwiązania takich równań oparte są na funkcjach H-Foxa, które posiadają własności interesujące z punktu widzenia rynków finansowych. Na przykład, zanikają asymptotycznie zgodnie z prawem potęgowym natomiast dla krótkich czasów zachowują się jak rozciągnięty eksponens. Pozwala to odtworzyć trendy (wznoszący i opadający) tworzące lokalne maksima szeregów czasowych dziennych indeksów giełdowych (M. Kozłowska, R. Kutner: "Dynamics of the Warsaw Stock Exchange index as analysed by the Mittag-Leffler function", DPG - Fruejahrstagung des Arbeitskreises Festkoerperphysik in conjunction with EPS - 21st General Conference of the Matter Division, Dresden, Germany 2006 [19]).

²Oczywiście, w naszych rozważaniach nie pominiemy rozkładów typu rozciągniętego eksponensa zarówno zmiennej losowej jak też jej logarytmu, które są także używane m.in. do opisu relaksacji w układach szklistych.

Rozdział 2

Zasadnicze pytania

2.1 Rys historyczny: rozkłady potęgowe

Historia rozkładu potęgowego a w tym Pareto-Lévy'ego jest interesująca i warto ją tutaj, jak sądzę, przytoczyć. Mianowicie, zaskoczenie może budzić fakt, że powszechnie uważa się iż rozkład potęgowy a dokładniej rzecz biorąc tego typu zależność została odkryta w świecie realnym dopiero w roku 1897 przez włoskiego ekonomistę i socjologa Vinifredo Pareto podczas gdy relaksacja potęgowa (czyli analogiczna zależność tyle tylko, że od czasu) została już zaobserwowana w roku 1729 przez fizyka i inżyniera B.G. Buelfingera, o czym jest mowa w rozdz.2.3. Co więcej, na początku drugiej połowy XIX w. francuski matematyk i fizyk baron Augustyn L. Cauchy wprowadził i analizował rozkład postaci,

$$p(x) \sim \frac{1}{1+x^2}, \quad (2.1)$$

zwany dzisiaj właśnie rozkładem Cauchy'ego lub lorentzianem od nazwiska holenderskiego fizyka Hendrika A. Lorentza, który pierwszy zastosował ten rozkład w spektroskopii do opisu kształtów linii widmowych i to pomimo jego nieskończonej wariancji. Rozkład odkryty przez Pareto jest niezwykle ważny chociażby ze względu na jego coraz liczniejsze zastosowania w różnych gałęziach nauki - od matematyczno-przyrodniczych po ekonomiczno-społeczne.

Pareto badał empirycznie wzrost zamożności jednostek w różnych społeczeństwach w okresach "pokoju społecznego" (tzn. w okresie braku wojen, rewolucji, krachów, etc.). Zauważył, że liczba jednostek $y(x)$, których dochód jest nie mniejszy od x daje się opisać, dla względnie dużych wartości dochodu, za pomocą rozkładu potęgowego postaci,

$$y(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}, \quad x > 0, \quad (2.2)$$

gdzie α jest jedynym (oprócz przedwykładniczego czynnika normalizującego) parametrem definiującym rozkład. Pareto wyznaczył empirycznie ten wykładnik - wyniósł on z dobrym przybliżeniem 1.5 dla tak różnych społeczeństw jak mieszkańcy

Anglii, Irlandii, Niemiec, Włoch a nawet Peru. Wzór (2.2) można wyrazić za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x) \sim 1/x^{1+\alpha}$

$$y(x) \sim \int_x^{x_{max}} dx' f(x') \sim \int_x^{x_{max}} dx' \frac{1}{x'^{1+\alpha}}, \quad (2.3)$$

gdzie $1 \ll x \ll x_{max}$ (tutaj, x_{max} jest maksymalnym możliwym do osiągnięcia dochodem jednostki); gęstość $f(x)$ jest miarą względnej liczby jednostek posiadających dochód równy dokładnie x . Zatem V. Pareto zaobserwował rozkład asymptotycznie potęgowy dla dodatnich x ,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1+\alpha}}. \quad (2.4)$$

Rozszerzenie tego rozkładu na ujemne wartości x oraz jego systematyczna analiza została opublikowana dopiero w roku 1926 przez matematyka francuskiego, Paula Lévy'ego oraz niezależnie przez angielskiego geofizyka L. Richardsona, który zastosował ten rozkład do opisu ruchu obiektów (tzw. pasywnych skalarów) w atmosferze w obecności turbulencji (A. Tsinober: "Variability of anomalous transport exponents versus different physical situations in geophysical and laboratory turbulence", w *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, Lecture Notes in Physics Vol.450, Springer-Verlag, Berlin 1995, pp.3-33). Należy zaznaczyć, że rozkład Pareto-Lévy'ego jest weryfikowany po dziś dzień. Na przykład, badania opublikowane w 2001 roku nad społeczeństwem Wielkiej Brytanii (A. Dragulescu, V.M. Yakovenko: "Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States", *Physica A* **299** (2001) 213-221) potwierdzają w całej rozciągłości obserwacje V. Pareto przy czym tutaj $\alpha = 1.90$ (gdzie błąd jest na drugim miejscu po przecinku) dla dochodu netto powyżej 100 *k£/year*. Byłoby wielce interesującym przeprowadzenie analogicznych badań nad społeczeństwami wschodzących rynków i gospodarek kapitalistycznych.

Oczywiście, oprócz badań nad zamożnością jednostek prowadzone były i są badania nad dochodami wielu państw. Badania te przeprowadził jako pierwszy, na podstawie zbiorczych danych uzyskanych z urzędów skarbowych, włoski ekonomista i socjolog C. Gini w roku 1922; stwierdził on, że dochody te podlegają (z dobrym przybliżeniem) prawom potęgowym o znacznie różniących się wykładnikach potęg.

Szczególnie interesujące były badania przeprowadzone pod koniec ubiegłego stulecia nad gospodarką japońską (K. Okuyama, M. Takayasu, H. Takayasu: "Zipf's law in income distribution of companies", *Physica A* 269 (1999) 125-131), które wykazały, że dochody przedsiębiorstw japońskich podlegają prawu potęgowemu Zipfa¹ (w zakresie blisko czterech dekad od dochodu ponad 10 milionów jenów do blisko 10⁵ milionów jenów - patrz rozdz.3.14.3). Co więcej, dochody przedsiębiorstw w ramach poszczególnych gałęzi gospodarki był tym lepiej opisywane prawem potęgowym im

¹Prawo potęgowe Zipfa jest asymptotycznie równoważne rozkładowi Cauchy'ego-Lorentza dla dodatnich x czyli zbudowane na nim skumulowane prawdopodobieństwo posiada długozasięgowy "ogon" zanikający z wykładnikiem 1.

bardziej dana gałąź uczestniczyła w grze wolnorynkowej czyli im mniej było w danej branży interwencjonizmu państwowego (przy czym wykładnik potęgi α zawiera się w przedziale $0.72 \leq \alpha \leq 1.13$ a jego konkretna wartość zmienia się od gałęzi do gałęzi). Na przykład, branża budowlana podlegająca niemal w pełni wolnej konkurencji daje się opisać prawem potęgowym o wykładniku $\alpha = 1.13$ w zakresie trzech dekad podczas gdy energetyka, podlegająca istotnej ochronie państwa, zachowuje się, paradoksalnie, w sposób trudny do opisan.

2.1.1 Skalowanie i log-periodyczność a bąble i krachy giełdowe

Zauważmy, że na przykład funkcja potęgowa $y(x)$ dana wzorem Pareto (2.2) spełnia następujące równanie skalowania²

$$y(\lambda x) = f(|\lambda|)y(x), \quad (2.5)$$

gdzie czynnik f skalujący funkcję $y(x)$ jest zależny od λ i (tutaj) dany wzorem

$$f(\lambda) = |\lambda|^\nu; \quad (2.6)$$

w dalszym ciągu zakładamy, że wykładnik ν może być zarówno dodatni jak i ujemny (gdyż zależy to od tego z jaką wielkością fizyczną mamy tutaj do czynienia). Należy podkreślić, że równanie skalowania (2.5) ma charakter ogólny i opisuje zachowanie tak różnych substancji jak np. magnetyki, stopy podwójne czy też gaz i ciecz w obszarze przemiany fazowej w pobliżu punktu krytycznego (zwanym dlatego obszarem skalowania lub obszarem krytycznym; M. Toda, R. Kubo, N. Saito: *Fizyka statystyczna I. Mechanika statystyczna stanów równowagowych*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1991, [6]). Jak uczy doświadczenie, w obszarze tym większość wielkości fizycznych (opisujących przemianę, oznaczmy je przez WF) zmienia się w zależności od temperatury T według prawa potęgowego³

$$WF \sim |T - T_c|^\alpha, \quad (2.7)$$

gdzie α nosi nazwę indeksu lub wykładnika krytycznego, który przybiera wartości uniwersalne (tzn. niezależne od rodzaju substancji) a T_c jest temperaturą krytyczną (która np. w przypadku przemiany fazowej ferromagnetyk-paramagnetyk nosi dodatkowo nazwę temperatury Curie).

²Dokładniej rzecz biorąc, równanie skalowania (2.5) dotyczy także rozkładu Pareto-Lévy'ego czyli rozkładu $y(x) \sim \frac{1}{|x|^\alpha}$, gdzie zmienna losowa x może przyjmować zarówno wartości ujemne jak i dodatnie a nie tylko dodatnie jak to ma miejsce dla rozkładu Pareto.

³Chodzi o to, że są też wielkości fizyczne takie jak np. ciepła właściwe, które mogą posiadać w punkcie krytycznym osobliwość logarytmiczną, np. tak jak to ma miejsce w dwuwymiarowym modelu Isinga; przemiany fazowe, w których to zachodzi nie poddają się w pełni klasyfikacji Ehrenfesta przemian fazowych (K. Huang: "Mechanika statystyczna", Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1978, [7]) chociaż pod wieloma względami (np. brak ciepła utajonego i ciągłości parametru porządku w funkcji temperatury) przypominają przemianę fazową drugiego rodzaju.

Zadajmy teraz pytanie o najogólniejszą postać rozwiązania singularnego równania skalowania (2.5). Łatwo sprawdzić, że funkcja postaci

$$y(x) = |x|^\alpha F\left(\frac{\ln |x|}{\ln |\lambda|}\right), \quad (2.8)$$

jest rozwiązaniem tego równania - jak się okazuje najogólniejszym (co wykażemy w dalszej części), przy czym $F(u)$ jest funkcją okresową argumentu u o okresie równym 1, natomiast wykładnik potęgi przybiera postać

$$\alpha = \frac{\ln f(\lambda)}{\ln |\lambda|}. \quad (2.9)$$

Podstawiając konkretną postać funkcji $f(\lambda)$ (tutaj daną wyrażeniem (2.6)) otrzymujemy, że $\alpha = \nu$.

Rozwiniemy teraz okresową funkcję $F(u)$ w szereg Fouriera,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\ln |x|}{\ln |\lambda|}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(2\pi i n \cdot \frac{\ln |x|}{\ln |\lambda|}\right) \\ &= c_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{c_0} \cos\left(\frac{2\pi n}{\ln |\lambda|} \cdot \ln |x|\right)\right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

przy czym współczynniki rozwinięcia c_n są tutaj dane w postaci

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du F(u) \exp(-2\pi i n u) = \int_0^1 du F(u) \cos(2\pi n u), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

gdzie dla uproszczenia założyliśmy, że $F(u)$ jest parzystą funkcją u a stąd każdy współczynnik rozwinięcia fourierowskiego jest parzystą funkcją n (tzn. $c_n = c_{-n}$) co zostało wykorzystane w drugiej równości w (2.10). Ponadto, ograniczamy się tutaj do rzeczywistej funkcji F co oznacza, że współczynniki c_n też są rzeczywiste⁴.

Stosując grupę renormalizacji wykażemy, że log-periodyczność jest obecna nie tylko w rozkładach opisujących statystyki zmiennych losowych, np. indeksów giełdowych, ale tkwi już w samych równaniach stochastycznych opisujących dynamikę tych zmiennych (D. Sornette, A. Johansen, J.-P. Bouchaud: *Stock Market Crashes, Precursors and Replicas*, J. Phys. I France 6 (1996) 167-175,[9]; D. Sornette and A. Johansen: *Large financial crashes*, Physica A 245 (1997) 411-422, [10]).

Na rys.2.1 przedstawiono notowania indeksu Dow Jones na Giełdzie Nowojorskiej (NYSE) przed październikiem 1929 roku czyli przed wielkim krachem na Wall Street - największym kryzysem giełdowym jaki dotknął świat, a w tym także Stany Zjednoczone Ameryki, w XX wieku. O głębokości tego kryzysu świadczy fakt, że w

⁴Parametr λ skalujący zmienną losową nie jest dowolny tylko dla dyskretnej relacji skalowania o czym będzie także mowa w dalszej części (D. Sornette: "Discrete scaling invariance and complex dimensions", Physics Reports **297** (1998) 239-270, [8]).

feralnym tygodniu: (otwarcie) środa 23 październik - (zamknięcie) wtorek 29 październik, indeks NYSE stracił ok. 30% swojej wartości⁵. Ponadto, dla porównania przedstawiono najlepsze dopasowanie rozwiązania singularnego (2.8) uwzględniające jedynie liniową log-periodyczność (tzn. uwzględniające w drugiej równości w (2.10), w występującym tam szeregu tylko pierwszy wyraz z $n = 1$), przy czym jako zmienną niezależną przyjęto teraz⁶

$$x \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot |t_c - t|, \quad (2.12)$$

gdzie $t(< t_c)$ jest czasem (liczonym w dniach) natomiast t_c jest dniem krachu (a jest tutaj, po prostu, stałą proporcjonalności). Innymi słowy, wzięto tutaj pod uwagę następującą, uproszczoną formułę teoretyczną dla czasu poprzedzającego dzień krachu t_c (czyli dla $t < t_c$)⁷

$$y(t_c - t) \approx A + B \cdot |t_c - t|^\alpha \cdot [1 + C \cos(\omega \ln |t_c - t| - \phi)], \quad (2.13)$$

gdzie zastosowano wygodniejsze oznaczenia $B = c_0 \cdot a^\alpha$, $C = 2c_1/c_0$, $\omega = 2\pi/\ln|\lambda|$, $\phi = -\omega \ln(a)$.

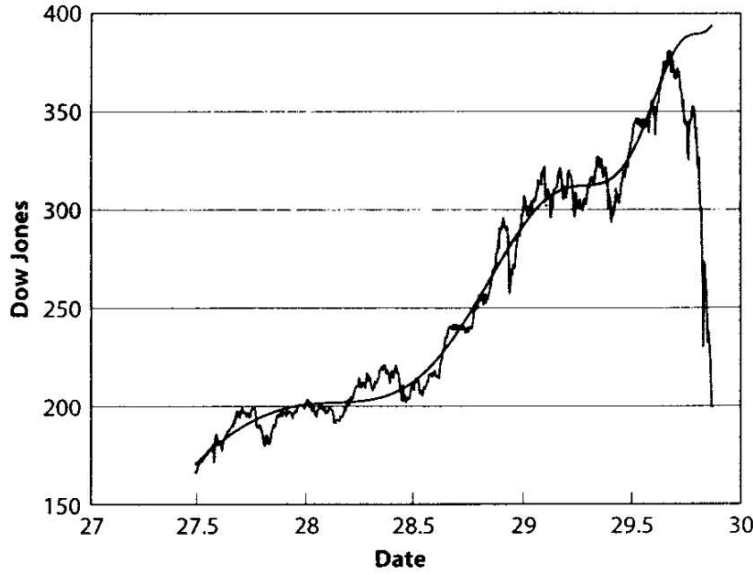
Jak widać, krach ten nastąpił tuż przed trzecim lokalnym maksimum tej krzywej - nie jest to jednak bąbel giełdowy w przeciwieństwie do sytuacji przedstawionej na rys.2.2, gdzie jest on wyraźnie widoczny w przebiegu indeksu giełdy w Kuala Lumpur (Malezja) w postaci ostrego, lokalnego maksimum bezpośrednio poprzedzającego krach o zupełnie innym kształcie niż wspomniane wcześniej. Właśnie tego typu kształt będzie dla nas w dalszym ciągu niezbędną sygnaturą bąbla giełdowego; ogólna definicja tzw. racjonalnego bąbla giełdowego pochodzi od Blancharda i Watsona (O.J. Blanchard: "Speculative bubbles, crashes and rational expectations", *Economics Letters* 3 (1979) 387-389, [13]; O.J. Blanchard, M.W. Watson: *Bubbles, rational expectations and speculative markets in Crisis in Economic and Financial Structure: Bubbles, Bursts, and Shocks*, ed. P. Wachtel, Lexington Books, Lexington, MA, [14]) i mówi tylko tyle, że jest to wzrost notowań akcji zachodzący w relatywnie krótkim okresie czasu (w stosunku do całego rozpatrywanego przedziału czasu), który znacznie odbiega od fundamentalnej wyceny akcji ale nadal mieści się w oszacowaniach wynikających z istniejących modeli, w przeciwieństwie do bąbli czysto spekulacyjnych.

Ze względu na olbrzymie znaczenie wyrażenia (2.13) w analizie technicznej notowań giełdowych, przedstawiamy na poniższych dwóch rysunkach zarówno zależność y od czasu jak też jego składowych: potęgowej i log-periodycznej.

⁵Należy zaznaczyć, że podobny kryzys zdarzył się np. w październiku 1987 roku w tygodniu od 14 (otwarcie) do 19 października (zamknięcie); na szczęście jego skutki nie były już tak dramatyczne jak w roku 1929.

⁶Oznacza to, że rozważamy teraz dynamiczne przemiany fazowe gdzie rolę temperatury pełni czas.

⁷Zauważmy, że data krachu uzyskana z dopasowania funkcji (2.13) do danych empirycznych może być nieznacznie większa od rzeczywistej daty gdyż dalszemu spadkowi indeksów może po prostu przeciwdziałać wstrzymanie obrotów na giełdzie.



Rysunek 2.1: Notowania indeksu Dow Jones na Giełdzie Nowojorskiej (NYSE) przed październikiem 1929 roku czyli przed wielkim krachem na Wall Street - największym kryzysem giełdowym jaki dotknął świat, a w tym także Stany Zjednoczone Ameryki, w XX wieku. Linia ciągłą oznaczono najlepsze dopasowanie rozwiązania singularnego (2.8) uwzględniające jedynie liniową log-periodyczność (tzn. uwzględniające w drugiej równości w (2.10) w występującym tam szeregu tylko wyraz z $n=1$). Optimalne wartości parametrów to: $A = 571$, $B = -267$, $C = -0.0536$, $\alpha = 0.45$, $t_c = 1930.22$, $\omega = 7.9$ oraz $\phi = 1.0$. Jak widać, krach nastąpił tuż przed trzecim lokalnym maksimum tej krzywej. (Rysunek zaczerpnięto z pracy A. Johansen, D. Sornette: "Critical Crashes", Risk 12 (1990) 91-94, [11]).

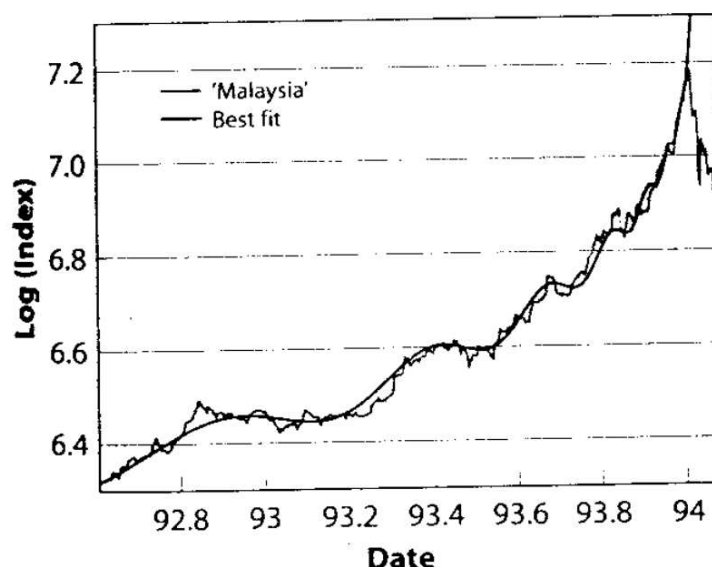
Poniżej zamieściliśmy trzy dodatkowe wykresy prezentujące rolę drugiej harmonicznej log-periodycznej poprawki danej wyrażeniem

$$\begin{aligned}
 y(t_c - t) &\approx A + B \cdot |t_c - t|^\alpha \times \\
 &\times [1 + C \cos(\omega \ln |t_c - t| - \phi) + C' \cos(2\omega \ln |t_c - t| - 2\phi)]
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

dla pierwszego maksimum na WIG-u.

2.2 Kluczowe pytanie matematyczne

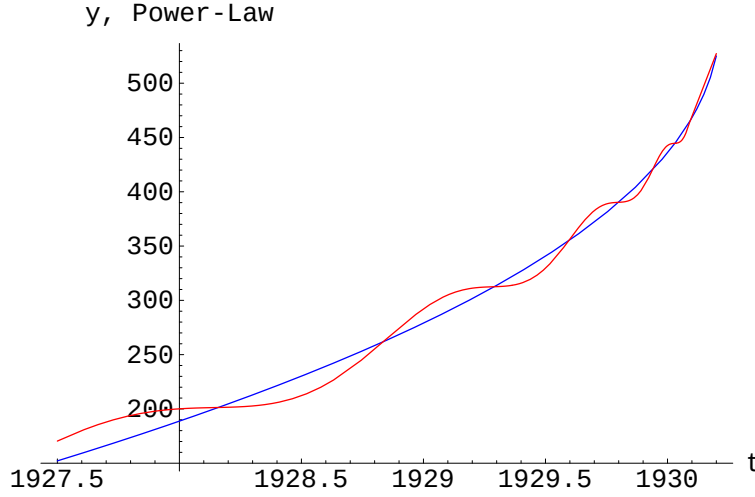
Lévy interesował się przede wszystkim klasą rozkładów stabilnych tzn. takich, które nie zmieniają swojego kształtu po dokonaniu transformacji od pojedynczej do



Rysunek 2.2: Przebieg indeksu giełdy w Kuala Lumpur (Malezja) przed jej krachem w styczniu 1994 roku - największym kryzysem giełdowym jaki dotknął Azję w XX wieku. Linia ciągłą oznaczono najlepsze dopasowanie rozwiązania singularnego (2.8) uwzględniające jedynie liniową log-periodyczność (tzn. uwzględniające w drugiej równości w (2.10) w występującym tam szeregu tylko wyraz z $n = 1$). Najważniejsze parametry tego dopasowania to: $\alpha = 0.24$, $t_c = 1994.02$ oraz $\omega = 10.9$. Jak widać, krach nastąpił tuż po ostrym lokalnym maksimum tej krzywej czyli był poprzedzony przez tzw. bąbel giełdowy. (Rysunek zaczerpnięto z pracy A. Johansen, D. Sornette: "Bubbles and anti-bubbles in Latin-American, Asian and Western stock markets: An empirical study", International Journal of Theoretical and Applied Finance 4 (2001) 853-920, [12]).

summarycznej zmiennej losowej; mogą one ulegać np. odpowiedniemu spłaszczeniu i rozciągnięciu. Do tego typu klasy należą m.in. rozkłady Gaussa i Cauchy'ego (Lorentza) (R. Nowak: "Statystyka dla fizyków", Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2002). Wymienione dwa rozkłady różni jedna zasadnicza cecha: rozkład Gaussa posiada skończony drugi moment natomiast dla rozkładu Cauchy'ego jest on nieskończony.

W związku z tym, że rozkłady posiadające skończony drugi moment nie muszą być stabilne, Lévy postawił kluczowe pytanie o charakterze czysto matematycznym, mianowicie: **jaka jest najogólniejsza definicja pełnej klasy rozkładów stabilnych?** Odpowiedź na to pytanie została sformułowana przez Lévy'ego a nieco później doprecyzowana przez Chinczyna w postaci tzw. Uogólnionego Centralnego Twierdzenia Granicznego (UCTG; W. Paul, J. Baschnagel: "Stochastic Processes.



Rysunek 2.3: Zależność funkcji $y(t_c - t)$ danej wzorem (2.13) od czasu t liczonego w dniach (oscylująca, czerwona linia ciągła) oraz jej składowej potęgowej $y_{PL}(t_c - t)$ (wyrażenie stojące przed nawiasem kwadratowym we wzorze 2.13) (niebieska linia ciągła); obie linie poprowadzono dla wartości parametrów otrzymanych z dopasowania do danych empirycznych przedstawionych na rys.2.1.

From Physics to Finance”, Springer-Verlag, Berlin 1999; R.N. Mantegna, H.E. Stanley: ”Ekonofizyka. Wprowadzenie, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2001; J.-P. Bouchaud, M. Potter: ”Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management”, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001; J.-P. Bouchaud, A. Georges: *Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanics, models and physical applications*, Physics Reports **195** (1990) 127-293) zwanego także twierdzeniem granicznym Lévy’ego-Chinczyna. Twierdzenie to podaje *explicite* najogólniejszą postać rozkładu stabilnego zwanego już dzisiaj rozkładem Pareto-Lévy’ego - omówienie UCTG, a w tym tego rozkładu oraz jego różnych zastosowań w fizyce i na rynkach finansowych, jest jednym z zasadniczych celów niniejszej książki.

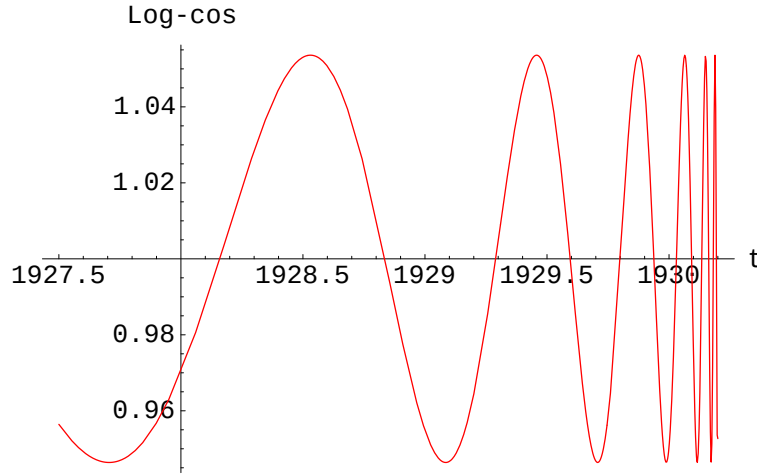
2.2.1 Niezbędne wyjaśnienia

Na rys.2.8 przedstawiliśmy orientacyjnie symetryczny rozkład Pareto-Lévy’ego czyli najogólniejszą postać (symetrycznego) rozkładu stabilnego

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\gamma \Delta t |k|^\alpha) \cos(kx) dk, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (2.15)$$

dla czterech typowych wartości indeksu Pareto-Lévy’ego; zauważmy, że gęstość prawdopodobieństwa powrotu do początku (zgodnie z (2.15)) wynosi

$$P(x=0) = \frac{1}{\pi(\gamma \Delta t)^{1/\alpha}} \Gamma_{Euler} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (2.16)$$



Rysunek 2.4: Zależność od czasu (liczonego w dniach) log-periodycznej składowej funkcji $y(t_c - t)$ (wyrażenie stojące wewnątrz nawiasu kwadratowego we wzorze 2.13) dla parametrów otrzymanych z dopasowania tej funkcji do danych empirycznych przedstawionych na rys.2.1.

i maleje ze wzrostem indeksu α jak to pokazano rysunku.

Korzystając z rozwinięcia w szereg funkcji eksponens, następnie zamieniając odpowiednio zmienną bieżącą w wyrażeniu (2.15) i całkując wyraz po wyrazie z wykorzystaniem definicji funkcji gamma Eulera (czyli całki Eulera drugiego rodzaju) można rozkład Pareto-Lévy'ego wyrazić dla $|x| > 0$ w postaci następującego, wielce przydatnego szeregu

$$P(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} (\gamma \Delta t)^j \Gamma_{Euler}(1 + \alpha j) \sin\left(\frac{j\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{|x|^{1+j\alpha}} \quad (2.17)$$

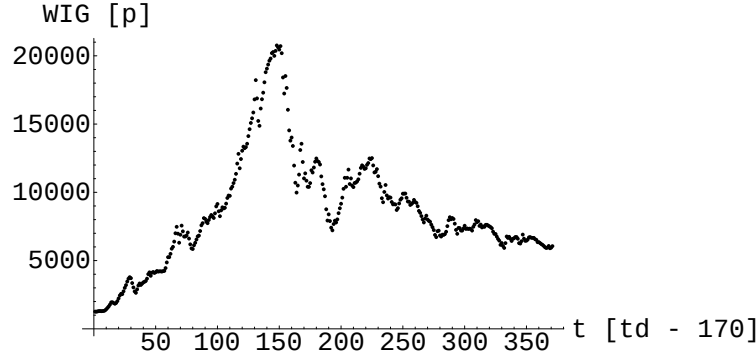
z którego wynika, że dla $|x| \rightarrow \infty$ dominować będzie pierwszy wyraz tego szeregu

$$P(x \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} \quad (2.18)$$

co dobrze widać w skali $\log - \log$ na rys.2.9 (porównaj (2.4)).

Na pierwszy rzut oka może budzić zdziwienie istnienie górnego ograniczenia na indeks rozkładu Pareto-Lévy'ego we wzorze (2.15) - rys.2.10 wyjaśnia ten problem. Chodzi o to, że gdy $\alpha > 2$ wówczas funkcja $P(x)$ dana wzorem (2.15) staje się ujemna dla niektórych wartości zmiennej niezależnej x co pierwszy zauważył w roku 1919 matematyk F. Bernstein.

Na koniec tego paragrafu należy zaznaczyć, że jak dotychczas znane są tylko trzy zamknięte postacie symetrycznego rozkładu Pareto-Lévy'ego: oprócz rozkładów Gaussa i Cauchy'ego o których już mówiliśmy, jest jeszcze rozkład Zolotariewa czyli



Rysunek 2.5: Pierwsze maksimum na WIG-u (czas jest liczony w dniach transakcyjnych (td) a index WIG w punktach (p)).

rozkład Pareto-Lévy'ego o indeksie $\alpha = 2/3$, który wyraża się za pomocą funkcji Whittakera $W_{1/2,1/6}$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|x|} W_{1/2,1/6}\left(\frac{4}{27} \frac{\gamma^{2/3}}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{2}{27} \frac{\gamma^3}{x^2}\right); \quad (2.19)$$

jak widać rozkład Zolotariewa wyraża się za pomocą funkcji nieelementarnej (w przeciwieństwie do dwóch pozostałych).

2.2.2 Paradoks Petersburski i jego konsekwencje

Poniżej rozważamy dwie zasadnicze konsekwencje Paradoksu Petersburskiego:

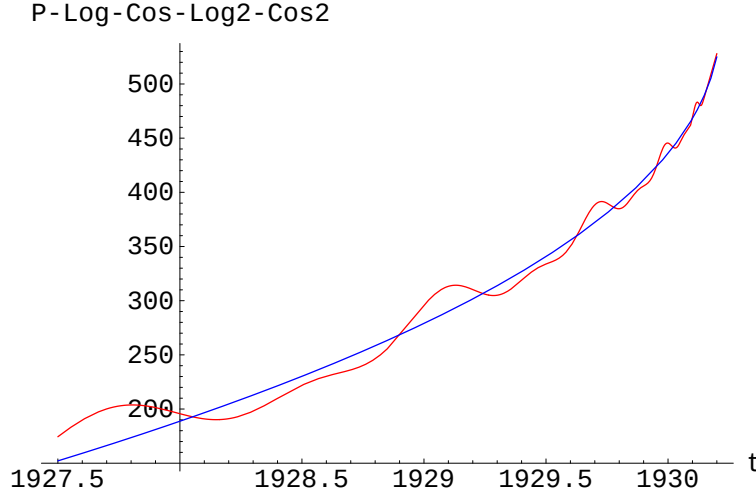
- 1) brak skali fizycznej zjawisk i procesów,
- 2) wprowadzenie funkcji użyteczności.

Obie otworzyły drogę współczesnym teoriom zjawisk i procesów bezskalowych oraz współczesnej teorii użyteczności.

Najpierw jednak rozważymy zaskakującą własność rozkładu Pareto-Lévy'ego, która przez dziesięciolecia powstrzymywała fizyków przed jego stosowaniem - chodzi o rozbieżność drugiego momentu czyli o nieskończoną dyspersję tego rozkładu. Zauważmy, że ma miejsce następujący wzór na moment rzędu (stopnia) m zmiennej losowej x

$$\langle x^m \rangle = (-i)^m \frac{d^m}{dk^m} \tilde{P}(k) |_{k=0}, \quad (2.20)$$

gdzie $\tilde{P}(k)$ jest transformatą Fouriera, zwaną także funkcją charakterystyczną rozkładu $P(x)$ (wzór (2.20) wyprowadziliśmy w rozdz. ... dla ogólniejszego przypadku



Rysunek 2.6: Zależność funkcji (2.14) uwzględniającej drugą harmoniczną log-periodyczną poprawkę (oscylująca, czerwona linia ciągła) od czasu t (liczonego w dniach) oraz jej składowej potęgowej (wyrażenie stojące przed nawiasem kwadratowym we wzorze (2.13), niebieska linia ciągła); obie linie poprowadzono dla wartości parametrów otrzymanych z dopasowania do danych empirycznych przedstawionych na rys.2.1 przy czym swobodny parametr ważący tą poprawkę jest tutaj ujemny i wynosi przykładowo $C' = 0.03$.

momentów ułamkowych, korzystając z definicji pochodnej ułamkowej). Jak widać, funkcja charakterystyczna rozkładu Pareto-Lévy'ego (2.15) jest dana wyrażeniem

$$\tilde{P}(k) = \exp(-\gamma |k|^\alpha), \quad (2.21)$$

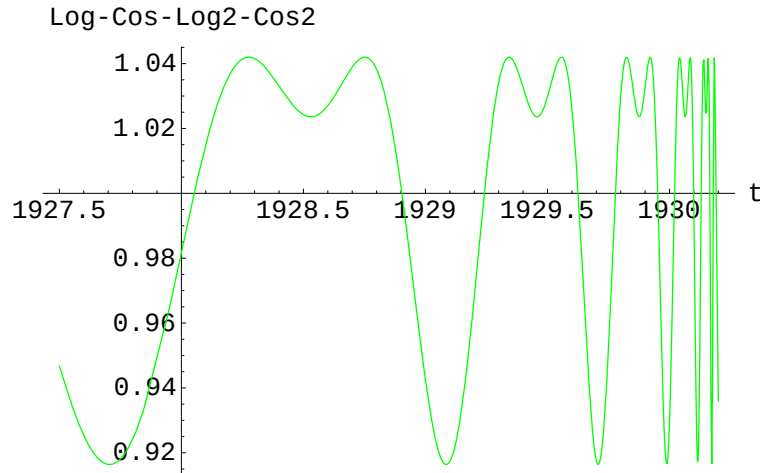
co w połączeniu ze wzorem (2.20) prowadzi do warunków

$$\langle x^m \rangle \begin{cases} < \infty, & \text{dla } m \leq \alpha \\ = \infty, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad (2.22)$$

czyli np. do wspomnianej na wstępie rozbieżności dyspersji rozkładu $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$. Właśnie ta własność jest kluczowym elementem Paradoксу Petersburgskiego.

Brak skali fizycznej

Na istnienie w rachunku prawdopodobieństwa nieskończonych wartości przeciętnych zwrócili już uwagę na początku XVIII wieku N. Bernoulli i D. Bernoulli posługując się wprowadzonym przez siebie przykładem tzw. **Paradoksem Petersburgskim**. Jest to gra hazardowa, w której bankier rzuca symetryczną monetą n razy. Gracz uczestniczący w tej grze wygrywa 2^{n-1} monet jeżeli $n - 1$ razy pod rząd wypadnie



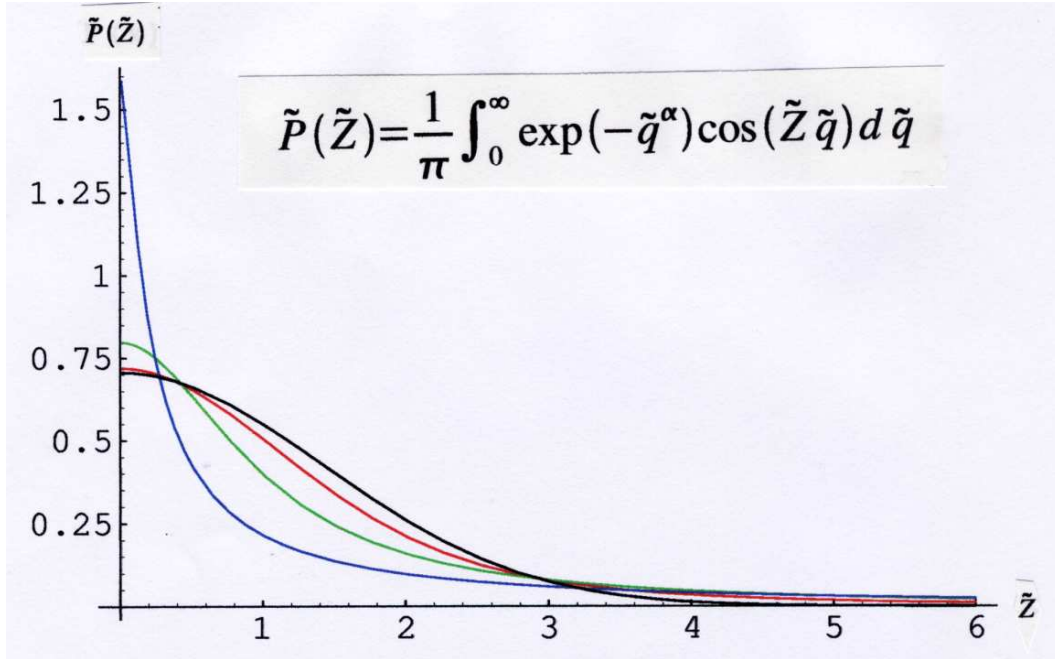
Rysunek 2.7: Zależność składowych log-periodycznych (zerowej, pierwszej i drugiej harmonicznej traktowanych sumarycznie) dla tego samego przypadku, którego dotyczy rys.2.6.

Tabela 2.1: Tabela wygranych

Liczba rzutów	Wygrana	Prawdopodobieństwo	Wartość oczekiwana
1	2^0	$1/2$	$1 \cdot 1/2 = 1/2$
2	2^1	$1/4$	$2 \cdot 1/4 = 1/2$
3	2^2	$1/8$	$4 \cdot 1/8 = 1/2$
...	...	...	...
n	2^{n-1}	$1/2^n$	$2^{n-1} \cdot 1/2^n = 1/2$
...	...	...	...

avers zanim w kolejnym (n -tym rzucie) wypadnie revers⁸. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabeli 2.1. Jak widać, sumaryczna wygrana (czyli wartość oczekiwana), która jest równa sumie wszystkich liczb z ostatniej kolumny $1/2 + 1/2 + \dots$, rozbiega się w miarę jak liczba rzutów rośnie. Zatem, dla każdej skończonej stawki jaką mógłby zaproponować wchodzący do gry gracz jego wygrana będzie prędzej czy później bardziej prawdopodobna niż porażka. Mimo to gracz nie zgodzi się na nieskończoną stawkę jaka byłaby wymagana przez grę sprawiedliwą gdyż, oczywiście, nie jest w stanie grać nieskończenie długo. Z kolei bankier nie zgodzi się na żadną skończoną opłatę wstępną gracza gdyż (jak powiedzieliśmy) straci ją prędzej czy później. Widać, że mamy tutaj do czynienia z nierozwiązywalnym konfliktem (zresztą z tego powodu gry o nieskończonej wartości oczekiwanej nie nadają się do

⁸Umówmy się, że niezasłużona wygrana gracza dla $n=1$, czyli gdy ani razu nie wypadł awers, ma go zachęcić do przystąpienia do tej gry.



Rysunek 2.8: Rozkład Pareto-Lévy'ego dla wartości parametru skalującego $\gamma = 1$ oraz czterech typowych wartości indeksu Pareto-Lévy'ego: (1) linia czarna dotyczy indeksu $\alpha = 2$ czyli opisuje rozkład Gaussa centrowany w zerze o dyspersji $\sigma = \sqrt{2\gamma} = \sqrt{2}$, (2) linia czerwona opisuje rozkład Pareto-Lévy'ego o indeksie $\alpha = 1.5$, natomiast (3) linia zielona o indeksie $\alpha = 1$ czyli rozkład Cauchy'ego-Lorentza, podczas gdy (4) linia niebieska rozkład o indeksie $\alpha = 0.5$. Widać istotną różnicę pomiędzy rozkładami o indeksie $\alpha \geq 1$ a tymi o indeksie $\alpha < 1$.

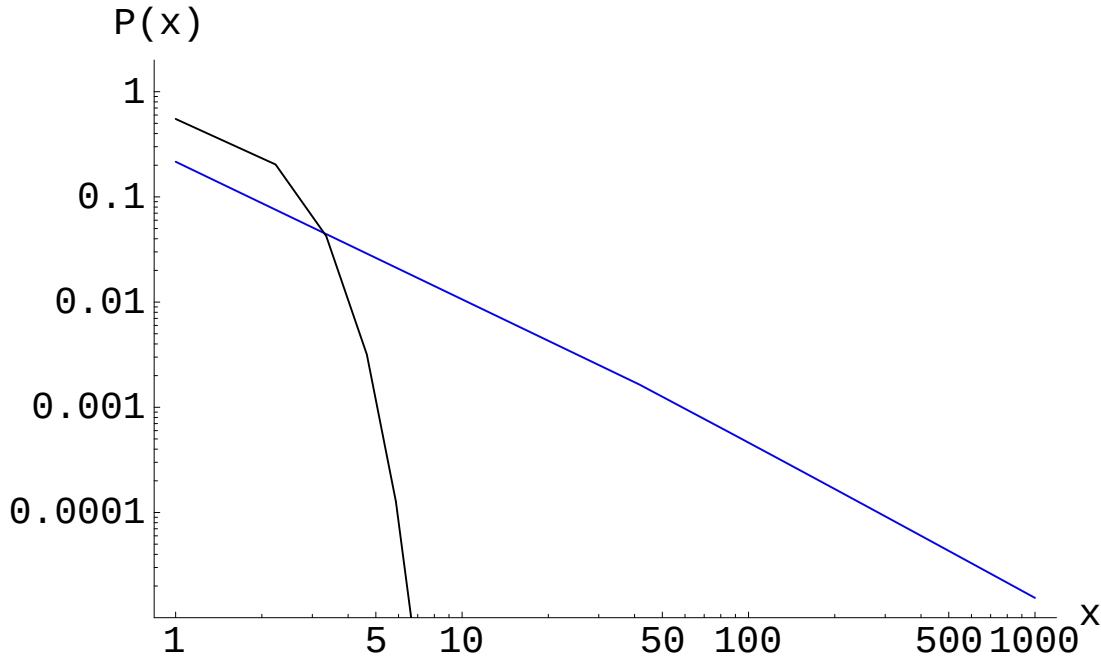
zastosowania w kasynach). Jaka jest przyczyna tego konfliktu. Otóż bankier i gracz nie mogą ustalić żadnej kompromisowej stawki gdyż takiej charakterystycznej stawki (lub mówiąc językiem fizyki, skali) po prostu nie ma.

Wracając do rozkładu Pareto-Lévy'ego, nieskończona dyspersja oznacza właśnie brak charakterystycznej skali fluktuacji statystycznych; innymi słowy wszystkie skale są tutaj równoprawne - zjawiska opisywane tym rozkładem zachodzące w różnych skalach są (w sensie matematycznym) podobne, czyli połączone relacją skalowanie o czym jest mowa szczegółowo w dalszej części.

Funkcja użyteczności

Odpowiemy teraz na zasadnicze pytanie a mianowicie, jak należy zmodyfikować stawkę wygranej, $W(n)$, w każdym kroku, n , gry aby oczekiwana wartość wygranej była skończona, czyli gra była użyteczna? Modyfikacja zaproponowana przez D. Bernoulliego jest prosta:

$$W(n) = (n - 1) \ln 2. \quad (2.23)$$



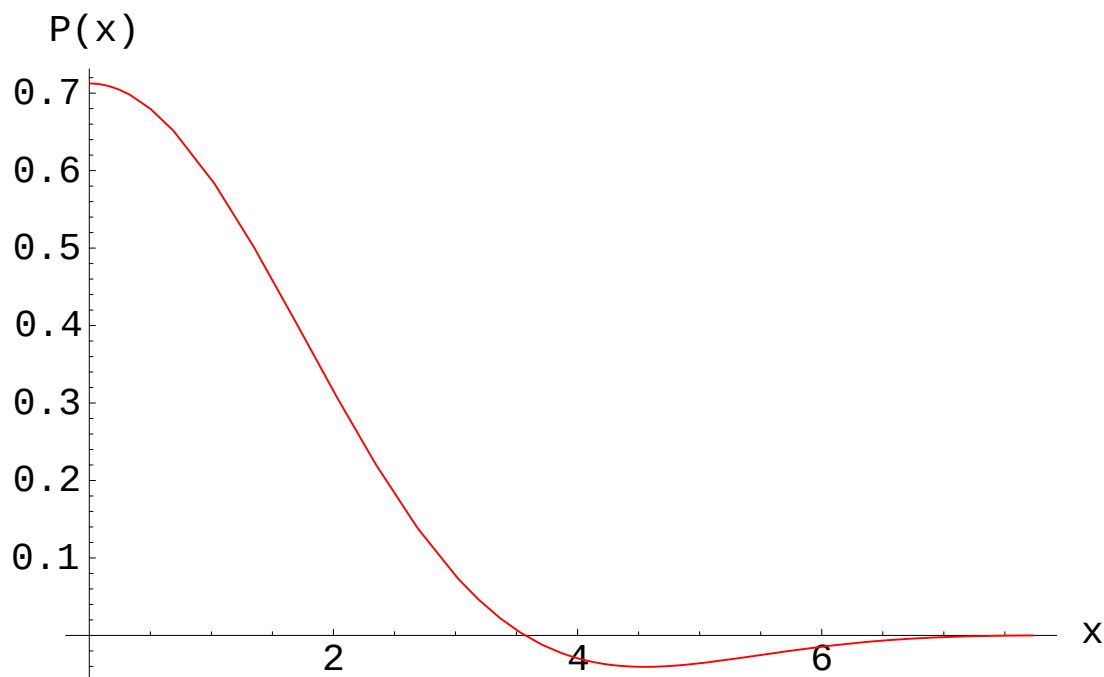
Rysunek 2.9: Rozkład Pareto-Lévy'ego w skali $\log - \log$ dla wartości parametru skalującego $\gamma = 1$ oraz dwóch skrajnych (spośród czterech typowych) wartości indeksu Pareto-Lévy'ego przedstawionych na rys.2.8: (1) linia czarna dotyczy indeksu $\alpha = 2$ czyli opisuje rozkład Gaussa centrowany w zerze o dyspersji $\sigma = \sqrt{2}$, a (2) linia niebieska rozkład o indeksie $\alpha = 0.5$.

Widać, że wartość oczekiwana tak zdefiniowanej wygranej

$$\langle W \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} W(n) = \frac{1}{2} \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} = \ln 2. \quad (2.24)$$

jest skończona. Z tego powodu funkcję $U(n) = \ln W(n)$ nazywa się funkcją użyteczności. Właśnie wartości funkcji użyteczności $U(n)$, $n = 0, 1, \dots$, mogą stanowić sensowne wielkości stawek wygrywanych w tej grze - stawek, które są "spłaszczane" dla dużych wartości n , tzn. ich wzrost w miarę wzrostu n jest spowolniony, tak jak być powinno (bogatszym może nie zależeć tak bardzo na wygranej jak biedniejszym). Opisane powyżej podejście (oparte o Paradoks Petersburgski) otworzyło drogę do powstania współczesnej teorii użyteczności (patrz Wikipedia: pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_petersburski).

Tytułem pożytecznej dygresji warto podkreślić, że Jacob Bernoulli skonstruował rozkład zmiennej losowej (współcześnie nazywany rozkładem dwumianowym ale także rozkładem Bernoulliego), której wartość oczekiwana jest zarazem dominantą (czyli wartością najbardziej prawdopodobną). Tego typu rozkłady są dobrymi kandydatami do opisu otaczającej nas probabilistycznej rzeczywistości.



Rysunek 2.10: Zależność funkcji $P(x)$ danej wzorem (2.15) od x dla parametru $\gamma = 1$ oraz indeksu $\alpha = 3$ - jest to zależność typowa dla sytuacji gdy indeks α jest większy od 2. Jak widać, funkcja $P(x)$ przybiera także wartości ujemne co ją dyskwalifikuje jako funkcję rozkładu prawdopodobieństwa dla $\alpha > 2$.

2.3 Motywacja fizyczna

Chcąc nie chcąc, liczba doświadczeń które dają się opisać za pomocą spowolnionej relaksacji, zwanej także długookresową (czyli anomalną, niedebye'owską albo nieeksponencjalną) szybko rośnie. Są to przede wszystkim zjawiska dotyczące relaksacji w środowisku amorficznym, nieuporządkowanym ("random materials"). Spośród nich najbardziej znane są te dotyczące relaksacji (M. Ghosh, B.K. Chakrabarti: "Relaxation in disordered systems", Indian Journal of Physics **65 A** (1991) 1-24):

- fotoprądów w amorficznych filmach szklistych a w tym relaksacji fotoprądów w eksperymentach kserograficznych (E.W. Montrol, M.F. Shlesinger: "On the wonderful world of random walks" in "Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastics to Hydrodynamics", Studies in Statistical Mechanics, Vol.XI, eds. J.L. Lebowitz, E.W. Montroll, North-Holland, Amsterdam 1984)
- relaksacji namagnesowania magnetyków poniżej temperatury krytycznej
- szkieł spinowych
- układów perkolujących

- starzejących się szkieł i polimerów
- relaksacji lepko-elastycznej
- relaksacji rekombinacyjnej w epitaksjalnych półprzewodnikach
- niestabilności w materii granulowanej (np. lawiny w samoorganizującej się krytyczności kopca piachu lub silosa ze zbożem, cementem, itp.)

a także dotyczące

- anomalnej dyfuzji wodoru w amorficznych metalach przejściowych (R. Hempelmann: "Hydrogen Diffusion in Proton Conducting Oxides and in Nanocrystalline Metals" in "Anomalous Diffusion. From Basics to Applications", Lecture Notes in Physics Vol.519, eds. R. Kutner, A. Pękalski, K. Sznajd-Weron, Springer-Verlag, Berlin 1999)
- chłodzenia laserowego stanowiącego zasadniczy element metody pozwalającej na pułapkowanie atomów w postaci kondensatu Bosego-Einsteina, przy czym statystyka czasów życia tych atomów w pułapce podlega rozkładowi Lévy'ego z wykładnikiem $\alpha = 1/2$, (F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji: "Lévy Statistics and Laser Cooling. How Rare Events Bring Atoms to Rest", Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002).

Spowolnioną relaksację opisuje się najczęściej za pomocą kilku rodzajów funkcji relaksacji $f(t)$. Na przykład, za pomocą prawa Kohlrauscha-Williamsa-Wattsa (KWW)

$$f(t) = \exp \left(- \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right), \quad (2.25)$$

gdzie $0 < \alpha < 1$; wyrażenie (2.25) nosi także nazwę rozciągniętego exponensa ('stretched exponent'). Również za pomocą prawa potęgowej relaksacji Nuttinga

$$f(t) = \frac{1}{(1 + t/\tau)^n}, \quad (2.26)$$

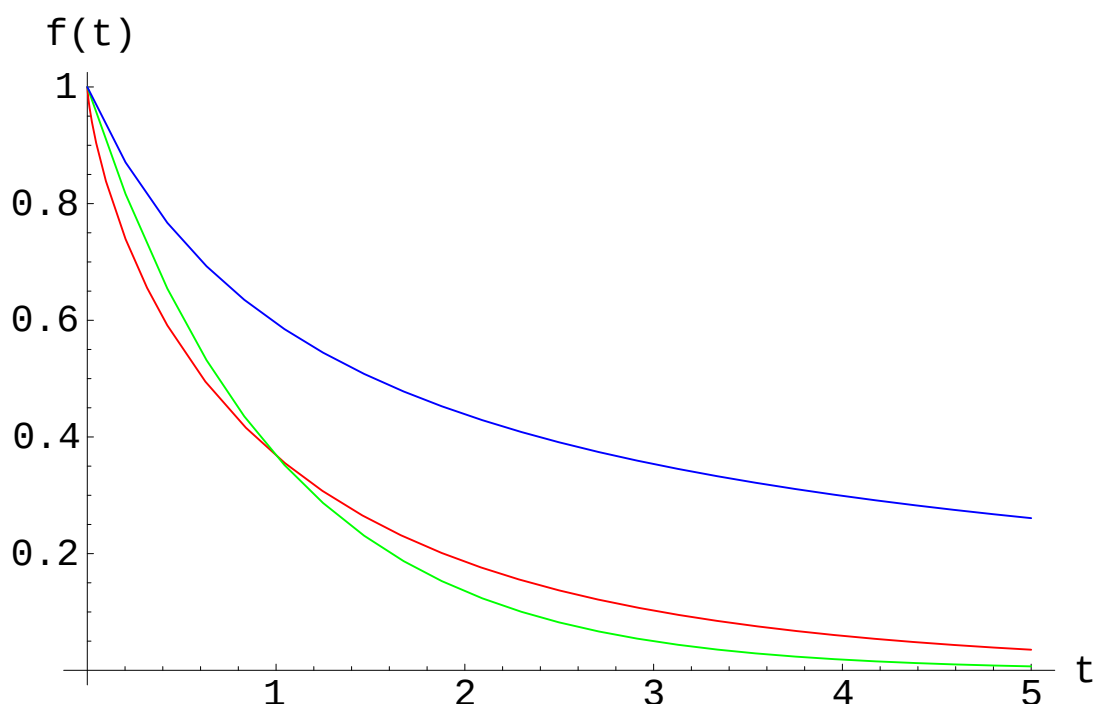
gdzie wykładnik $0 < n < 1$. Jak też, ogólnie rzecz biorąc, za pomocą funkcji, które posiadają asymptotyczny zanik potęgowy

$$f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}, \quad (2.27)$$

(gdzie $0 < \alpha$) o czy będzie mowa w dalszej części.

Na rys.2.11 porównano w skali liniowej trzy rodzaje funkcji relaksacji: (zwykły) exponent czyli (standardowe) prawo relaksacji Debye'a (linia zielona)

$$f(t) = \exp(-t/\tau), \quad (2.28)$$



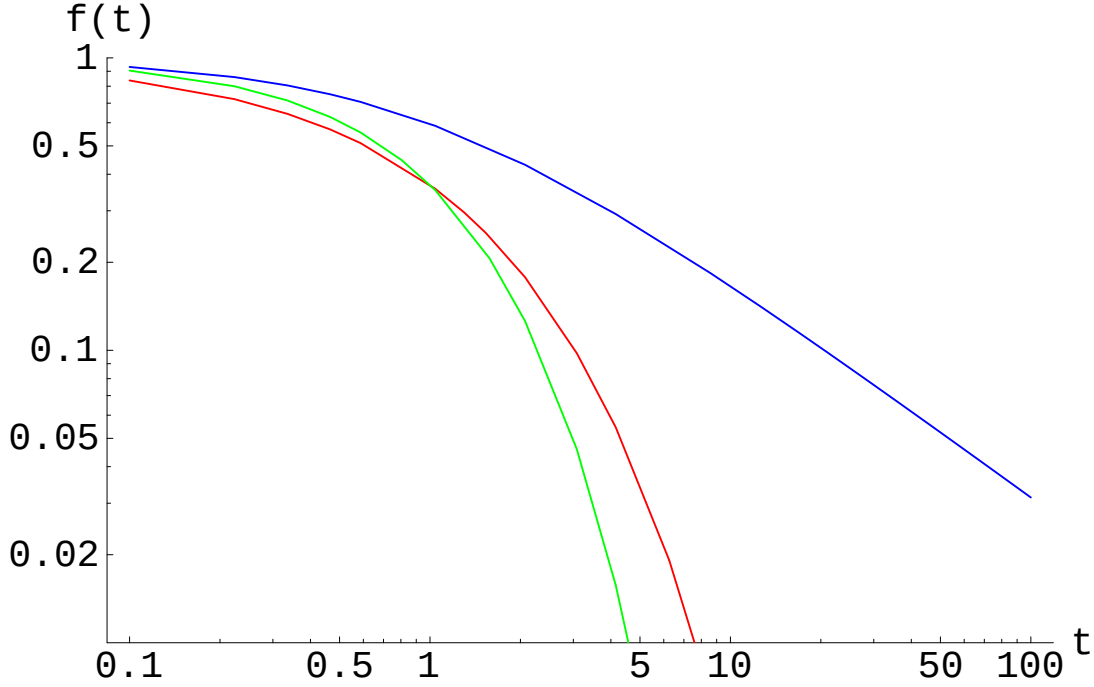
Rysunek 2.11: Porównanie w skali liniowej trzech rodzajów funkcji relaksacji: prawa relaksacji Debye’a (linia zielona), Kohlrauscha-Williamsa-Wattsa (linia czerwona) oraz Nuttinga (linia niebieska) dla parametrów $\tau = 1$ oraz $\alpha = n = 0.75$.

oraz prawa KWW (linia czerwona) i Nuttinga (linia niebieska) dla parametrów $\tau = 1$ i $\alpha = 0.75$.

Analogicznie, na rys.2.12 porównano w skali $\log - \log$ trzy rodzaje funkcji relaksacji: prawa relaksacji Debye’a (linia zielona), Kohlrauscha-Williamsa-Wattsa (linia czerwona) oraz Nuttinga (linia niebieska) dla takich samych wartości parametrów τ , α i n .

Jak powiedzieliśmy na wstępie, relaksacja potęgowa została po raz pierwszy zaobserwowana przez B.G. Buelfingera w roku 1729 w badaniach nad relaksacją naprężeń w takich materiałach jak stal i kamień. Od roku 1888 nosi ona nazwę prawa sprężystości Bacha.

Z grubsza rzecz biorąc, spowolniona relaksacja może być wynikiem istnienia w układzie złożonym wielu silnie sprzężonych i różnie relaksujących podukładów, co może prowadzić do retardacji lub, ogólniej mówiąc, pamięci a zatem do niemarkowskiego charakteru procesu relaksacji (W.G. Glöckle, Th.F. Nonnenmacher: "Fox Function Representation of Non-Debye Relaxation Processes", Journal of Statistical Physics **71** (1993) 741-757; Th.F. Nonnenmacher, R. Metzler: "Applications of fractional calculus techniques to problems in biophysics" rozdz.VIII w "Applications of fractional calculus in physics", pod redakcją R. Hilfera, World Scientific, Singapore



Rysunek 2.12: Porównanie w skali $\log - \log$ trzech rodzajów funkcji relaksacji przedstawionych na rys.2.11 w skali liniowej: prawa relaksacji Debye'a (linia zielona), Kohlrauscha-Williamsa-Wattsa (linia czerwona) oraz Nuttinga (linia niebieska) dla takich samych wartości parametrów τ , α i n .

2000). To z kolei prowadzi do ułamkowego (czyli fraktalnego) równania relaksacji, którego rozwiązaniem jest funkcja Foxa zanikająca, jak wiadomo, potęgowo. Systematyczne omówienie tych zagadnień jest jednym z zasadniczych celów niniejszej pracy.

2.4 Relaksacja fraktalna

Na zakończenie tego rozdziału wprowadzimy fraktalne równanie na funkcję relaksacji dzięki któremu będziemy mogli odtworzyć wprowadzoną wcześniej relaksację potęgową. Jak wiadomo, wykładnicza funkcja relaksacji (2.28) jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}f(t), \quad t > 0, \quad (2.29)$$

z zadaniem warunkiem początkowym $f(t = 0) = f_0$. Odpowiednikiem całkowym równania (2.29) jest następujące

$$f(t) - f_0 = -\frac{1}{\tau} \frac{d^{-1}f(t)}{dt^{-1}} \stackrel{\text{def.}}{=} -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' f(t'); \quad (2.30)$$

ponieważ całkowanie pełni rolę operacji odwrotnej do zwykłego różniczkowania dla tego oznaczyliśmy je tutaj jako ujemną pochodną. Oczywiście, pochodna ta ma zupełnie inny charakter niż dodatnia a mianowicie, jest typu globalnego (w przeciwieństwie do dodatniej, która ma charakter lokalny).

Uogólnienie równania (2.30) polega na zastąpieniu występującego tam ujemnego różniczkowania, ujemnym różniczkowaniem ułamkowym

$$f(t) - f_0 = -\frac{1}{\tau^\alpha} \frac{d^{-\alpha} f(t)}{dt^{-\alpha}}, \quad 0 < \alpha, \quad (2.31)$$

gdzie ujemna pochodna stopnia $-\alpha$ jest po prostu operatorem całkowym Riemanna-Liouville'a

$$\frac{d^{-\alpha} f(t)}{dt^{-\alpha}} \stackrel{def.}{=} \begin{cases} \frac{1}{\Gamma_{Euler}(\alpha)} \int_0^t dt' \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} & \text{dla } \alpha > 0 \\ f(t) & \text{dla } \alpha = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

(patrz Dodatek A). Różniczkując stronami równanie całkowe (2.31) otrzymujemy fraktalne równanie relaksacji czyli równanie różniczkowo-całkowe postaci

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau^\alpha} \frac{d^{1-\alpha} f(t)}{dt^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha, \quad (2.33)$$

które stanowi bezpośrednie uogólnienie zwykłego równania różniczkowego pierwszego stopnia (2.29) opisującego relaksację debye'owską. Rozwiązanie tego równania wyraża się za pomocą funkcji Foxa typu $H_{1,2}^{1,1}$ (Th.F. Nonnenmacher, R. Metzler: "Applications of Fractional Calculus Techniques to Problems in Biophysics" w "Applications of Fractional Calculus in Physics", ed. R. Hilfer, World Scientific, Singapore 2000) lub inaczej rzecz biorąc, za pomocą funkcji Mittag-Leffler E_α (R. Metzler and J. Klafter: "The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach", Physics Reports **339** (2000) 1-77, [18]),

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{f_0}{\alpha} H_{1,2}^{1,1} \left[\frac{t}{\tau} \left| \begin{matrix} (0, \frac{1}{\alpha}) \\ (0, \frac{1}{\alpha}), (0, 1) \end{matrix} \right. \right] = f_0 H_{1,2}^{1,1} \left[\left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \left| \begin{matrix} (0, 1) \\ (0, 1), (0, \alpha) \end{matrix} \right. \right] \\ &= f_0 E_\alpha \left(\left(-\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) = f_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t}{\tau} \right)^{\alpha j}}{\Gamma_{Euler}(1 + \alpha j)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Rozwiązanie to przejawia następujące zachowania graniczne

$$f(t) \approx f_0 \begin{cases} \exp \left(-\frac{(t/\tau)^\alpha}{\Gamma_{Euler}(1+\alpha)} \right) & \text{dla } t \ll \tau \\ \frac{1}{\Gamma_{Euler}(1-\alpha)} \frac{1}{(t/\tau)^\alpha} & \text{dla } t \gg \tau \text{ oraz } 0 < \alpha < 1, \end{cases} \quad (2.35)$$

z których pierwsze to nic innego jak wspomniane przez nas wcześniej prawo relaksacji Kohlrausha-Williamsa-Wattsa a drugie (także wspomniane przez nas) prawo zaniku potęgowego z wykładnikiem $0 < \alpha < 1$; dla innych wartości α nie uzyskuje się asymptotycznego prawa potęgowego.

Na rys. ... przedstawiono przykładowy przebieg funkcji Foxa H_{12}^{11} dla trzech różnych wartości wykładnika α .

2.4.1 Rola pamięci w relaksacji

Spojrzymy teraz na relaksację od strony umożliwiającej analizę roli jaką odgrywa w niej pamięć. Rozważmy zatem następujące równanie różniczkowo-całkowe z jądrem pamięci $K(t)$,

$$\frac{df(t)}{dt} = - \int_0^t dt' K(t-t') f(t'). \quad (2.36)$$

Należy podkreślić, że powyższe równanie uzyskano przy wykorzystaniu techniki operatorów rzutowych Zwanziga. Powyższe równanie pozwoli nam na wyprowadzenie wszystkich omawianych dotychczas rodzajów relaksacji poprzez odpowiedni dobór jądra całkowego $K(t)$.

A) Brak pamięci. Przypuśćmy, że w układzie nie występuje pamięć tzn., że jądro całkowe

$$K(t) = \frac{1}{\tau} \delta(t); \quad (2.37)$$

podstawiając powyższe wyrażenie do równania (2.36) otrzymujemy jako jego rozwiązanie wykładniczą funkcję relaksacji

$$f(t) = f_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.38)$$

(daną już wcześniej właśnie wzorem (2.28)).

B) Pamięć stała. Załóżmy teraz, że jądro pamięci jest niezależne od czasu czyli

$$K(t) = \omega^2, \quad (2.39)$$

wówczas, podstawiając (2.39) do (2.37), otrzymujemy oscylujące rozwiązanie na funkcję relaksacji

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t), \quad (2.40)$$

gdzie ω jest pewną stałą większą od zera.

C) Pamięć wolnozmienna. Przypuśćmy, że jądro całkowe, $K(t)$, jest wolnozmienną funkcją czasu i początkowo (dla $t \ll \tau$) narasta w sposób potęgowy

$$K(t) = K_0 t^\gamma, \quad \gamma > 0. \quad (2.41)$$

Stąd oraz z równania (2.36) otrzymujemy jako rozwiązanie funkcję relaksacji

$$f(t) \approx f_0 \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma+2}\right), \quad \tau^{-1} = K_0^{1/(\gamma+2)} \quad (2.42)$$

w postaci rozciągniętego eksponensu.

D) Pamięć długookresowa. Załóżmy teraz, że jądro pamięci jest dla $t > 0$ algebraicznie malejącą funkcją czasu

$$K(t) = \frac{K_0}{t^{2-\alpha}}, \quad K_0 > 0, \quad 1 < \alpha \leq 2; \quad (2.43)$$

podstawiając, jak zwykle, powyższą postać jądra do równania (2.36) otrzymujemy natychmiast, że

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau^\alpha} \frac{d^{1-\alpha} f(t)}{dt^{1-\alpha}}, \quad \tau^{-\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} K_0 \Gamma(\alpha - 1) \quad (2.44)$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z definicji ujemnej pochodnej fraktalnej (2.32). Jak widać, jądro całkowe typu (2.43) prowadzi do równania relaksacji fraktalnej (2.33) z zakresem wykładnika α ograniczonym do przedziału $1 < \alpha \leq 2$.

Powstaje teraz pytanie o związek fraktalnego równania relaksacji (2.33) z równaniem z pamięcią (2.36) dla $0 < \alpha \leq 1$. Innymi słowy, chodzi o odpowiedź na pytanie czy dla $0 < \alpha \leq 1$ istnieje jądro całkowe $K(t)$ a jeżeli tak to jaką ma postać?

2.4.2 Spowolniona relaksacja na Warszawskiej GPW

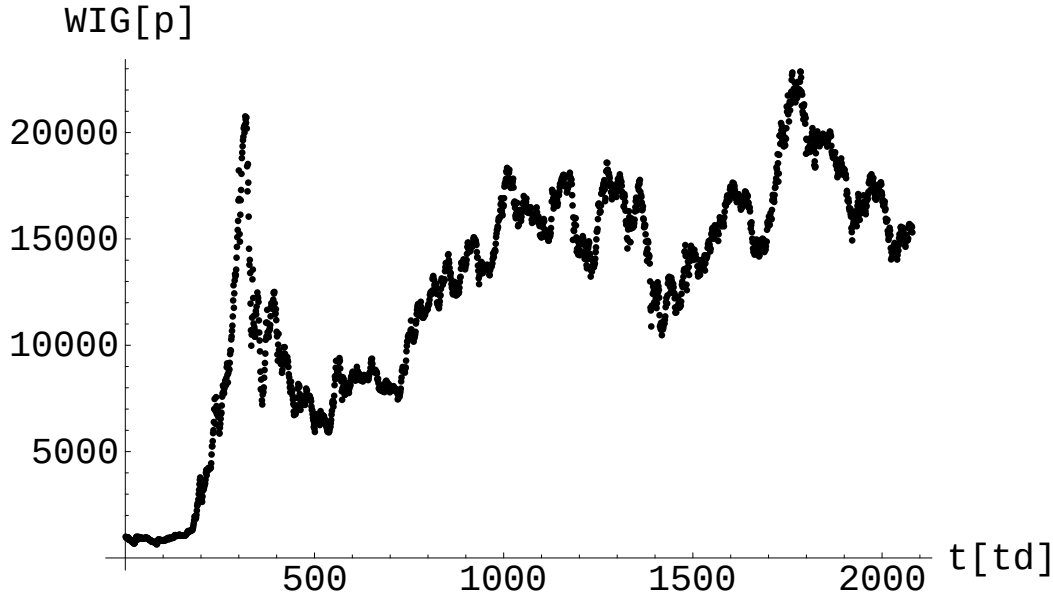
Tytułem przykładu spowolnionej relaksacji rozważymy indeks WIG a dokładniej jego relaksację po osiągnięciu pierwszego maksimum (zawartego w obszarze pierwszych 550 dni transakcyjnych istnienia giełdy co jest dobrze widocznego na rysunku 2.13). Na rysunku 2.14 przedstawiono już tylko wspomniany obszar pierwszego maksimum. Dokładniej, prawe zbocze tego maksimum przedstawia rysunek 2.15.

2.5 Dynamika materiału lepko-sprężystego a relaksacja fraktalna

Przedstawimy teraz drogę na jakiej uzyskuje się relaksację fraktalną z równań opisujących dynamikę materiału lepko-sprężystego (wisko-elastycznego). Punktem wyjścia jest połączenie prawa sprężystości Hooke'a z prawem Newtona opisującego lepkie własności ciała stałego związane z nieodwracalną dysypacją energii sprężystości. Połączenie to prowadzi do modelu Maxwella-Zenera ciała stałego. Dopiero w następnym kroku, posługując się analogią, przejdziemy do opisu relaksacji fraktalnej indeksu giełdowego, przykładowo WIG-u.

2.5.1 Model Zenera ciała stałego

Prawo Hooke'a. Siły działające prostopadle do powierzchni ciała stałego powodują, w zależności od zwrotu, jego ściskanie albo rozciąganie. Miarą odkształcenia (zarówno przy ściskaniu jak i rozciąganiu) jest względna zmiana długości ciała $\varepsilon = \Delta l/l$ zwana



Rysunek 2.13: Przykładowy przebieg indeksu WIG poczynając od pierwszej sesji 16 kwietnia 1991 roku aż do tej w ... liczony w dniach transalcyjnych (td) na otwarciu.

odkształceniem lub deformacją; związek tej wielkości z działającą siłą F określa prawo Hooke’a:

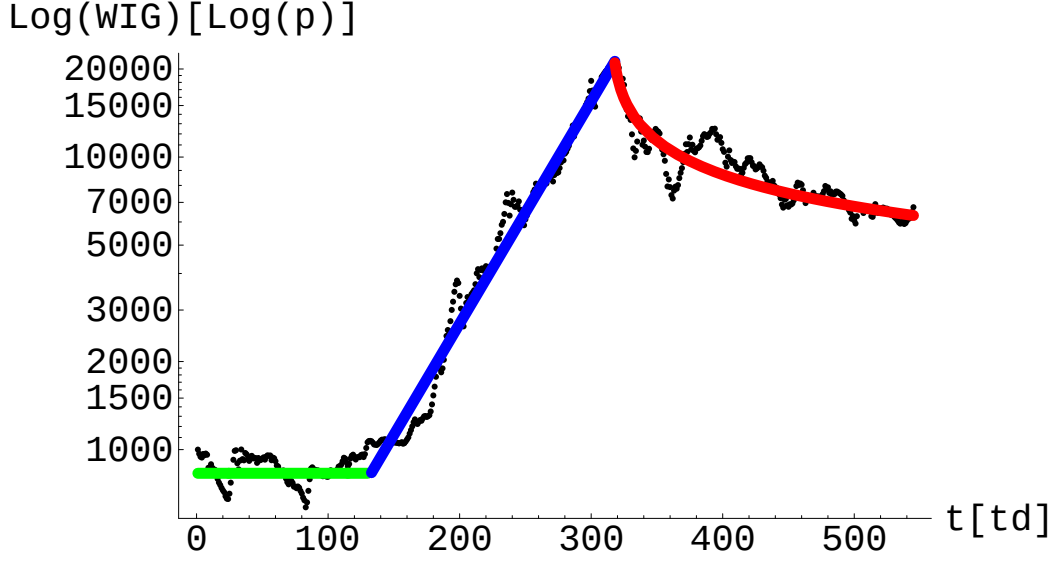
$$\varepsilon = K\sigma = \frac{1}{E}\sigma, \quad (2.45)$$

gdzie naprężenie wewnętrzne $\sigma = F/S$, przy czym S jest polem przekroju poprzecznego pręta (w dalszym ciągu będziemy omawiać tylko tego typu ciała), natomiast współczynnik E jest modułem sprężystości Younga. Z prawa tego wynika, że reakcja ciała na przyłożone naprężenie jest natychmiastowa tak jak i po usunięciu go. Tego typu zachowanie ciała nazywamy sprężystym. Wiadomo z doświadczenia, że własności sprężyste ciało obserwuje się tylko w ograniczonym zakresie odkształceń. W szerszym zakresie obserwuje się (w różnym stopniu) zachowanie plastyczne, w którym odkształcenie wzrasta (do pewnej charakterystycznej wielkości) nawet jeżeli naprężenie nie ulega zmianie. Model Zenera (MZ) ciała stałego uwzględnia już oba efekty (sprężystości i plastyczności). Aby opisać efekt plastyczności model Zenera bazuje, oprócz prawa Hooke’a, na wyrażeniu Maxwella-Newtona opisującego relaksację ciała posiadającego lepkość.

Wyrażenie Maxwella-Newtona. Wyrażenie Maxwella-Newtona łączy naprężenie przyłożone do ciała z szybkością zmiany odkształcenia na jednostkę czasu

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = b \cdot \sigma(t) \equiv \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma, \quad (2.46)$$

gdzie η jest lepkością ciała (zwaną także tarcie wewnętrzne) a b ruchliwością.



Rysunek 2.14: Przebieg indeksu WIG (w skali półlogarytmicznej) dla pierwszych 550 dni transakcyjnych istnienia giełdy. Zielona linia oznacza poziom odniesienia, linia niebieska pokazuje exponensjalny wzrost indeksu, natomiast linia czerwona jest dana wzorem (2.34).

Model Zenera. Model Zenera sformułujemy w postaci umożliwiającej bezpośrednie zastosowanie do opisu dynamiki indeksów giełdowych. Sformułowanie to uzależnia odkształcenie ε od naprężenia σ a nie odwrotnie jak to jest w tradycyjnym podejściu. Oznacza to, że skorzystamy z pierwszych równości w (2.45) i (2.46). Obecne podejście bazuje na następującym liniowym równaniu różniczkowym:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_0}\varepsilon(t) = \frac{K_1}{\tau_0}\sigma(t) + (K_1 + K_2)\frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad (2.47)$$

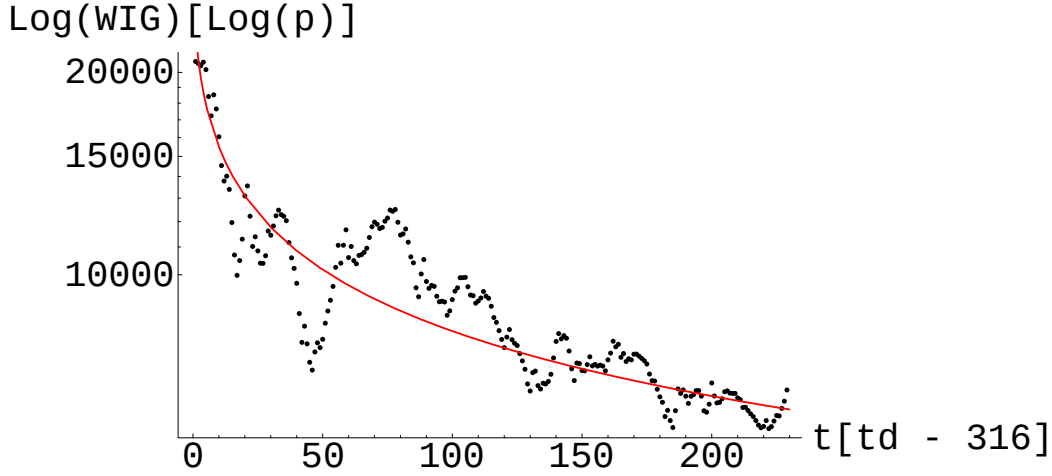
które jest kombinacją prawa Hooke'a i wyrażenia Maxwella-Newtona; τ_0 , K_1 , K_2 są niezależnymi parametrami a współczynnik lepkości $\eta = 1/b = (K_1/\tau_0)^{-1}$. Jego rozwiązanie jest postaci:

$$\varepsilon(t) = C_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{t'}{\tau_0}\right) \left[\frac{K_1}{\tau_0}\sigma(t') + (K_1 + K_2)\frac{d\sigma(t')}{dt'} \right] dt', \quad (2.48)$$

która świetnie nadaje się do dalszej analizy. Aby zrozumieć znaczenie współczynników K_1 i K_2 przedyskutujemy to rozwiązanie dla przypadku stałego naprężenia σ_0 (wyznaczając przy okazji stałe C_1 i C_2).

Dyskusja rozwiązania równania (2.47) dla przypadku stałego naprężenia. W tym przypadku rozwiązanie równania (2.47) przyjmuje prostszą postać:

$$\varepsilon(t) = C_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) + C_2 K_1 \sigma_0 [1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)], \quad (2.49)$$



Rysunek 2.15: Przebieg prawego zbocza indeksu WIG (w skali półlogarytmicznej) dla pierwszego maksimum; czerwona linia jest obliczona za pomocą szeregu we wzorze (2.34).

przy czym stałą C_1 można wyznaczyć z warunku początkowego

$$\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0 = (K_1 + K_2)\sigma_0 = C_1, \quad (2.50)$$

natomiast stałą C_2 z ograniczenia jakie nakładamy na asymptotyczne zachowanie

$$\varepsilon(t \rightarrow \infty) = \varepsilon_0 + \varepsilon'_0 = K_1\sigma_0, \quad (2.51)$$

które oznaczają (w połączeniu z (2.50)), że $\varepsilon'_0 = -K_2\sigma_0$ oraz (w połączeniu z (2.49)), że $C_2 = 1$. Rozwiązanie (2.49) wraz z wyznaczonymi stałymi prowadzi do dwóch następujących sytuacji:

- (i) $-K_1 \leq K_2 < 0 \equiv \varepsilon_0 \leq \varepsilon_0 + \varepsilon'_0 \equiv \varepsilon'_0 \geq 0$,
- (ii) $K_2 \geq 0 \equiv \varepsilon'_0 \leq 0$,

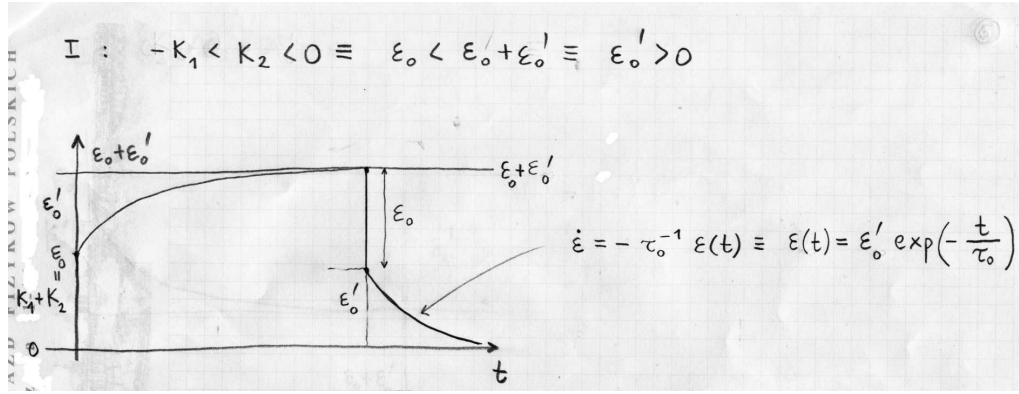
które ilustrujemy na dwóch kolejnych rysunkach 2.16 i 2.17.

⁹Wyprowadzenie równania (2.47). Dokładniej rzecz biorąc, równanie (2.47) zostało uzyskane w oparciu o termodynamikę procesów nieodwracalnych. Tutaj wyprowadzimy je analogicznie ale w kontekście rynków finansowych korzystając z odpowiednich analogii zebranych w poniższej tabeli.

2.6 Subdyfuzja fraktalna

Analogicznie jak w rozdz.2.4, można otrzymać na drodze czysto formalnej równanie dyfuzji fraktalnej (ang. *Fractional Diffusion Equation*, R. Metzler, J. Klafter:

⁹W pierwszym czytaniu można niniejsze wyprowadzenie opuścić.



Rysunek 2.16: Rozwiązanie równania (2.49) dla sytuacji (i).

The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractal Dynamics Approach, Physics Report **339** (2000) 1–77, [18]). Proces stochastyczny prowadzący do tego równania nosi nazwę *blędzenia losowego w czasie fraktalnym* (ang. *fractal time random walk*). Na wyprowadzenie równania dyfuzji fraktalnej w ramach tzw. modelu dolinowego (ang. *Valley Model*), opisującego blędzenie losowe dziur w materiale amorficznym, wskazaliśmy w rozdz. 7.3.1.

Zatem, rozważmy jednowymiarowe równanie dyfuzji Ficka (dla uproszczenia bez dryfu)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}; \quad (2.52)$$

w dalszym ciągu zakładamy dla prostoty, że współczynnik dyfuzji D jest stały.

Całkując to równanie stronami po czasie otrzymujemy jako kroki pośrednie:

$$f(x, t) - f(x, t = 0) = D \frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.53)$$

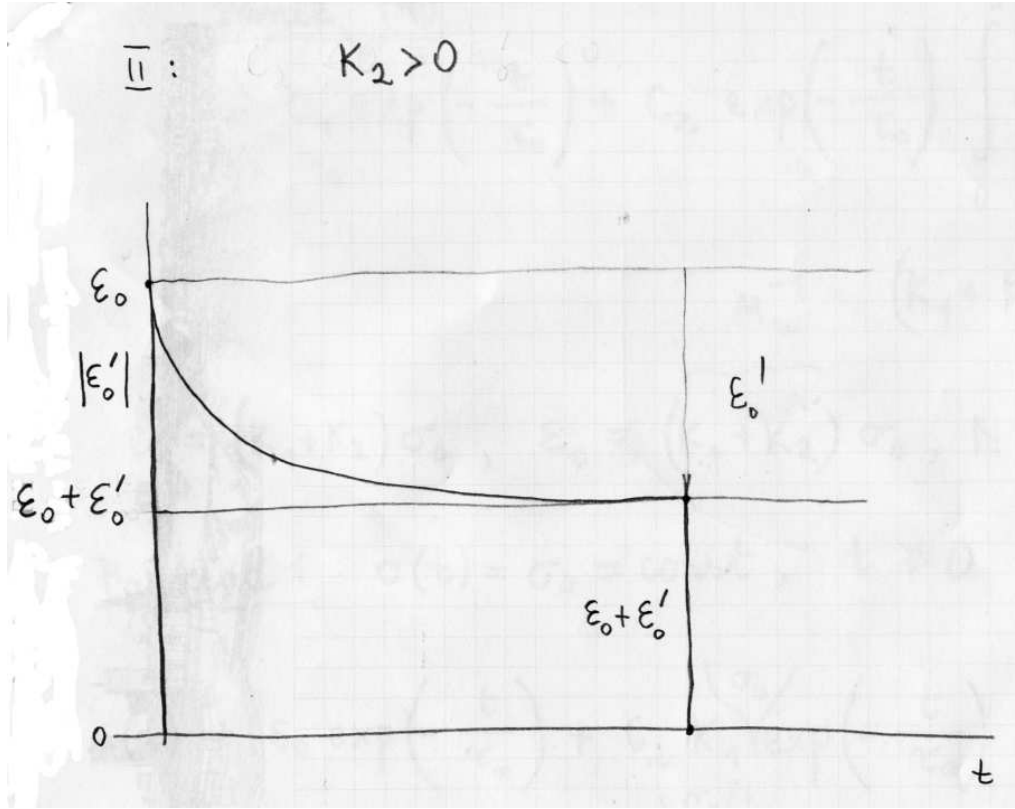
oraz uogólnienie powyższego równania dla $0 \leq \alpha < 1$ - stąd pochodzi nazwa *subdyfuzja*,

$$f(x, t) - f(x, t = 0) = D_\alpha \frac{\partial^{-\alpha}}{\partial t^{-\alpha}} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.54)$$

gdzie D_α jest uogólnionym współczynnikiem dyfuzji (tutaj stałym), którego wymiar wynosi $\text{długość}^2/\text{czas}^\alpha$, o czym dokładniej powiedzieliśmy w dalszej części (patrz rozdz. 7.3.1).

Różniczkując cząstkowo po czasie (2.54), uzyskujemy poszukiwane równanie subdyfuzji fraktalnej

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D_\alpha \frac{\partial^{1-\alpha}}{\partial t^{1-\alpha}} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.55)$$



Rysunek 2.17: Rozwiązanie równania (2.49) dla sytuacji (ii).

Rozwiązanie tego równania można wyrazić za pomocą H-funkcji Foxa

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4D_\alpha t^\alpha}} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4D_\alpha t^\alpha} \left| \begin{matrix} (1 - \frac{\alpha}{2}, \alpha) \\ (0, 1), (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right. \right] \quad (2.56)$$

albo w alternatywnej postaci

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4D_\alpha t^\alpha}} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|}{\sqrt{D_\alpha t^\alpha}} \left| \begin{matrix} (1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}) \\ (0, 1) \end{matrix} \right. \right]. \quad (2.57)$$

Najważniejsze własności H-funkcji Foxa, zwłaszcza w domenie Fouriera i w domenie Laplace'a oraz dla sytuacji asymptotycznej, omówiliśmy w Dodatku A.

Bibliografia

- [1] D. Sornette: "Why Stock Markets Crash. Critical Events in Complex Financial Systems", Princeton University Press, Princeton and Oxford 2002.
- [2] R. Nowak: "Statystyka dla fizyków", Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2002.
- [3] A. Fronczak, P. Fronczak: "Świat sieci złożonych. Od fizyki do internetu", Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2009.
- [4] W. D. Phillips: "Laserowe chłodzenie i pułapkowanie atomów obojętnych", Postępy Fizyki, Tom 49 (1998) 310-335.
- [5] F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji: "Lévy Statistics and Laser Cooling. How Rare Events Bring Atoms to Rest", Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002.
- [6] M. Toda, R. Kubo, N. Saito: "Fizyka statystyczna I. Mechanika statystyczna stanów równowagowych", Państwowe Wydawnictwa naukowe, Warszawa 1991.
- [7] K. Huang: "Mechanika statystyczna, Państwowe Wydawnictwa naukowe, Warszawa 1978.
- [8] D. Sornette: "Discrete scaling invariance and complex dimensions", Physics Reports 297 (1998) 239-270.
- [9] (D. Sornette, A. Johansen, J.-P. Bouchaud: "Stock Markets Crashes, Precursors and Replicas", J. Phys. I France 6 (1996) 167-175.
- [10] D. Sornette and A. Johansen: "Large financial crashes", Physica A 245 (1997) 411-422.
- [11] A. Johansen, D. Sornette: "Critical Crashes", Risk 12 (1990) 91-94.
- [12] A. Johansen, D. Sornette: "Bubbles and anti-bubbles in Latin-American, Asian and Western stock markets: An empirical study", International Journal of Theoretical and Applied Finance 4 (2001) 853-920.

- [13] O.J. Blanchard: "Speculative bubbles, crashes and rational expectations", *Economics Letters* 3 (1979) 387-389.
- [14] O.J. Blanchard, M.W. Watson: "Bubbles, rational expectations and speculative markets" w "Crisis in Economic and Financial Structure: Bubbles, Bursts, and Shocks", ed. P. Wachtel, Lexington Books, Lexington, MA.
- [15] R.N. Mantegna, H.E. Stanley: "Ekonofizyka. Wprowadzenie", Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2001.
- [16] E.W. Montroll, M.F. Shlesinger: "On the wonderful world of random walks" w "Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastics to Hydrodynamics", *Studies in Statistical Mechanics*, Vol.XI, eds. J.L. Lebowitz, E.W. Montroll, North-Holland, Amsterdam 1984.
- [17] D. Sornette: "Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Self-organization and Disorder: Concepts and Tools", Springer-Verlag, Berlin 2000;
D. Sornette: "Multiplicative processes and power law", *Physical Review E* 57 (1998) 4811-4813.
- [18] R. Metzler, J. Klafter: "The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractal Dynamics Approach", *Physics Report* 339 (2000) 1-77
- [19] M. Kozłowska, R. Kutner: "Dynamics of the Warsaw Stock Exchange index as analysed by the Mittag-Leffler function", DPG - Fruejahrstagung des Arbeitskreises Festkoerperphysik in conjunction with EPS - 21st General Conference of the Matter Division, Dresden, Germany 2006.

Część II

Procesy gaussowskie

Rozdział 3

Ruch Browna, opalescencja krytyczna, błękit nieba, rozpraszanie krytyczne

Nasuwa się od razu pytanie: co łączy ze sobą wymienione w tytule tego rozdziału, kluczowe dla naszych rozważań, zjawiska? Odpowiedź, podaną niezależnie przez fizyków Alberta Einsteina i Mariana Smoluchowskiego można wyrazić jednym słowem **fluktuacje** - to dzięki istnieniu dużych fluktuacji termicznych w różnych układach złożonych możliwe jest zaobserwowanie ruchów Browna, opalescencji krytycznej i temu podobnych zjawisk. Jednakże pomiędzy tymi zjawiskami występują także zasadnicze różnice co do charakteru fluktuacji chociaż w obu przypadkach są one makroskopowe: w ruchach Browna są ograniczone podczas gdy w zjawiskach krytycznych są z zasady nieograniczone. Odpowiednio do tego mówimy o procesach gaussowskich i niegaussowskich.

Należy podkreślić, że niniejsza praca dotyczy przede wszystkim niegaussowskiego aspektu różnorodnych zjawisk przyrody, w tym biologicznych, medycznych i ekologicznych, ale także zjawisk społecznych i ekonomicznych przy czym zawężona jest do dziedziny błędzeń przypadkowych. Przy czym, procesy gaussowskie stanowią tutaj niezbędną podstawę.

3.1 Ruch Browna

Zrozumienie zjawiska ruchu Browna, które zostało szczegółowo opisane przez angielskiego botanika Roberta Browna w 1827 roku, nastąpiło na początku XX w. i związane jest z nazwiskami fizyków Alberta Einsteina, Paula Langevina, a przede wszystkim Mariana Smoluchowskiego - zawdzięczamy Im wyjaśnienie mechanizmu tego zjawiska w oparciu o kinetyczno-molekularną teorię materii, dynamikę stochastyczną oraz teorię stochastycznych procesów Markowa (patrz N.G. van Kampen: "Procesy stochastyczne w fizyce i chemii", Państwowe Wydawnictwo Naukowe, War-

szawa 1990; R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume: "Fizyka statystyczna II. Mechanika statystyczna stanów nierównowagowych", Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 1991; S. Chandrasekhar, M. Kac, R. Smoluchowski, "Marian Smoluchowski His Life and Scientific Work", PWN, Warszawa 2000; S. Chandrasekhar, "Stochastic Problems in Physics and Astronomy", Rev. Mod. Physics, **15**, 1-89 (1943); B. Cichocki, "Ruchy Browna", Delta (1983) nr 4 str. 4-5 oraz nr 5 str. 6-10; R. Kutner, "Metoda Monte Carlo a ruchy Browna", Delta (1986) nr 9 str. 10-12; B. Średniawa, "Marian Smoluchowski (1872-1917)", Delta (1997) nr 12 str. 3-6). Porównanie teorii z doświadczeniem pozwoliło Jeanowi Perrinowi na wyznaczenie liczby Avogadro, a zatem bezwzględnych mas atomowych i stanowiło przekonujący dowód realności tzw. hipotezy atomistycznej budowy materii, której korzenie sięgają starożytności, poczynając od Demokryta z Abdera (A. Gawryś, Z. Gawryś, "Poczet wielkich fizyków atomistów", Instytut Wydawniczy "Nasza Księgarnia", Warszawa 1976), a przede wszystkim doprowadziło ostatecznie (w roku 1908) do uznania kinetycznej teorii materii stworzonej (w 1898 roku) przez Ludwiga Boltzmanna (który niestety nie dożył tej chwili).

Charakterystyczna własność ruchu Browna to występująca nieustannie nieregularna zmiana położenia makrocząsteczki (np. kuleczki tłuszczu lub pyłku kwiatowego) o rozmiarach rzędu 10^{-4} cm, zawieszona w cieczy (np. w rozcieńczonym mleku albo w wodzie) lub w gazie, wywołana przypadkowymi potrąceniami ze strony otaczających ją znacznie mniejszych (nawet o cztery rzędy wielkości) cząsteczek ośrodka. Inaczej mówiąc, na cząsteczkę zawieszoną działa fluktuująca siła spowodowana chaotycznymi nieskompensowanymi, wielokrotnymi uderzeniami cząsteczek ośrodka. Wynik pojedynczego, całkowicie przypadkowego zderzenia jest bardzo mały (nawet w skali mikroskopowej), jednak sumarycznym efektem dużej liczby tych zderzeń może być, obserwowane przez mikroskop nawet o niewielkim powiększeniu, znaczne wypadkowe przemieszczenie przypadkowe cząstki zawieszony. Oczywiście, aby takie przemieszczenie mogło być zaobserwowane musi istnieć znaczna chwilowa różnica liczby cząstek ośrodka po obu stronach cząsteczki zawieszony. Innymi słowy, *muszą istnieć znaczne fluktuacje liczby cząsteczek ośrodka w otoczeniu cząsteczki zawieszony* - zostało to po raz pierwszy wykazane przez Smoluchowskiego, który wykorzystał w tym celu rozkład dwumianowy Bernoulliego¹. Te znaczne fluktuacje prowadzą do przekazu wystarczająco dużego pędu makrocząsteczce ze strony cząsteczek ośrodka, skutkującego właśnie zauważalnym przemieszczeniem makrocząsteczki.

Podejście Smoluchowskiego

Dokładnie rzecz biorąc, pytanie jakie postawił Smoluchowski brzmiało następujące: jaka jest, średnio rzecz biorąc, nadwyżka, $\langle \Delta n (= n_R - n_L) \rangle > 0$, liczby cząsteczek ośrodka, n_R , znajdujących się, na przykład, po prawej stronie cząsteczki zawieszony względem tych po lewej, n_L , (przy czym $n_R + n_L = n$, gdzie n jest całkowitą liczbą

¹Dla prostoty rozkład dwumianowy nazywamy także rozkładem Bernoulliego.

bą cząsteczek ośrodka znajdujących się w najbliższym otoczeniu makrocząsteczki zawiesiny)? Tą wartość średnią obliczył bardzo prosto

$$\langle \Delta n \rangle = \sum_{\Delta n > 0}^n \Delta n \cdot p_n(\Delta n), \quad (3.1)$$

gdzie prawdopodobieństwo nadwyżki

$$p_n(\Delta n) = \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{\frac{n+\Delta n}{2}} \right) \quad (3.2)$$

zostało otrzymane przez naturalnym założeniu równego prawdopodobieństwa znalezienia pojedynczej cząsteczki ośrodka po obu stronach makromolekuły (przy czym wyrażenie w nawiasie jest dobrze znanym współczynnikiem dwumianowym zwanym także czynnikiem Newtona, patrz J. Antoniewicz: "Tablice matematyczno-fizyczne", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991); należy pamiętać, że suma w wyrażeniu (3.1) rozciąga się tylko na takie wartości Δn , które posiadają taką samą parzystość jak samo n . Oczywiście pytanie Smoluchowskiego dotyczy sytuacji dla dużych wartości n (szacuje się, że w normalnych warunkach, w ciągu jednej sekundy z makrocząsteczką zawiesiny zderza się, średnio rzecz biorąc, $n \approx 10^{20}$ cząsteczek ośrodka). Stosując do wyrażenia (3.1) wzór Stirlinga, otrzymujemy z dobrym przybliżeniem, że²

$$\langle \Delta n \rangle \sim \sqrt{n}. \quad (3.3)$$

Oznacza to, że w normalnych warunkach ogromna liczba, średnio rzędu 10^{10} nadmiarowych cząsteczek ośrodka, zderza się w ciągu jednej sekundy z jedną ze stron makromolekuły co może prowadzić do widocznego pod mikroskopem, nawet o niewielkim powiększeniu (rzędu 10^2) przemieszczenia cząsteczki zawiesiny. Używając języka teorii gier (często stosowanej na rynkach finansowych), możemy stwierdzić, że im dłużej toczy się gra tym średnia wielkość wygranej albo przegranej rośnie pierwiastkowo z czasem.

Otrzymany wynik nie jest sprzeczny z faktem, że średnia liczba cząsteczek ośrodka po obu stronach makromolekuły jest równa i wynosi $\langle n_L \rangle = \langle n_R \rangle = n/2$, gdyż jest on związany z fluktuacją liczby cząsteczek n_J , $J = L, R$, po obu stronach, czyli z dyspersją $\sigma(n_J) = \sqrt{\langle (n_J - \langle n_J \rangle)^2 \rangle}$, $J = L, R$. Ponownie korzystając z rozkładu Bernoulliego. można łatwo obliczyć, że dyspersja cząsteczek ośrodka po każdej ze stron makrocząsteczki zawiesiny

$$\sigma(n_J) \sim \sqrt{n}, \quad J = L, R; \quad (3.4)$$

czyli znaczny nadmiar cząsteczek po jednej stronie jest związany oczywiście z ich znaczącym deficytem po drugiej; w efekcie daje to rozrzut w pełni zgodny z wynikiem (3.3).

²W Dodatku B zamieszczono wyprowadzenie wzoru (3.3).

Oczywiście, Smoluchowskiemu udało się rozwiązać wiele innych wątpliwości (na przykład dotyczących średniej prędkości cząsteczki zawiesiny), których tutaj już nie będziemy omawiać. Można powiedzieć, że *możliwość występowania znacznych fluktuacji gęstości ośrodka* w bezpośrednim otoczeniu cząsteczki zawiesiny oraz *przypadkowość w jej ruchu* przejawiająca się w postaci zygzakowatej trajektorii błędzącej makromolekuły, *leżą u podstaw statystycznego charakteru ruchu Browna*.

3.2 Słów kilka o fraktalnym ruchu Browna

Jest jeszcze jeden prosty ale istotny aspekt ruchu Browna, na który zwrócił uwagę amerykański matematyk Benoit B. Mandelbrot a który później został przez niego wykorzystany do opisu ułamkowych (fraktalnych) ruchów Browna m.in. na rynkach finansowych (B.B. Mandelbrot: "Multifraktale rządzą na Wall Street", Świat Nauki **92** (1999) 64-67; G. Paladin, A. Vulpiani: "Anomalous Scaling Laws in Multifractal Objects", Physics Reports **156** (1987) 147-225). Mianowicie, w miarę upływu czasu cząsteczka zawiesiny odwiedza coraz większą liczbę punktów płaszczyzny, wizytując w granicy (jak się wydaje) prawie wszystkie równie często (średnio rzecz biorąc) zatem, wymiar fraktalny (Hausdorffa) d_f trajektorii brownowskiej jest równy 2 natomiast jej wymiar topologiczny d_{top} wynosi 1 (gdyż jest to nadal linia); do omawiania tych zagadnień powrócimy w rozdz. ?? w kontekście zaobserwowanych przez angielskiego hydrologa H.E. Hursta w roku 1951 i analizowanych przez B.B. Mandelbrota (poczynając od roku 1971) fraktalnych ruchów Browna, dla których $0 < d_f < 2$, (H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: "Granice Chaosu. Fraktale", tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997).

Hurst badał wariancję (a więc fluktuacje) poziomu rzeki Nilu w zależności od czasu³ zauważając, iż zależność ta jest superliniowa czyli persystentna (a nie liniowa jak dla ruchów Browna) co pozwoliło mu lepiej określić rozmiary zbiornika wodnego tamy a jednocześnie zapoczątkowało badania nad błędzeniami niebrownowskimi.

3.3 Zjawisko opalescencji krytycznej i zjawisko Tyndalla

Rola fluktuacji, wskazana przez Smoluchowskiego, przejawia się szczególnie wyraźnie w zjawisku opalescencji krytycznej ("Słownik fizyczny", Wiedza Powszechna, Warszawa, 1984; "Encyklopedia Fizyki Współczesnej", PWN, Warszawa, 1983) które należy do szerokiej grupy zjawisk krytycznych związanych z rozpraszaniem promieniowania na układach znajdujących się w obszarze przejścia fazowego. Zjawisko

³Hurst, jako hydrolog, uczestniczył w projektowaniu tamy assuańskiej dysponując odnalezionymi rejestrami poziomu Nilu prowadzonymi przez Egipcjan od blisko 850 lat (J. Czekaj, M. Woś, J. Żarnowski: "Efektywność giełdowego rynku akcji w Polsce z perspektywy dziesięciolecia", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001).

to polega na tym że ośrodki, które w warunkach normalnych są dla promieniowania optycznie przezroczyste, w pobliżu punktu krytycznego mętnieją a natężenie promieniowania rozproszonego⁴ na tych ośrodkach pod niezerowym kątem (względem kierunku fali padającej) gwałtownie rośnie - mówimy wtedy o rozpraszaniu krytycznym. Zatem w zjawisku opalescencji krytycznej mamy do czynienia z rozpraszaniem krytycznym. Zjawisko opalescencji krytycznej zostało wyjaśnione przez Mariana Smoluchowskiego. Wykazał on, że gwałtowny wzrost promieniowania rozproszonego (pod niezerowym kątem) jest spowodowany makroskopowymi fluktuacjami gęstości ośrodka w pobliżu punktu krytycznego - tym samym układ staje się wysoce niejednorodny a dużym zgęszczeniom ośrodka towarzyszą jego znaczne rozrzedzenia. Innymi słowy, te duże fluktuacje powodują wystąpienie zjawisk charakterystycznych dla ośrodków mętnych - obok wspomnianych powyżej także takich jak zjawisko Tyndalla⁵. Smoluchowski zauważył na przykład, że fluktuacje gęstości powietrza (przede wszystkim cząsteczek tlenu i azotu) wywołują lokalne zmiany współczynnika załamania światła, powodując przez to wzrost rozpraszania światła w atmosferze. Ponieważ rozpraszanie to jest największe dla fal krótkich⁶, więc w wyniku przechodzenia światła przez atmosferę niebo uzyskuje zabarwienie błękitne. Analogiczne zjawiska występują również w magnetykach gdzie obserwuje się krytyczne rozpraszanie neutronów na fluktuacjach momentów magnetycznych w pobliżu temperatury Curie; podobnie rzecz się ma z krytycznym rozpraszaniem promieni rentgenowskich na ferroelektrykach i stopach podwójnych.

W pierwszej części pracy dajemy przegląd najważniejszych elementów tematyki dotyczącej procesów gaussowskich - jest to konieczny wstęp do procesów niegaussowskich, stanowiących zasadniczą część (drugą), niniejszej pracy.

3.4 Wstępne definicje

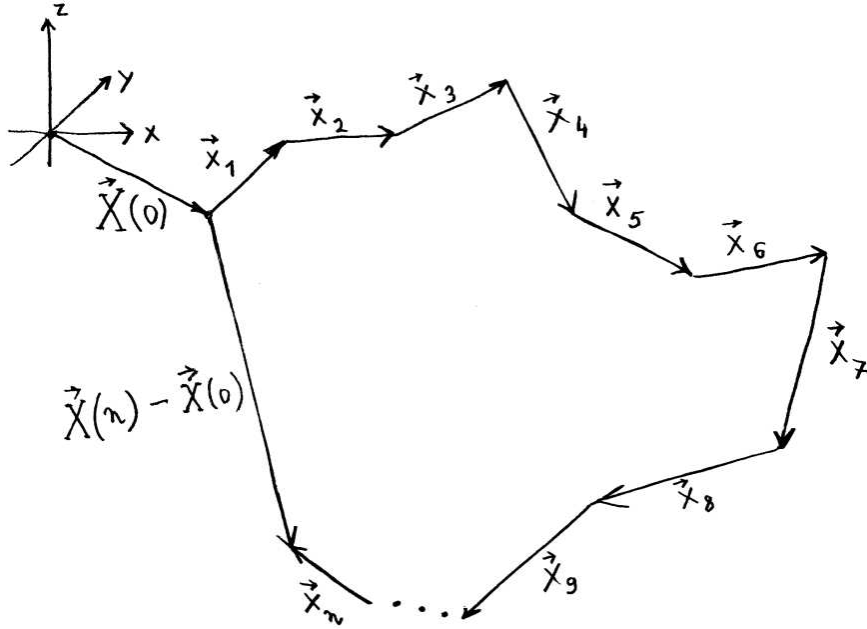
Rozważamy przykładowo błędzenie przypadkowe pojedynczej cząsteczki zawiesiny przedstawione schematycznie na rys.3.1, gdzie wektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ oznaczają kolejne przypadkowe przemieszczenia cząsteczki (n jest całkowitą liczbą tych przemieszczeń). Sumaryczne (wypadkowe) przemieszczenie cząsteczki wyraża się wzorem

$$\vec{X}(n) - \vec{X}_0 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n, \quad (3.5)$$

⁴Jest to tzw. rayleighowskie rozpraszanie czyli rozpraszanie światła bez zmiany jego długości fali, "Encyklopedia fizyki współczesnej", PWN Warszawa 1983.

⁵Ogólnie mówiąc, zjawisko to występuje np. przy przechodzeniu światła przez ośrodek wysoce niejednorodny; niejednorodność ta może być spowodowana nie tylko makroskopowymi fluktuacjami ale np. makromolekułami aero- lub hydrozoli takimi jak dym, mgła albo koloid, "Słownik fizyki", Prószyński i S-ka Warszawa 1999.

⁶Moc rozproszonej fali elektromagnetycznej, czyli reemitowanej przez drgające dipole cząsteczek gazów pobudzonych przez falę padającą, jest zgodnie ze wzorem Rayleigha, wprost proporcjonalna do kwadratu objętości (kulistego) obiektu rozpraszającego i odwrotnie proporcjonalna do czwartej potęgi długości fali co faworyzuje oczywiście fale krótkie.



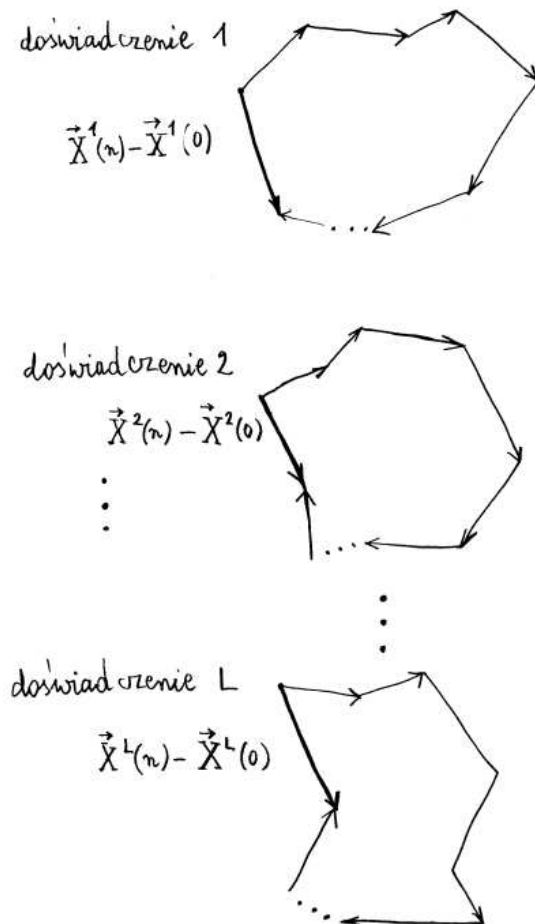
Rysunek 3.1: Prosta, graficzna reprezentacja sumarycznej zmiennej losowej $\vec{X}(n) - \vec{X}(0) = \sum_{j=1}^n \vec{x}_j$.

(gdzie $\vec{X}_0$ jest położeniem początkowym cząsteczki zawiesiny a $\vec{X}(n)$ jej położeniem końcowym); z matematycznego punktu widzenia, zarówno pojedyncze jak też sumaryczne przemieszczenia traktujemy jak (wektorowe) zmienne losowe tzn. takie co do których wiadomo, że ich występowanie opisane jest jakimiś rozkładami prawdopodobieństwa - w dalszym ciągu przyjmujemy, że *pojedyncze przemieszczenia opisane są identycznym rozkładem*, co wynika bezpośrednio z obserwacji.

3.5 Pierwszy i drugi moment

Pytanie jakie stawiamy na wstępie dotyczy zależności średniej z kwadratu wypadkowego przemieszczenia $\langle (\vec{X}(t) - \vec{X}_0)^2 \rangle$ cząsteczki zawiesiny (startującej z punktu $\vec{X}_0$) od czasu t ; przy okazji, obliczamy średnią z sumarycznego przemieszczenia $\langle \vec{X} - \vec{X}_0 \rangle$. Występująca tutaj oraz wszędzie w tym rozdziale średnia (którą oznaczamy przez $\langle \dots \rangle$) jest średnią (arytmetyczną) po zespole statystycznym doświadczeń podobnych o czym jest mowa poniżej (patrz rys. 3.2). W przypadku *blędzenia cząsteczek statystycznie niezależnych*, co ma miejsce np. dla rozcieńczonych zawiesin, taka średnia jest oczywiście równoważna średniej (arytmetycznej) po liczbie cząsteczek.

Na rys.3.2 przedstawiono zespół statystyczny doświadczeń przeprowadzonych w



Rysunek 3.2: Zespół statystyczny złożony z L doświadczeń podobnych (realizacji czyli makroskopowych replik) ruchu Browna pojedynczej makromolekuły.

identycznych warunkach termodynamicznych, co oczywiście nie oznacza, że wyniki tych doświadczeń są identyczne. Jak widać, w różnych doświadczeniach sumaryczne przemieszczenie cząsteczki $\vec{X}^l(n) - \vec{X}_0^l$ jest (na ogół) różne podobnie jak różne są (na ogół) pojedyncze przemieszczenia $\vec{x}_j^l$, gdzie $j = 1, 2, \dots, n$, numeruje kolejne pojedyncze przemieszczenia, natomiast $l = 1, \dots, L$, numeruje kolejne doświadczenia w zespole statystycznym doświadczeń (L jest liczebnością tego zespołu - w praktyce dobiera się $L \gg 1$). Możemy teraz zdefiniować potrzebne nam pierwsze dwa momenty zmiennej losowej $\vec{X}(n) - \vec{X}_0$ w postaci następującej średniej arytmetycznej,

$$\langle (\vec{X}(n) - \vec{X}_0)^m \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\vec{X}^l(n) - \vec{X}_0^l)^m \approx \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\vec{X}^l(n) - \vec{X}_0^l)^m, \quad m = 1, 2, \quad (3.6)$$

którą nazywa się właśnie *średnią po zespole*. (Zdefiniowana powyżej operacja nie zawiera oczywiście średniowania po liczbie cząsteczek gdyż dotyczy przypadku błędzenia pojedynczej cząsteczki zawiesiny.) Równość przybliżona dotyczy przypadku, gdy średnie są skończone bowiem wówczas, na mocy *prawa wielkich liczb*, można z kontrolowaną dokładnością przybliżyć wartość graniczną przez średnią dla odpowiednio dobranego skończonego L (często rzędu np. 10^4).

Zakładamy, że przestrzeń, w której odbywa się błędzenie jest izotropowa (przypadek przestrzeni anizotropowej związanej z istnieniem zewnętrznego pola rozważamy w dalszych rozdziałach). Dla L dostatecznie dużego otrzymuje się z dobrym przybliżeniem, że pierwszy moment (odpowiadający przyjęciu w wyrażeniu (3.6) $m = 1$),

$$\langle \vec{X}(n) - \vec{X}_0 \rangle = 0, \quad (3.7)$$

co dobrze widać na rys.3.3. Przedstawiono na nim zależność $\langle \vec{X}(n) - \vec{X}_0 \rangle$ od L uzyskaną na drodze symulacji Monte Carlo⁷. Wynik ten jest niemal oczywisty jeżeli uprzytomnimy sobie, że dla dostatecznie dużych L sumaryczne przemieszczenie uzyskane w dowolnie wybranym doświadczeniu posiada, z dobrym przybliżeniem, swoje kontrprzemieszczenie (przemieszczenie przeciwne) otrzymane w jakimś innym doświadczeniu.

Wobec tego, obliczenie drugiego momentu $\langle (\vec{X}(n) - \vec{X}_0)^2 \rangle$ jest równoważne (w przypadku przestrzeni izotropowej) wyznaczeniu dyspersji (wariancji) wypadkowego przemieszczenia $\vec{X}(n) - \vec{X}_0$,

$$\begin{aligned} (\sigma_X(n))^2 &= \langle (\vec{X}(n) - \vec{X}_0)^2 \rangle - \langle \vec{X}(n) - \vec{X}_0 \rangle^2 = \langle (\vec{X}(n))^2 \rangle - \langle \vec{X}(n) \rangle^2 \\ &= \langle (\vec{X}(n) - \vec{X}_0)^2 \rangle; \end{aligned} \quad (3.8)$$

wyprowadzamy związek pomiędzy dyspersją $\sigma_X(n)$ wypadkowego przemieszczenia (składającego się z n pojedynczych przemieszczeń) a dyspersją σ_x pojedynczego przemieszczenia. Związek ten stanowi pierwszy punkt tezy *centralnego twierdzenia granicznego*, które formułujemy w dalszej części.

Z (3.5), (3.6), (3.7) oraz (3.8) otrzymujemy natychmiast, że

$$\begin{aligned} (\sigma_X(n))^2 &= \langle (\vec{X}(n) - \vec{X}_0)^2 \rangle = \langle (\sum_{j=1}^n \vec{x}_j)^2 \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle (\vec{x}_j)^2 \rangle + \sum_{i \neq j}^n \langle \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j \rangle, \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie skorzystaliśmy z własności addytywności średniej, wynikającej bezpośrednio z określenia (3.6), mówiącej że *średnia sumy zmiennych losowych jest równa sumie średnich tych zmiennych*.

Wykorzystujemy teraz własność multiplikatywności średniej mówiącą, że *średnia z iloczynu niezależnych zmiennych losowych jest równa iloczynowi średnich tych*

⁷Dla uproszczenia i przyspieszenia symulacji wszystkie elementarne przemieszczenia są tutaj jednakowej długości.

zmiennych; własność ta wynika także z (3.6) po odpowiednim przegrupowaniu składników wchodzących w skład występującej tam sumy. Dla rozcieńczonych zawieszin, nie dostrzegamy w ruchach Browna żadnej zależności (lub inaczej mówiąc korelacji) pomiędzy różnymi pojedynczymi przemieszczeniami cząsteczek zawiesziny - stąd założenie o statystycznej niezależności tych przemieszczeń jest usprawiedliwione. Zatem wykorzystując równość (3.9), otrzymujemy natychmiast

$$(\sigma_X(n))^2 = \sum_{j=1}^n \langle (\vec{x}_j)^2 \rangle = n \langle (\vec{x})^2 \rangle = n(\sigma_x)^2, \quad (3.10)$$

gdzie opuściliśmy wskaźnik indeksujący numer kroku aby podkreślić niezależność średniej z kwadratu pojedynczego przemieszczenia od jego numeru co wynika z faktu, że pojedyncze przemieszczenia są równoprawne - jest to skutek jednorodności czasu oraz jednorodności przestrzeni. Ponadto, podobnie jak dla sumarycznego przemieszczenia, skorzystaliśmy z izotropowości przestrzeni prowadzącej do znikania pierwszego momentu pojedynczego przemieszczenia

$$\langle \vec{x}_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Wyrażenie (3.10) jest kluczowym gdyż pozwala (co wykażemy w dalszej części) wyrazić tak ważną wielkość jaką jest (makroskopowy) współczynnik dyfuzji za pomocą wielkości mikroskopowych charakteryzujących pojedyncze przemieszczenia cząsteczki.

Równość (3.10) można przepisać w postaci jawnie uwzględniającej czas; w tym celu wprowadzamy elementarny przedział czasu τ charakteryzujący średni czas upływający pomiędzy kolejnymi, pojedynczymi przemieszczeniami (istnienie takiego czasu oznacza, że rozkład czasów oczekiwania pomiędzy kolejnymi przemieszczeniami dany jest rozkładem Poissona - patrz Dodatek ...). Stąd,

$$(\sigma_X(t))^2 = \langle (\vec{X}(t) - \vec{X}_0)^2 \rangle = 2d(t - t_0)D, \quad (3.12)$$

gdzie d jest wymiarem przestrzeni Euklidesowej, w której zachodzi błądzenie, $t - t_0 = n\tau$ czasem, natomiast

$$D = \frac{1}{2d} \frac{(\sigma_x)^2}{\tau}, \quad (3.13)$$

określa, o czym jest mowa także w dalszej części, współczynnik dyfuzji cząstek zawiesziny w nieobecności zewnętrznego pola. Należy podkreślić, że powyższe przejście do obrazu ciągłego w czasie jest możliwe, z dobrym przybliżeniem, tylko wtedy gdy $t - t_0 \gg \tau$ co odpowiada wykonaniu przez cząsteczkę dużej liczby przemieszczeń - oznacza to, że $n \gg 1$ i w rezultacie cząsteczka ma możliwość penetrowania znacznych obszarów przestrzeni. Innymi słowy, rozpatrujemy *błądzenie cząsteczki w skali makroskopowej*, które tym samym jest scharakteryzowane makroskopowym współczynnikiem D . Zatem ściśle rzecz biorąc, wyrażenie (3.12) należy zapisać w postaci

wykorzystującej przejście graniczne

$$D = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2d} \frac{(\sigma_X(t))^2}{t - t_0}, \quad (3.14)$$

podkreślającej makroskopowy charakter współczynnika dyfuzji D . Jak widać, współczynnik dyfuzji można wyznaczać na dwa zasadniczo różne sposoby: 1) makroskopowy, za pomocą wyrażenia (3.14) oraz 2) mikroskopowy, stosując wyrażenie (3.13). Jest to uderzająca dualność sugerująca samopodobny, niezależny od skali w jakiej prowadzone są pomiary, charakter błędzenia - do problemu tego powrócimy w dalszej części.

3.6 Propagator

Celem niniejszego rozdziału jest wyznaczenie asymptotycznej gęstości prawdopodobieństwa warunkowego $\mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)$ znalezienia cząsteczki zawieszony w położeniu $\vec{X}$ w chwili t pod warunkiem, że w chwili początkowej t_0 cząsteczka znajdowała się w położeniu $\vec{X}_0$. Cel ten zostanie zrealizowany dzięki odpowiedniej dekompozycji propagatora. Przy okazji zostanie wyprowadzona druga część **Centralnego Twierdzenia Granicznego**.

3.6.1 Dekompozycja propagatora

Innymi słowy, naszym celem jest znalezienie jednocząstkowego propagatora - możemy go wyrazić w postaci następującej dekompozycji (superpozycji),

$$\mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(\vec{X}, t, n \mid \vec{X}_0, t_0), \quad (3.15)$$

gdzie $\mathcal{P}(\vec{X}, t, n \mid \vec{X}_0, t_0)$ jest gęstością prawdopodobieństwa warunkowego znalezienia cząsteczki zawieszony w położeniu $\vec{X}$ w chwili t w wyniku dokładnie n przemieszczeń pod warunkiem, że w chwili początkowej t_0 cząsteczka znajdowała się w położeniu $\vec{X}_0$. W dalszym ciągu $\mathcal{P}(\vec{X}, t, n \mid \vec{X}_0, t_0)$ można zapisać w postaci,

$$\mathcal{P}(\vec{X}, t, n \mid \vec{X}_0, t_0) = \mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_0 \mid t - t_0, n) \psi(t - t_0, n), \quad (3.16)$$

gdzie $\mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_0 \mid t - t_0, n)$ jest gęstością prawdopodobieństwa warunkowego przemieszczenia cząsteczki o wektor $\vec{X} - \vec{X}_0$ pod warunkiem, że nastąpiło to w przeciągu czasu $t - t_0$ w wyniku n pojedynczych przemieszczeń; $\psi(t - t_0, n)$ jest prawdopodobieństwem wykonania przez cząsteczkę w przeciągu czasu $t - t_0$ dokładnie n przemieszczeń.

Obecnie zajmiemy się obliczeniem gęstości prawdopodobieństwa $\mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_0 \mid t - t_0, n)$. W niniejszej części zakładamy, że jest ono niezależne od czasu $t - t_0$ co ma miejsce wtedy gdy środowisko, w którym zachodzi błędzenie cząsteczki pozostaje

w każdej chwili w stanie równowagi statystycznej (dopuszczającej, rzecz jasna, istnienie fluktuacji). Zatem, ma miejsce następująca oczywista konwolucyjna równość łańcuchowa,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_0 | n) &= \int \mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_1 | n-1) \mathcal{P}(\vec{X}_1 - \vec{X}_0 | 1) d\vec{X}_1 \\ &= \mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_1 | n-1) \otimes \mathcal{P}(\vec{X}_1 - \vec{X}_0 | 1),\end{aligned}\quad (3.17)$$

gdzie całkowanie w (3.17) jest przeprowadzone po całej, nieograniczonej przestrzeni euklidesowej; wykonując kolejne kroki rekurencyjne (dla $n = 2, 3, \dots$) otrzymujemy następującą n -krotną konwolucję

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_0 | n) &= \mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_{n-1} | 1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(\vec{X}_3 - \vec{X}_2 | 1) \\ &\otimes \mathcal{P}(\vec{X}_2 - \vec{X}_1 | 1) \otimes \mathcal{P}(\vec{X}_1 - \vec{X}_0 | 1).\end{aligned}\quad (3.18)$$

Po dokonaniu transformacji Fouriera i skorzystaniu z własności, że **transformata Fouriera konwolucji ciągu funkcji jest równa iloczynowi transformat Fouriera tych funkcji** wyrażenie (3.18) przybiera postać,

$$\tilde{\mathcal{P}}(\vec{k} | n) = \tilde{\mathcal{P}}(\vec{k} | 1)^n = \exp(n \ln(\tilde{\mathcal{P}}(\vec{k} | 1))), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.19)$$

gdzie

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d\vec{X} \mathcal{F}(\vec{X}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{X}) \quad (3.20)$$

jest transformatą Fouriera funkcji $\mathcal{F}(\vec{X})$ (całkowanie w (3.20) jest, identycznie jak w (3.17), przeprowadzone po całej, nieograniczonej przestrzeni euklidesowej).

W dalszym ciągu wprowadzimy prostsze oznaczenia, mianowicie

$$\tilde{\mathcal{P}}(\vec{k} | 1) = \tilde{p}(\vec{k}) \quad (3.21)$$

oraz

$$\mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_0 | 1) = \mathcal{P}(\vec{X} - \vec{X}_0); \quad (3.22)$$

$\tilde{p}$ nosi nazwę funkcji tworzącej prawdopodobieństwa $\mathcal{P}$, czasami nazywa się ją także czynnikiem strukturalnym błędzenia przypadkowego. Innymi słowy,

$$\tilde{p}(\vec{k}) = \int d\vec{X} \mathcal{P}(\vec{X}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{X}), \quad (3.23)$$

gdzie stosujemy oznaczenia $\vec{k} \equiv (k_x, k_y, \dots) \equiv (k_1, \dots, k_d) \equiv \{k_j\}_{j=1,d}$ (przy czym d jest wymiarem przestrzeni Euklidesowej); powyższe równanie wraz z (3.19) pozwoli nam podać warunki w jakich buduje się rozkład Gaussa dla n -krokowej zmiennej losowej (czyli sumarycznego przemieszczenia $\vec{X} - \vec{X}_0$).

Wprowadzimy teraz definicję rozkładów stabilnych oraz rozkładów nieskończenie podzielnych. Mianowicie, o **rozkładzie stabilnym** mówimy wtedy i tylko wtedy gdy $\forall \vec{Y}$ prawdopodobieństwo $\mathcal{P}(\vec{Y} | n)$ jest, z dokładnością do czynnika skalującego (zarówno zmienną niezależną jak i samo prawdopodobieństwo), równe $\mathcal{P}(\vec{Y} | 1)$ tzn. gdy istnieje taka liczba a zależna od n , że

$$a^d \mathcal{P}(a\vec{Y} | n) = \mathcal{P}(\vec{Y} | 1), \quad n \geq 1. \quad (3.24)$$

Oznacza to, że rozciągnięciu zmiennej niezależnej musi towarzyszyć spłaszczenie rozkładu tak aby zachować jego normalizację. Z relacji skalowania (3.24), (w oparciu o (3.19) i (3.21)) wynika, że

$$\tilde{p}(a\vec{k}) = [\tilde{p}(\vec{k})]^n \equiv \tilde{p}(\vec{k}) = [\tilde{p}(a\vec{k})]^n. \quad (3.25)$$

Z rozkładem **nieskończenie podzielnym** mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego naturalnego n jego funkcja charakterystyczna $\tilde{\phi}(\vec{k})$ jest n -tą potęgą jakiejś funkcji charakterystycznej $\tilde{\phi}_n(\vec{k})$, czyli

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = [\tilde{\phi}_n(\vec{k})]^n. \quad (3.26)$$

Zostanie pokazane w dalszej części, że rozkłady stabilne są jednocześnie nieskończenie podzielne (ale nie odwrotnie, co schematycznie ilustruje rys.3.4).

Przykład 1: rozkład Gaussa

Obserwacje ruchów Browna prowadzą do wniosku, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa kolejnego pojedynczego przemieszczenia cząsteczki zawieszony jest niezależny od jego numeru. Powyższy wniosek jest niemal oczywisty w świetle założenia o statystycznej niezależności pojedynczych przemieszczeń oraz jednorodności czasu. Przypuśćmy, że rozkład ten jest dany krzywą Gaussa, co stanowi dobre przybliżenie rzeczywistej sytuacji. Zatem, niech

$$\mathcal{P}(\vec{x}_j) = \mathcal{P}_G(\vec{x}_j) = \frac{1}{[2\pi(\sigma_x)^2]^{d/2}} \exp(-(\vec{x}_j)^2/2(\sigma_x)^2) \quad (3.27)$$

(gdzie skorzystaliśmy z oznaczeń (3.5) i (3.22)). Podstawiając powyższy rozkład do definicji funkcji charakterystycznej (3.21), otrzymujemy funkcję charakterystyczną, $\tilde{p}_G(\vec{k})$, rozkładu Gaussa także w postaci funkcji Gaussa,

$$\tilde{p}_G(\vec{k}) = \exp(-(\sigma_x)^2 k^2). \quad (3.28)$$

Zgodnie z powyższą zależnością oraz relacją (3.19), funkcja charakterystyczna rozkładu sumarycznej zmiennej losowej $\vec{X}(n)$ (patrz (3.5)) przyjmuje także, dla każdego $n \geq 1$, postać funkcji Gaussa,

$$\tilde{P}_G(\vec{k} | n) = \exp(-(\sigma_x)^2 k^2 n). \quad (3.29)$$

Stąd, odwracając relację (3.23) otrzymujemy,

$$P_G(\vec{X}(n)) = \frac{1}{[2\pi(\sigma_X)^2]^{d/2}} \exp(-(\vec{X}(n))^2/2(\sigma_X)^2), \quad (3.30)$$

rozkład Gaussa, przy czym dyspersja tego rozkładu σ_X jest dana wzorem (3.10). Jak widać, rozkład Gaussa jest rozkładem stabilnym, przy czym czynnik skalujący wynosi tutaj $a = n^{1/2}$. Łatwo sprawdzić, iż jest on także rozkładem nieskończenie podzielny.

Przykład 2: rozkład Lorentza

Przypuśćmy, że w pewnych warunkach, np. w pobliżu punktu krytycznego czy też na granicy faz, błądząca cząsteczka może od czasu do czasu wpadać w poślizg ("zrywać" tarcie) co może prowadzić z rzadka do długich pojedynczych przemieszczeń. Tego typu zachowanie (o czym będzie obszernie mowa w dalszej części) może prowadzić do rozkładu Lorentza, który nie posiada skończonej dyspersji. Funkcja charakterystyczna rozkładu Lorentza jest dana w postaci następującej funkcji wykładniczej,

$$\tilde{p}_L(\vec{k}) = \exp(-\gamma |\vec{k}|). \quad (3.31)$$

Stąd, funkcja gęstości rozkładu Lorentza przyjmuje postać,

$$\mathcal{P}_L(\vec{x}_j) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + (\vec{x}_j)^2}, \quad (3.32)$$

przy czym rozważamy dla prostoty tylko przypadek jednowymiarowy. Podstawiając, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wyrażenie (3.31) do relacji (3.19) otrzymujemy funkcję charakterystyczną sumarycznej zmiennej losowej,

$$\tilde{P}_L(\vec{k} | n) = \exp(-\gamma |\vec{k}| n) \quad (3.33)$$

a stąd jej rozkład

$$\mathcal{P}_L(\vec{X}(n)) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{n \gamma^2 + (\vec{X}(n)/n)^2}. \quad (3.34)$$

Jak widać, czynnik skalujący $a = n$, czyli rozkład Lorentza jest stabilny oraz nieskończenie podzielny.

Kończąc (na razie) omawianie tych przykładów zauważmy, że wszystkie one dają się wyrazić za pomocą wspólnej, ogólnej funkcji charakterystycznej

$$\tilde{p}(\vec{k}) = \exp(-const |\vec{k}|^\beta), \quad (3.35)$$

gdzie wykładnik $0 \leq \beta \leq 2$. Będzie jeszcze o tym mowa w dalszej części.

3.6.2 Rozkłady asymptotycznie gaussowskie

Rozwińmy w szereg Taylora funkcję charakterystyczną $\tilde{p}(\vec{k})$,

$$\tilde{p}(\vec{k}) = 1 - \frac{1}{2}k^2(\sigma_x)^2 + \Theta(\{(k_j)^4\}_{j=1,d}) \quad (3.36)$$

gdzie

$$(\sigma_x)^2 = \int d\vec{X} \vec{X}^2 \mathcal{P}(\vec{X}); \quad (3.37)$$

przyjeliśmy tutaj, że przestrzeń jest izotropowa (np. nie występuje dryf) co oznacza, że funkcja charakterystyczna jest parzystą funkcją $\vec{k}$ (czyli pierwsza pochodna po $\vec{k}$ znika oraz reszta Θ jest także parzystą funkcją $\vec{k}$); ponadto, założyliśmy, że spełniony jest pierwszy punkt *centralnego twierdzenia granicznego* tzn. $\sigma_x < \infty$. Należy podkreślić, że rozwinięcie (3.36) nie oznacza, że wyższe (niż druga) pochodne funkcji charakterystycznej istnieją - w ogólności tak być nie musi. W dalszym ciągu, dla małych wartości $|\vec{k}|$ tzn. dla $k_j^2 \ll 1$, $j = 1, \dots, d$, korzystając z (3.36) możemy z dobrym przybliżeniem wyrazić (3.19) w postaci funkcji wykładniczej

$$\tilde{\mathcal{P}}(\vec{k} | n) \approx \exp(-\frac{1}{2}(\sigma_X(n))^2 k^2), \quad (3.38)$$

gdzie $(\sigma_X(n))^2$ dane jest wyrażeniem (3.10). Oczywiście, gdyby nie był spełniony pierwszy punkt CTG rozwinięcie nie byłoby możliwe i wtedy zamkniętej postaci $\tilde{\mathcal{P}}(\vec{k} | n)$ musielibyśmy poszukiwać na innej drodze; takiej właśnie sytuacji dotyczy część druga niniejszej pracy. W oparciu o (3.38) możemy wyznaczyć $\tilde{\mathcal{P}}(\vec{X} - \vec{X}_0 | n)$ jako transformatę Fouriera

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}(\vec{X} - \vec{X}_0 | n) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d\vec{k} \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0)) \tilde{\mathcal{P}}(\vec{k} | n) \\ &\approx \frac{1}{[2\pi(\sigma_X(n))^2]^{d/2}} \exp[-(\vec{X} - \vec{X}_0)^2 / 2(\sigma_X(n))^2]; \end{aligned} \quad (3.39)$$

przy czym powyższa, gaussowska postać rozkładu $\tilde{\mathcal{P}}(\vec{X} - \vec{X}_0 | n)$ jest słuszna dla dużych wartości przemieszczenia, tzn. dla $|\vec{X} - \vec{X}_0| \gg 1$. Oczywiście, warunek ten da się w zasadzie spełnić wtedy gdy $n \gg 1$ czyli dla asymptotycznie dużej liczby pojedynczych przemieszczeń. Zatem rozkład $\tilde{\mathcal{P}}(\vec{X} - \vec{X}_0 | n)$ przybiera asymptotycznie postać rozkładu Gaussa (3.39). Stanowi to treść drugiego (i ostatniego) punktu *centralnego twierdzenia granicznego*.

3.7 Proces Markowa - równanie Mistrza

Bazując na obserwacji ruchów Browna pojedynczej cząsteczki zawiesiny, można zaproponować do ich opisu równość łańcuchową Bachelier'a-Chapmana-Kołmogorowa

(S. Chandrasekhar: "Stochastic Problems in Physics and Astronomy", "Review of Modern Physics", **15** (1943) 1-89; E. W. Montroll, B.J. West: "Studies in Statistical Mechanics", Vol. VII, Eds. E.W. Montroll, J.L. Lebowitz, North-Holland, Amsterdam 1979; N.G. van Kampen: "Procesy stochastyczne w fizyce i chemii", PWN, Warszawa 1990 (tłum. z j. angielskiego); R. Kubo, M. Toda, N. Hashitane: "Fizyka statystyczna II. Mechanika statystyczna stanów nierównowagowych", Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 1991; I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod: "Introduction to the Theory of Random Processes", Dover Publ. Inc., New York 1996 (tłum. z j. rosyjskiego))

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X}_0, t_0) = \\ \sum_{\Delta \vec{X}} W(\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X} - \Delta \vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X} - \Delta \vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) = \\ W(\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) + \\ \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} W(\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X} - \Delta \vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X} - \Delta \vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0), \end{aligned} \quad (3.40)$$

która pozwala uzyskać równanie ewolucji na wielkość $\mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)$ zdefiniowaną jako prawdopodobieństwo warunkowe (lub gęstość prawdopodobieństwa warunkowego o ile operujemy ciągłymi zmiennymi losowymi⁸) znalezienia cząsteczki w położeniu $\vec{X}$ w chwili t pod warunkiem, że początkowo w chwili t_0 cząsteczka ta znajdowała się w położeniu $\vec{X}_0$. **Prawdopodobieństwo to jest kluczową wielkością charakteryzującą proces stochastyczny.**

Oczywiście, pełny opis procesu stochastycznego Markowa uzyskujemy dopiero po wprowadzeniu (niemal oczywistej) reguły na prawdopodobieństwo zupełne łączącej wspomniane prawdopodobieństwo warunkowe z jednocząstkową funkcją rozkładu

$$\mathcal{P}(\vec{X}, t - t_0) = \sum_{\Delta \vec{X}_0} \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) \mathcal{P}(\vec{X}_0, t_0); \quad (3.41)$$

zwykle przyjmuje się, że $t_0 = 0$ a występująca po lewej stronie równości jednorodność czasu ma jedynie charakter upraszczający, gdyż rozważania można by prowadzić również i bez tego uproszczenia.

Sumowanie po prawej stronie równości (3.40) zawiera element, w którym $\Delta \vec{X} = 0$; opisuje on przetrwanie cząsteczki w położeniu $\vec{X}$ od chwili t do $t + \Delta t$. Element ten jest prawdopodobieństwem warunkowym znalezienia cząsteczki w położeniu $\vec{X}$ w chwili $t + \Delta t$ pod warunkiem, że w położeniu tym pozostawała od chwili t . Gdy przemieszczenie $\Delta \vec{X} \neq 0$, element przejścia $W(\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X} - \Delta \vec{X}, t)$ jest prawdopodobieństwem warunkowym znalezienia cząsteczki w położeniu $\vec{X}$ w chwili $t + \Delta t$

⁸Operowanie ciągłymi zmiennymi losowymi prowadzi do równania Mistrza niemal identycznego z uzyskanym tutaj (3.44) z tą różnicą, że występujące w takim równaniu całkowanie zastąpiłoby obecne tutaj sumowanie - niestety jego wyprowadzenie wymagałoby bardziej wyrafinowanego podejścia.

pod warunkiem, że wcześniej, w chwili t cząsteczka znajdowała się w położeniu $\vec{X} - \Delta\vec{X}$. Zauważmy, że prawdopodobieństwa W , czyli element przetrwania i elementy przejścia, definiują jednoznacznie proces stochastyczny; innymi słowy, *proces stochastyczny można utożsamiać ze zbiorem $\{W\}$* , którego elementy spełniają warunek normalizacyjny

$$\sum_{\Delta\vec{X}} W(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t + \Delta t | \vec{X}, t) = W(\vec{X}, t + \Delta t | \vec{X}, t) + \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} W(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t + \Delta t | \vec{X}, t) = 1. \quad (3.42)$$

Z powyższego warunku wyznaczamy element opisujący przetrwanie i podstawiamy do równości (3.40), otrzymując po prostych przekształceniach wygodną postać pośrednią, zawierającą już tylko jeden rodzaj elementów,

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{P}(\vec{X}, t + \Delta t | \vec{X}_0, t_0) - \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)}{\Delta t} = \\ & \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} \left[\frac{W(\vec{X}, t + \Delta t | \vec{X} - \Delta\vec{X}, t)}{\Delta t} \mathcal{P}(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) - \right. \\ & \left. \frac{W(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t + \Delta t | \vec{X}, t)}{\Delta t} \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) \right]; \end{aligned} \quad (3.43)$$

wykonując w powyższym wyrażeniu (obustronne) przejście graniczne $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymujemy poszukiwane różniczkowo-różnicowe **równanie Mistra** na ewolucję prawdopodobieństwa warunkowego $\mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)}{\partial t} &= \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} [\Gamma(\Delta\vec{X}) \mathcal{P}(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) - \\ & \Gamma(-\Delta\vec{X}) \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)], \end{aligned} \quad (3.44)$$

gdzie element przejścia

$$\Gamma(\Delta\vec{X}) \stackrel{def.}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(\vec{X}, t + \Delta t | \vec{X} - \Delta\vec{X}, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(\Delta\vec{X}, \Delta t)}{\Delta t}, \quad (3.45)$$

oraz analogicznie zdefiniowany $\Gamma(-\Delta\vec{X})$, są *jednorodnymi* prawdopodobieństwami przejścia na jednostkę czasu (uzyskanymi przy założeniu czaso-przestrzennej jednorodności prawdopodobieństw przejść W) zwanymi także funkcjami intensywności procesu statystycznego (stochastycznego) albo po prostu intensywnościami (lub szybkościami) procesu stochastycznego - elementy te muszą być zadane aby można było efektywnie rozwiązać równanie ewolucji (3.44); przy wprowadzeniu tych elementów skorzystaliśmy z własności jednorodności przestrzeni oraz jednorodności czasu nie korzystając przy tym z anizotropowości przestrzeni. Proces Markowa posiadający tego typu własność nosi nazwę **stacjonarego**; w dalszym ciągu, wszędzie tam gdzie używamy procesu Markowa jest on właśnie tego typu.

Równanie (3.44) opisuje propagację statystyczną cząsteczki zawiesiny zarówno *pod nieobecność jak też w obecności zewnętrznego pola*. Równanie (3.44) nosi nazwę *równania Mistrza* (patrz N.G. van Kampena pt.: "Procesy stochastyczne w fizyce i chemii", PWN, Warszawa 1990) albo *prospektywnego równania Kołmogorowa* (patrz M.Fisz, "Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna", rozdz.8, PWN, Warszawa 1967) i jak widać opisuje ewolucję propagatora wprzód w czasie; ewolucję wstecz opisuje (analogicznie wyprowadzane) *równanie retrospektywne Kołmogorowa*.

3.8 Dyfuzja

Równanie dyfuzji, zarówno pod nieobecność jak też w obecności zewnętrznego pola (wtedy nosi nazwę równania dyfuzji z dryfem), można otrzymać bezpośrednio z równania (3.44). Procedura polega na rozwinięciu prawdopodobieństwa $\mathcal{P}(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)$ w szereg Taylora w punkcie $\vec{X}$ (które w tym przypadku zwane jest także rozwinięciem Kramersa-Moyal'a, patrz N.G. van Kampena pt.: "Procesy stochastyczne w fizyce i chemii", rozdz.8, PWN, Warszawa 1990) i ograniczeniu się tylko do wyrazów kwadratowych w $\Delta\vec{X}$. Tego typu przybliżenie jest usprawiedliwione gdy $|\Delta\vec{X}| \ll |\vec{X}|$ czyli gdy długość pojedynczego przemieszczenia cząsteczki jest znacznie mniejsza od aktualnej odległości cząsteczki od punktu początkowego co ma miejsce na ogół dla dostatecznie długiego okresu czasu $t \gg \tau$, (o czym była już mowa wcześniej) lub gdy rozkład zmiennej $\Delta\vec{X}$, dany elementem przejścia $\Gamma(\Delta\vec{X})$, jest wąski (bardziej systematyczne, subtelniejsze podejście, przedstawione np. w książce N.G. van Kampena pt.: "Procesy stochastyczne w fizyce i chemii", PWN, Warszawa 1990, oparte jest na rozwinięciu równania mistrza względem potęg małego narzuconego z zewnątrz specyficznego parametru - jak się wydaje jest to podejście lepiej umotywowane niż rozwinięcie Kramersa-Moyal'a).

Rozważamy teraz *przypadek braku dryfu* co oznacza, że przestrzeń w której zachodzi błędzenie losowe jest izotropowa; prowadzi to do znoszenia się wyrazów liniowych w $\Delta\vec{X}$. W takiej sytuacji z równania (3.44) otrzymujemy równanie dyfuzji

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)}{\partial t} = D \nabla_d^2 \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) \quad (3.46)$$

(gdzie ∇_d jest d -wymiarowym gradientem); współczynnik dyfuzji D otrzymaliśmy tutaj w postaci

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta X_j)^2 \Gamma(\Delta\vec{X}) = \frac{1}{2d} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta\vec{X})^2 \Gamma(|\Delta\vec{X}|), \quad j = 1, \dots, d, \quad (3.47)$$

przy czym równość drugą można było napisać dzięki izotropowości przestrzeni, która jest skutkiem braku (w tym przypadku) dryfu - pozwala to na uzależnienie elementów przejścia Γ jedynie od długości wektora pojedynczego przemieszczenia

$|\Delta \vec{X}| = \sqrt{\sum_{j=1}^d (\Delta X_j)^2}$. Zatem, powyższa postać równania dyfuzji (3.46) została uzyskana dzięki znikaniu elementów krzyżowych (pozadiagonalnych)

$$\sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} \Delta X_i \Delta X_j \Gamma(|\Delta \vec{X}|) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, d; \quad (3.48)$$

co wynika (tutaj) z izotropowości przestrzeni. Zarówno postać równania dyfuzji (3.46) jak też wyrażenie na współczynnik dyfuzji mogą ulec zmianie po włączeniu zewnętrznego pola co rozważamy w dalszej części.

Wzór (3.47) może się wydawać dokładniejszy od (3.13), który został wyprowadzony w rozdz.3.5 jednak, jak wykazujemy oba wyrażenia są sobie równoważne. Jak widać, współczynnik D dany wyrażeniem (3.47) jest, podobnie jak (3.13) i (3.14), wielkością makroskopową gdyż dotyczy błędzenia na makroskopowo duże odległości a zatem pokonywane przez cząsteczkę zawiesiny w makroskopowo długich okresach czasu.

Łatwo sprawdzić (przez proste różniczkowania po czasie i po zmiennych przestrzennych), że rozkład Gaussa

$$\mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) = \frac{1}{(4\pi(t-t_0)D)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{X} - \vec{X}_0)^2}{4(t-t_0)D}\right) \quad (3.49)$$

jest rozwiązaniem równania dyfuzji (3.46) pod nieobecność zewnętrznego pola spełniającym wymagany warunek początkowy

$$\mathcal{P}(\vec{X}, t_0 | \vec{X}_0, t_0) = \delta(\vec{X} - \vec{X}_0), \quad (3.50)$$

stwierdzający, że w chwili początkowej t_0 cząsteczka zawiesiny znajduje się w ściśle określonym położeniu $\vec{X}_0$.

Korzystając z jawnej postaci propagatora (3.49), znajdujemy po prostym scałkowaniu

$$\begin{aligned} \langle (\vec{X}(t) - \vec{X}_0)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{X} (\vec{X} - \vec{X}_0)^2 \frac{1}{(4\pi(t-t_0)D)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{X} - \vec{X}_0)^2}{4(t-t_0)D}\right) \\ &= 2d(t-t_0)D; \end{aligned} \quad (3.51)$$

jak widać, jest to postać identyczna do uzyskanej wcześniej (3.12) - wykazaliśmy tym samym identyczność obu postaci współczynnika dyfuzji (3.13) oraz (3.47).

Obie postacie współczynnika dyfuzji ((3.47) oraz (3.13)) posiadają uderzającą cechę o której wspomnieliśmy wcześniej mianowicie, wielkość makroskopowa jaką jest współczynnik dyfuzji D (patrz równość (3.14)) daje się wyrazić za pomocą lokalnych wielkości mikroskopowych tzn. średniego pojedynczego przemieszczenia kwadratowego oraz czasu potrzebnego na to pojedyncze przemieszczenie. Oznacza to, że z zachowania zawiesiny w skali mikroskopowej potrafimy odtworzyć jej zachowanie w skali makroskopowej, co sugeruje to samopodobny charakter ewolucji; *ewolucja*

układu w skali makro jest podobna do ewolucji układu oglądanej w innych skalach np. mikro - jest to podstawowa cecha tzw. błędzeń fraktalnych⁹.

Zauważmy, że równanie (3.46) na prawdopodobieństwo warunkowe $\mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)$ jest spełnione przy dowolnym warunku początkowym $\mathcal{P}(\vec{X}_0, t_0)$; dlatego średniując to równanie stronami po wszystkich możliwych warunkach początkowych otrzymujemy równanie dyfuzji

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\vec{X}, t)}{\partial t} = D \nabla_d^2 \mathcal{P}(\vec{X}, t) \quad (3.52)$$

na jednocząstkową funkcję rozkładu (dla prostoty położyliśmy $t_0 = 0$).

3.8.1 Dyfuzja Ficka

Literalnie rzecz biorąc, dyfuzja Ficka dotyczy gęstości (koncentracji) cząsteczek (np. zawiesiny) a nie prawdopodobieństw. Oczywiście, w przypadku statystycznie niezależnych cząsteczek istnieje prosty związek pomiędzy gęstością (liczbową) $n(\vec{X}, t)$ a prawdopodobieństwem warunkowym

$$n(\vec{X}, t) = \int \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) n(\vec{X}_0, t_0) d\vec{X}_0, \quad (3.53)$$

gdzie $n(\vec{X}_0, t_0)$ jest gęstością (liczbową) w chwili początkowej t_0 w położeniu $\vec{X}_0$. Uśredniając równanie (3.46) z gęstością początkową $n(\vec{X}_0, t_0)$ otrzymujemy (w oparciu o (3.53))

$$\frac{\partial n(\vec{X}, t)}{\partial t} = D \nabla_d^2 n(\vec{X}, t) \quad (3.54)$$

dobrze znane równanie dyfuzji Ficka (patrz np. J.R. Manning, "Diffusion Kinetics for atoms in crystals", D. van Nostrand Comp. Inc., Princeton 1968, (istnieje tłum. na język rosyjski)). Oczywiście, na równanie to można patrzeć jak na równanie ciągłości czyli jak na prawo zachowania liczby cząsteczek. Wówczas, można je zapisać w postaci

$$\frac{\partial n(\vec{X}, t)}{\partial t} + \nabla_d \vec{j}_D(\vec{X}, t) = 0, \quad (3.55)$$

gdzie

$$\vec{j}_D(\vec{X}, t) = -D \nabla_d n(\vec{X}, t), \quad (3.56)$$

jest strumieniem dyfuzyjnym cząsteczek. Do równania tego będziemy się jeszcze odwoływać w dalszej części.

⁹Błądzenie brownowskie jest marginalnie fraktalne, o czym mówimy mowa w dalszej części.

3.9 Centralne twierdzenie graniczne raz jeszcze

Jeden z najważniejszych wniosków jaki można sformułować na podstawie rozważań przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach, daje się sformułować w postaci następującego (wektorowego) twierdzenia Lindeberga-Lévy'ego (patrz M. Fisz, "Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna", PWN, Warszawa 1967) znanego, ze względu na swoje zasadnicze znaczenie w dziedzinie twierdzeń granicznych, jako

Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG)

Wprowadźmy ciąg niezależnych, wektorowych zmiennych losowych $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ posiadających identyczny rozkład prawdopodobieństwa, a zatem taką samą wartość średnią, $\langle \vec{x} \rangle$, oraz dyspersję σ_x , tzn.

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}_j \rangle &= \langle \vec{x} \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sigma_X^2 &= \langle (\vec{x}_j)^2 \rangle - \langle \vec{x}_j \rangle^2 = \langle \vec{x}^2 \rangle - \langle \vec{x} \rangle^2, \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (3.57)$$

Zdefiniujmy teraz sumaryczną, standaryzowaną (wyskalowaną), wektorową zmienną losową

$$\vec{Y}(n) = \frac{\vec{X}(n) - \langle \vec{X}(n) \rangle}{\sigma_X} = \frac{\sum_{j=1}^n (\vec{x}_j - \langle \vec{x} \rangle)}{\sigma_X}, \quad (3.58)$$

zależną od n ; jak widać, wartość oczekiwana tej zmiennej $\langle \vec{Y}(n) \rangle = 0$ oraz jej dyspersja $\sigma_Y(n) = 1$ niezależnie od n ,

Teza Centralnego Twierdzenia Granicznego¹⁰ mówi, że

- 1) istnieje związek pomiędzy dyspersją $\sigma_X(n)$ sumarycznej zmiennej losowej $\vec{X}(n)$ a dyspersją σ_x pojedynczej zmiennej $\vec{x}$ postaci: $\sigma_X(n) = \sqrt{n} \sigma_x$,
- 2) dla asymptotycznie dużych n funkcja rozkładu standaryzowanej zmiennej losowej $\vec{Y}(n)$ dana jest, z dobrym przybliżeniem, rozkładem Gaussa:

$$G(\vec{Y}(n)) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp(-(\vec{Y}(n))^2/2),$$

gdzie d jest wymiarem przestrzeni wektorowej do której należy zmienna $\vec{Y}(n)$.

Powyższe twierdzenie zostało sformułowane nieco ogólniej niż rozważania z których wyrosło mianowicie, uwzględnia ono także dryf wywołany przyłożeniem do układu zewnętrznego pola. Dryf ten można charakteryzować za pomocą stałej prędkości unoszenia

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{d\langle \vec{X}(n) \rangle}{dt} = \frac{\langle \vec{x} \rangle}{\tau} = \langle \vec{v} \rangle, \quad (3.59)$$

¹⁰Innym powodem wprowadzenia tej nazwy jest fakt, że wszystko co jest najważniejsze dla błędzenia cząsteczki Browna jest zawarte w części centralnej rozkładu prawdopodobieństwa.

gdzie skorzystaliśmy z definicji (3.5) z rozdz.3.4 oraz wzoru $t = n\tau$ wprowadzonego w rozdz.3.5. Jak widać prędkość unoszenia $\langle \vec{V} \rangle$ obliczona na podstawie wypadkowego wektora przemieszczenia cząsteczki zawiesziny jest, jak być powinna, identyczna z prędkością unoszenia $\langle \vec{v} \rangle$ obliczoną w oparciu o pojedyncze przemieszczenie tej cząsteczki. Zagadnienie dyfuzji w obecności dryfu omawiamy krótko w następnym rozdziale, co usprawiedliwia wprowadzoną powyżej postać CTG.

3.10 Dyfuzja oraz unoszenie

Przedstawiamy teraz zmiany jakie powinny być uwzględnione w stosunku do rozważań prowadzonych w rozdziałach 3.5, 3.7, 3.8 w przypadku istnienia w układzie dryfu, co jest jedyną modyfikacją warunków błędzenia cząstki zawiesziny jaką dopuszczamy.

Zasadniczą konsekwencją tej modyfikacji jest fakt że pierwszy moment, zarówno pojedynczej jak też sumarycznej zmiennej losowej, nie znika czyli

$$\langle \vec{X}(n) - \vec{X}_0 \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \vec{x}_j \rangle = n \langle \vec{x} \rangle \neq 0, \quad (3.60)$$

tym samym złamana została równość (3.7) (gdzie po drodze skorzystaliśmy z równości (3.5)).

W związku z powyższym, dyspersja zdefiniowana wzorem (3.8) nie równa się teraz $\langle (\vec{X}(n) - \vec{X}_0)^2 \rangle$ co prowadzi do wyniku ogólniejszego niż dany wyrażeniem (3.9) oraz (3.10). Korzystając z ogólnej definicji dyspersji (druga równość w (3.8)), otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$\begin{aligned} (\sigma_X(n))^2 &= \sum_{j=1}^n [\langle (\vec{x}_j)^2 \rangle - (\langle \vec{x}_j \rangle)^2] + \sum_{i \neq j}^n [\langle \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j \rangle - \langle \vec{x}_i \rangle \cdot \langle \vec{x}_j \rangle] \\ &= n(\sigma_x)^2 + 2\mathcal{K}(n), \end{aligned} \quad (3.61)$$

gdzie sumaryczna funkcja korelacji $\mathcal{K}(n)$ jest dana przez tą część wyrażenia (3.61), które zawiera wyrazy krzyżowe; jak widać, funkcja ta znika dla takiego błędzenia w którym pojedyncze przemieszczenia są nieskorelowane - przypadek błędzeń skorelowanych, np. usztywnionych polimerów, omawiamy w dalszej części.

Wyrażenie (3.61) można zapisać w postaci umożliwiającej wprowadzenie współczynników dyfuzji dla nieskorelowanego błędzenia pojedynczej cząsteczki w obecności dryfu - jest ono uogólnieniem wyrażenia (3.12)

$$(\sigma_X(t))^2 = 2(t - t_0)[(d - 1)D_{\perp} + D_{\parallel}] \quad (3.62)$$

gdzie współczynnik

$$D_{\perp} = \frac{1}{2(d - 1)} \frac{\langle (\vec{x}_{\perp})^2 \rangle}{\tau}, \quad (3.63)$$

opisuje dyfuzję w kierunku poprzecznym do kierunku dryfu, natomiast

$$D_{\parallel} = \frac{1}{2} \frac{\langle (\vec{x}_{\parallel})^2 \rangle - \langle \vec{x}_{\parallel} \rangle^2}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{\langle (\vec{x}_{\parallel})^2 \rangle - (\langle \vec{V} \rangle (t - t_0))^2}{\tau}, \quad (3.64)$$

dyfuzję równoległą do kierunku dryfu przy czym w ogólności

$$D_{\perp} \neq D_{\parallel} \quad (3.65)$$

a ponadto,

$$D_{\parallel} \neq D \text{ oraz } D_{\perp} \neq D, \quad (3.66)$$

przy czym ostatnia nierówność w ogólności ma miejsce pomimo, że dotyczy dyfuzji poprzecznej - będzie o tym jeszcze mowa poniżej. Jak widać, wyrażenie (3.62) stanowi uogólnienie wzoru (3.12) na przypadek występowania zewnętrznego pola wywołującego dryf. Należy zaznaczyć, że współczynnik dyfuzji równoległej $D_{\parallel}$ jest niezależny od czasu (co wykazujemy poniżej) gdyż identyczna (do jawnie wypisanej) paraboliczna zależność od czasu tkwi także w średniej z kwadratu pojedynczego przemieszczenia $\langle (\vec{x}_{\parallel})^2 \rangle$, prowadząc do jej skrócenia się.

Istnienie zewnętrznego pola wprowadza anizotropię przestrzeni co zmienia, jak wykazujemy poniżej, postać równania dyfuzji Fick'a (3.46). Postępując analogicznie jak w rozdziale 3.8 (czyli rozwijając propagator $\mathcal{P}(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)$ w szereg Taylora w punkcie $\vec{X}$ i ograniczając się tylko do wyrazów kwadratowych w $\Delta\vec{X}$), przekształcamy równanie mistrza (3.44) do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)}{\partial t} &= D_{\perp} \nabla_{d-1}^2 \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) + D_{\parallel} \nabla_1^2 \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) \\ &- \langle \vec{V} \rangle \cdot \nabla \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) \end{aligned} \quad (3.67)$$

zawierającej obok pierwszego składnika odpowiedzialnego za dyfuzję w kierunku poprzecznym do kierunku przyłożonego pola gdzie,

$$\begin{aligned} D_{\perp} &= \frac{1}{2(d-1)} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta\vec{X}_{\perp})^2 \Gamma(\Delta\vec{X}) \\ &= \frac{1}{2(d-1)} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta\vec{X}_{\perp})^2 \Gamma(|\Delta\vec{X}|) \exp(\vec{F} \cdot \Delta\vec{X}_{\parallel} / 2k_B T) \\ &= \frac{1}{2(d-1)} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta\vec{X}_{\perp})^2 \Gamma(|\Delta\vec{X}|) \cosh\left(\frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{X}_{\parallel}}{2k_B T}\right) \\ &\approx \frac{1}{2(d-1)} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta\vec{X}_{\perp})^2 \Gamma(|\Delta\vec{X}|) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(\vec{F})^2 (\Delta\vec{X}_{\parallel})^2}{(2k_B T)^2}\right] \\ &= D + \frac{(\vec{F})^2}{(2k_B T)^2} \frac{1}{4(d-1)} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta\vec{X}_{\perp})^2 (\Delta\vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(|\Delta\vec{X}|) \end{aligned} \quad (3.68)$$

jest współczynnikiem dyfuzji poprzecznej, także drugi oznaczający dyfuzję wzdłuż kierunku pola przy czym,

$$\begin{aligned}
D_{\parallel} &= \frac{1}{2} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(\Delta \vec{X}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(|\Delta \vec{X}|) \exp(\vec{F} \cdot \Delta \vec{X}_{\parallel} / 2k_B T) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(|\Delta \vec{X}|) \cosh \left(\frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{X}_{\parallel}}{2k_B T} \right) \\
&\approx \frac{1}{2} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(|\Delta \vec{X}|) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(\vec{F})^2 (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2}{(2k_B T)^2} \right] \\
&= D + \frac{(\vec{F})^2}{(2k_B T)^2} \frac{1}{4} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(|\Delta \vec{X}|) \quad (3.69)
\end{aligned}$$

jest współczynnikiem dyfuzji wzdłuż pola oraz trzeci składnik związany z unoszeniem (wzdłuż kierunku pola) gdzie prędkość unoszenia

$$\begin{aligned}
\langle \vec{V} \rangle &= \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} \Delta \vec{X}_{\parallel} \Gamma(\Delta \vec{X}) = \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} \Delta \vec{X}_{\parallel} \Gamma(|\Delta \vec{X}|) \exp \left(\frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{X}_{\parallel}}{2k_B T} \right) \\
&= \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} \Delta \vec{X}_{\parallel} \Gamma(|\Delta \vec{X}|) \sinh \left(\frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{X}_{\parallel}}{2k_B T} \right) \\
&\approx \frac{F}{2k_B T} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(|\Delta \vec{X}|) = \frac{F}{k_B T} D, \quad (3.70)
\end{aligned}$$

jest równoległa do kierunku pola ze względu na symetrię zwierciadlaną (F jest w takim układzie współrzędnych jedyną nieznikającą składową wektora siły). Przy okazji, wszystkie trzy wielkości wyraziliśmy w postaci jawnie zależnej od zewnętrznej (stałej) siły.

Należy podkreślić, że istnienie anizotropii przestrzeni nie narusza symetrii zwierciadlanej funkcji intensywności procesu stochastycznego; funkcje te posiadają symetrię zwierciadlaną względem (dowolnej) płaszczyzny, w której leży wektor prędkości unoszenia $\langle \vec{V} \rangle$ co prowadzi, podobnie jak w przypadku braku pola, do znikania wyrazów krzyżowych typu (3.48) oraz zeruje unoszenie prostopadłe do kierunku pola.

Można bez trudu sprawdzić, że rozwiązanie równania (3.67) spełniające warunek początkowy (3.50) jest postaci iloczynu dryfującego oraz stojącego rozkładu Gaussa,

$$\mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-t_0)D_{\parallel}}} \exp \left(-\frac{((\vec{X} - \vec{X}_0)_{\parallel} - \langle \vec{V} \rangle (t - t_0))^2}{4(t-t_0)D_{\parallel}} \right)$$

$$\times \frac{1}{(4\pi(t-t_0)D_{\perp})^{(d-1)/2}} \exp\left(-\frac{((\vec{X}-\vec{X}_0)_{\perp})^2}{4(t-t_0)D_{\perp}}\right). \quad (3.71)$$

Innymi słowy, widzimy, że w kierunku prostopadłym do kierunku dryfu ma miejsce jedynie "rozpływanie się" propagatora czyli jego poszerzanie się z jednoczesnym maleniem amplitudy przy czym "środek ciężkości" (w tym przypadku maksimum) propagatora pozostaje przez cały czas nieruchomy - jest to efekt dyfuzji w czystej postaci. Natomiast, w kierunku równoległym do kierunku dryfu sytuacja jest bardziej skomplikowana. Obok powyżej wspomnianego efektu dyfuzji, ma miejsce zjawisko unoszenia (dryfu), które polega na przesuwaniu się środka ciężkości a zatem całego propagatora z (wypadkową) prędkością $\langle V \rangle$. Oczywiście, wyrażenie (3.71) nie jest rozwiązaniem stacjonarnym równania (3.67) gdyż zmienia się wraz z upływem czasu. Rozwiązanie stacjonarne, a dokładniej mówiąc równowagowe, wyprowadzamy poniżej analizując równanie ciągłości.

Licząc teraz dyspersję zmiennej $\vec{X} - \vec{X}_0$ można wykazać, że oba współczynniki dyfuzji $D_{\perp}$ oraz $D_{\parallel}$, otrzymane na dwóch różnych drogach (porównaj wyrażenia (3.63) i (3.64) z odpowiednio (3.68) i (3.69)) są identyczne.

3.10.1 Twierdzenie o fluktuacji i dyssypacji

Równość przybliżona we wzorze (3.70) przedstawia, w przybliżeniu liniowym, związek pomiędzy prędkością a przyłożoną siłą. Współczynnik proporcjonalności jest, jak wiadomo, ruchliwością (którą często oznacza się przez B). A zatem,

$$B = \frac{D}{k_B T} \quad (3.72)$$

Łącząc unoszenie z dyfuzją co stanowi tezę *twierdzenia o fluktuacji i dysypacji* (patrz, R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, "Fizyka statystyczna. II. Mechanika statystyczna stanów nierównowagowych", PWN, Warszawa 1991) - jednego z najgłębszych twierdzeń fizyki statystycznej.

Przy okazji zauważmy, że wzory (3.68) oraz (3.69) wyznaczają stopień anizotropii współczynników dyfuzji. Mianowicie, można je przepisać odpowiednio w postaci,

$$\begin{aligned} \Delta D_{\perp} = D_{\perp} - D &\approx \frac{1}{2} \frac{(\vec{F})^2}{(2k_B T)^2} \\ &\times \frac{1}{2(d-1)} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\perp})^2 (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 \Gamma(|\Delta \vec{X}|) \end{aligned} \quad (3.73)$$

oraz

$$\Delta D_{\parallel} = D_{\parallel} - D \approx \frac{1}{2} \frac{(\vec{F})^2}{(2k_B T)^2} \frac{1}{2} \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} (\Delta \vec{X}_{\parallel})^2 (\Delta \vec{X}_{\perp})^2 \Gamma(|\Delta \vec{X}|), \quad (3.74)$$

Jak widać, w przybliżeniu liniowym zarówno anizotropia poprzeczna $\Delta D_{\perp}$ jak i podłużna $\Delta D_{\parallel}$ znikają. Zauważmy, że znikanie anizotropii poprzecznej $\Delta D_{\perp}$ nie oznacza jeszcze znikania anizotropii podłużnej $D_{\parallel}$, co pokażemy na przykładzie błędzenia na sieci kwadratowej (patrz rys. 1(3.10.1) oraz rys. 2(3.10.1)). W tym miejscu należy podkreślić, że zastosowanie powyższych wywodów do takiego błędzenia wymaga jedynie doprecyzowania po jakich wektorach przemieszczenia $\Delta \vec{X}$ przeprowadzane jest sumowanie $\sum_{\Delta \vec{X}}(\dots)$ oraz zaznaczenia, że wektor położenia $\vec{X}$ przyjmuje tylko wartości dyskretne oznaczające węzły sieci.

Przykład 1

Rozważamy błędzenie przypadkowe pojedynczej cząsteczki na sieci kwadratowej tak jak to pokazano na rys.1(3.10.1). Zakładamy, że przeskoki zachodzą tylko do najbliższych sąsiadów (odległych o stałą sieci a) natomiast zewnętrzne pole jest przyłożone równoległe do horyzontalnej linii węzłów. Zatem

$$\Gamma(|\Delta \vec{X}|) = \begin{cases} \Gamma, & \text{dla } \Delta \vec{X} = (a, 0), (-a, 0), (0, a), (0, -a) \\ 0, & \text{dla innych } \Delta \vec{X}. \end{cases}$$

Korzystając z wyrażenia (3.73) otrzymujemy,

$$\Delta D_{\perp} = 0, \quad (3.75)$$

(gdyż w tym przypadku wektor przemieszczenia $\Delta \vec{X}$ albo posiada składową prostopadłą i nie posiada horyzontalnej albo odwrotnie), natomiast wyrażenie (3.74) daje po prostu wzór

$$\frac{\Delta D_{\parallel}}{D} = \frac{1}{2} \frac{(\vec{F})^2 a^2}{(2k_B T)^2}, \quad (3.76)$$

na względną anizotropię podłużną.

Rozważamy teraz następny przykład (patrz rys.2(3.10.1) dotyczący sytuacji gdy $\Delta D_{\perp} = \Delta D_{\parallel} \neq 0$.

Przykład 2

W tym przypadku linia węzłów nie pokrywa się z kierunkiem przyłożonego pola. Ze wzorów (3.73) oraz (3.74) otrzymujemy,

$$\frac{\Delta D_{\perp}}{D} = \frac{\Delta D_{\parallel}}{D} = \frac{1}{8} \frac{(\vec{F})^2 a^2}{(2k_B T)^2}. \quad (3.77)$$

Zauważmy, że w obu przykładach krzyżowe współczynniki dyfuzji znikają ponieważ ma miejsce symetria zwierciadlana elementów przejścia względem kierunku przyłożonego pola.

3.10.2 Równanie ciągłości a liczba Avogadro - przełomowe doświadczenie Perrina

Fenomenologiczna teoria transportu Onsagera słuszna dla stanów bliskich stanowi równowgi termodynamicznej, wprowadza liniową zależność pomiędzy prądem a siłą termodynamiczną - tego typu związki pojawiły się jako bezpośrednie wnioski z doświadczeń. W przypadku błędzenia pojedynczej cząsteczki w obecności zewnętrznego pola sprowadza się on do *pierwszego prawa Fick'a* postaci,

$$\vec{j}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) = \vec{j}_D(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) + \vec{j}_V(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0), \quad (3.78)$$

przy czym

$$\vec{j}_D(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) = -\hat{D}\nabla\mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) \quad (3.79)$$

jest prądem dyfuzyjnym natomiast

$$\vec{j}_V(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) = \langle \vec{V} \rangle \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) \quad (3.80)$$

prądem unoszenia, gdzie $\hat{D}$ jest diagonalnym tensorem dyfuzji

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{D}_\perp & 0 \\ 0 & D_\parallel \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

i podobnie (np. dla $d = 2$)

$$\hat{D}_\perp = \begin{pmatrix} D_\perp & 0 \\ 0 & D_\perp \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Jak widać prawo to stwierdza, że gęstość prądu dyfuzyjnego jest proporcjonalna do gradientu propagatora natomiast gęstość prądu unoszenia do samego propagatora (przy stałej prędkości dryfu).

Można teraz postawić pytanie o *warunek brzegowy przy którym uzyskuje się rozwiązanie równowagowe*, tzn. takie które powstaje dzięki równoważeniu się prądu dyfuzyjnego i prądu unoszenia - oczywiście w takiej sytuacji całkowity prąd w układzie znika. A zatem przyjmujemy, że

$$\vec{j}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) = \vec{j}_D(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) + \vec{j}_V(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) = 0. \quad (3.83)$$

Co więcej, poszukujemy rozwiązania niezależnego od warunku początkowego, Zatem, równość (3.83) zapisujemy w postaci,

$$D_\parallel \frac{\partial}{\partial X_\parallel} \mathcal{P}(X_\parallel) = \langle V_\parallel \rangle \mathcal{P}(X_\parallel). \quad (3.84)$$

Przyjmujemy, że składowa położenia $X_\parallel$ jest skierowana ku górze natomiast składowa prędkości dryfu $\langle V_\parallel \rangle$ ku dołowi. Ponadto, $d - 1$ -wymiarowa (hiper)płaszczyzna

zdefiniowana równaniem $X_{\parallel} = 0$ jest nieprzenikliwa i zezwala na obecność cząstek jedynie w górnej półprzestrzeni. Oznacza to, że rozwiązanie równania (3.84) jest postaci,

$$\mathcal{P}(\vec{X}) = \mathcal{P}(X_{\parallel}) = \mathcal{P}(X_{\parallel} = 0) \exp\left(\frac{\langle V_{\parallel} \rangle}{D} X_{\parallel}\right). \quad (3.85)$$

Oczywiście, rozwiązanie to musi spełniać warunek normalizacyjny

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dX_{\parallel} \int_{\Omega_{d-1}} d\vec{X}_{\perp} \mathcal{P}(\vec{X}) &= 1 \equiv \Omega_{d-1} \mathcal{P}(X_{\parallel} = 0) \frac{D}{|\langle V_{\parallel} \rangle|} = 1 \\ \Rightarrow \mathcal{P}(X_{\parallel} = 0) &= \frac{|\langle V_{\parallel} \rangle|}{D\Omega_{d-1}}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

gdzie Ω_{d-1} jest (ograniczonym z definicji obszarem) $(d-1)$ -wymiarowej powierzchni (hiper) płaszczyzny. Jak widać, zawieszina jest umieszczona w naczyniu ograniczonym ze wszystkich stron za wyjątkiem dodatniego kierunku składowej $X_{\parallel}$ ¹¹. Korzystając ze wzorów (3.70) oraz (3.72) i pamiętając, że zawieszina znajduje się w polu grawitacyjnym, czyli $F = -mg$, (gdzie m jest masą cząsteczki zawiesziny a g wartością przyspieszenia ziemskiego) otrzymujemy z (3.85) oraz (3.86) następujący wzór na rozkład prawdopodobieństwa dla cząsteczki zawiesziny w jednorodnym polu grawitacyjnym.

$$\mathcal{P}(X_{\parallel}) = \frac{1}{\Omega_{d-1}} \frac{mg}{k_B T} \exp\left(-\frac{mg}{k_B T} X_{\parallel}\right). \quad (3.87)$$

Jest to niezwykle ważny wzór, który umożliwił J. Perrin'owi przeprowadzenie doświadczenia, w którym wyznaczył liczbę Avogadro a tym samym podał po raz pierwszy doświadczalny dowód cząsteczkowej budowy materii.

Doświadczenie Perrina

Po pierwsze, J. Perrin zauważył, że wzór (3.87) pozwala na doświadczalne wyznaczenie stałej Boltzmanna k_B . Po drugie, ze znajomości stałej gazowej R wyznaczonej niezależnie na drodze czysto termodynamicznej oraz związku pomiędzy stałą gazową a stałą Boltzmanna postaci

$$R = N_A k_B \quad (3.88)$$

można wyznaczyć liczbę Avogadro N_A .

Na rys. 1(3.10.2) przedstawiono schematycznie istotę doświadczenia Perrina. Mianowicie, naczynie wypełnione zawiesziną umieszczono w (jednorodnym) polu grawitacyjnym o natężeniu $g_{\parallel} = -g$. Podzielono je myślowo na "plasterki" o niewielkiej

¹¹Ograniczenie także w tym kierunku jest możliwe ale skomplikowało by to postać nieistotnego czynnika przedwykładniczego we wzorze (3.85).



Rysunek 3.3: Schematyczny widok zawiesiny pod mikroskopem dla dwóch położeń tubusu mikroskopu oddalonych od siebie o Δ . Lewy obraz dotyczy plasterka leżącego niżej a prawy tego leżącego wyżej. Jak widać, istnieje wyraźna różnica liczby makrocząsteczek na obu wysokościach, co stanowi kluczową obserwację w doświadczenia Perrina.

grubości Δ . Wzór (3.87) pozwala na obliczenie względnej liczby makrocząsteczek zawiesiny zawartych w kolejnych plasterkach zatem,

$$\frac{N(X_{\parallel} + \Delta, X_{\parallel} + 2\Delta)}{N(X_{\parallel}, X_{\parallel} + \Delta)} = \frac{\int_{X_{\parallel} + \Delta}^{X_{\parallel} + 2\Delta} dX'_{\parallel} \mathcal{P}(X'_{\parallel})}{\int_{X_{\parallel}}^{X_{\parallel} + \Delta} dX'_{\parallel} \mathcal{P}(X'_{\parallel})} = \exp\left(-\frac{mg}{k_B T} \Delta\right), \quad (3.89)$$

gdzie $N(X_{\parallel}, X_{\parallel} + \Delta)$ liczbą makrocząsteczek zawiesiny w plasterku $[X_{\parallel}, X_{\parallel} + \Delta]$.

Powyższy wzór wyprowadzono przy założeniu rozrzedzonej zawiesiny co pozwoliło na przyjęcie, że liczba makrocząsteczek $N(X_{\parallel})$ na poziomie $X_{\parallel}$ jest, z dobrym przybliżeniem, proporcjonalna do prawdopodobieństwa $\mathcal{P}(X_{\parallel})$ tzn.

$$N(X_{\parallel}) = N \mathcal{P}(X_{\parallel}), \quad (3.90)$$

gdzie N jest całkowitą liczbą makrocząsteczek w układzie.

Lewa strona wzoru (3.89) została wyznaczona w doświadczeniu na drodze bezpośredniego pomiaru liczby makrocząsteczek w dwóch sąsiednich plasterkach; prawa strona wzoru zawiera tylko jedną niewiadomą, tzn. stałą Boltzmanna k_B , natomiast masa cząsteczkowa m makrocząsteczki zawiesiny oraz przyspieszenie ziemskie g na danej szerokości geograficznej są znane z bardzo dużą dokładnością. Stąd już można było wyznaczyć potrzebną stałą k_B . Dysponując tą stałą, Perrin wyznaczył ze wzoru (3.88) poszukiwaną liczbę Avogadro¹².

Doświadczenie Perrina stało się wystarczającym dowodem empirycznym potwierdzającym ziarnistą bydową materii na poziomie mikroskopowym. Można bez przesady powiedzieć, że doświadczenie to otworzyło drogę nowożytnej fizyce atomowej.

¹²Stała Avogadro, wyznaczona z dokładniejszych pomiarów, wynosi $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}/mol$.

3.11 Równanie Fokkera-Plancka-Smoluchowskiego

W ogólnym przypadku niejednorodnych elementów przejścia z prerównania mistrza (3.43) można wyprowadzić ogólne równanie dyfuzji znane jako równanie Fokkera-Plancka bądź równanie Smoluchowskiego, używając wygodniejszej notacji

$$W(\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X} - \Delta\vec{X}, t) = W(\Delta\vec{X}, \Delta t \mid \vec{X} - \Delta\vec{X}, t) \quad (3.91)$$

oraz analogicznie

$$W(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X}, t) = W(-\Delta\vec{X}, \Delta t \mid \vec{X}, t). \quad (3.92)$$

Notacja ta pozwala na alternatywne określenie elementów $\{W\}$ na przykład, element przejścia $W(\Delta\vec{X}, \Delta t \mid \vec{X} - \Delta\vec{X}, t)$ jest prawdopodobieństwem przemieszczenia cząsteczki zawiesiny o wektor $\Delta\vec{X}$ w przedziale czasu Δt pod warunkiem, że o jedno przemieszczenie wcześniej w chwili t cząsteczka znajdowała się w położeniu $\vec{X} - \Delta\vec{X}$. Postępując analogicznie jak przy wyprowadzeniu równania (3.44) otrzymujemy ogólnejsze równanie różniczkowo-różnicowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)}{\partial t} &= \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} [\Gamma(\Delta\vec{X} \mid \vec{X} - \Delta\vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X} - \Delta\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0) - \\ &\quad \Gamma(-\Delta\vec{X} \mid \vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)], \end{aligned} \quad (3.93)$$

gdzie teraz użyliśmy ogólniejszej, niejednorodnej (w przestrzeni i czasie) postaci elementów przejścia. Analogicznie jak poprzednio, wprowadziliśmy tutaj definicje niejednorodnych intensywności procesu

$$\Gamma(\Delta\vec{X} \mid \vec{X} - \Delta\vec{X}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(\vec{X}, t + \Delta t \mid \vec{X} - \Delta\vec{X}, t)}{\Delta t}, \quad (3.94)$$

oraz analogicznie zdefiniowaną intensywność $\Gamma(-\Delta\vec{X} \mid \vec{X}, t)$. Z równania (3.93) można wyprowadzić uogólnione równanie dyfuzji zwane najczęściej równaniem Fokkera-Plancka, rozwijając pierwszy składnik pod sumą w szereg Taylora w punkcie $\vec{X}$ (analogicznie jak przy wyprowadzaniu równania dyfuzji Fick'a (3.46)). Otrzymujemy na tej drodze

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial X_j^2} [D_j(\vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)] - \frac{\partial}{\partial X_j} [\langle V_j \rangle \mathcal{P}(\vec{X}, t \mid \vec{X}_0, t_0)], \quad (3.95)$$

gdzie $D_j(\vec{X}, t)$ to współczynniki zdefiniowane wzorem analogicznym do (3.69) dopuszczającym ich zależność od położenia cząsteczki oraz od czasu

$$D_j = \frac{1}{2} \sum_{\Delta\vec{X} \neq 0} (\Delta X_j)^2 \Gamma(\Delta\vec{X} \mid \vec{X}), \quad j = 1, \dots, d, \quad (3.96)$$

natomiast $\langle V_j \rangle$, $j = 1, \dots, d$, są składowymi prędkości dryfu

$$\langle V_j \rangle = \sum_{\Delta \vec{X} \neq 0} \Delta X_j \Gamma(\Delta \vec{X} | \vec{X}), \quad j = 1, \dots, d. \quad (3.97)$$

Równanie Fokkera-Plancka (3.95) można przedstawić w postaci równania ciągłości, gdyż prąd prawdopodobieństwa wynosi

$$\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_V \quad (3.98)$$

składając się z dyfuzyjnego prądu prawdopodobieństwa

$$\vec{j}_D = - \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} [D_1(\vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0), \dots, \frac{\partial}{\partial X_d} [D_d(\vec{X}, t) \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)] \right\}, \quad (3.99)$$

oraz konwekcyjnego prądu prawdopodobieństwa

$$\vec{j}_V = \left\{ \langle V_1 \rangle \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0), \dots, \langle V_d \rangle \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0) \right\}. \quad (3.100)$$

Zatem,

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\vec{X}, t | \vec{X}_0, t_0)}{\partial t} + \nabla_d \vec{j} = 0, \quad (3.101)$$

jak być powinno.

3.12 Autokorelacje - złamanie Centralnego Twierdzenia Granicznego

Rozpoczynamy teraz omawianie sytuacji, w których ulega złamaniu centralne twierdzenie graniczne; wykazemy, że może to być związane z długozasięgowymi autokorelacjami występującymi pomiędzy pojedynczymi przemieszczeniami cząsteczki. Istnienie autokorelacji oznacza, że pojedyncze przemieszczenia danej cząsteczki są od siebie statystycznie zależne. Typowym przykładem takiej sytuacji może być błędzenie ("główki") usztywnionego polimeru zależne od orientacji wyjściowego monomeru zwane błędzeniem ukierunkowanym ("directed random walk") lub błędzenie polimeru bez samoprzecięć ("self-avoiding random walk") albo skorelowane błędzenie kanałowe (jednowymiarowe) jonów w sieci krystalicznej (któremu towarzyszą "back-jump correlations" lub "feed-back" correlations).

Rozważmy sumaryczną funkcję autokorelacji wprowadzoną w rozdz.3.10 przez wyrażenie (3.61)

$$\mathcal{K}(n) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n K(i, j) = \sum_{i < j}^n K(i, j), \quad (3.102)$$

gdzie cząstkowa (parcjalna) funkcja autokorelacji

$$K(i, j) = \langle \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j \rangle - \langle \vec{x}_i \rangle \cdot \langle \vec{x}_j \rangle \quad (3.103)$$

dotyczy dwóch dowolnie wybranych pojedynczych przemieszczeń danej cząsteczki (gdzie " $\cdot$ " oznacza jak zwykle mnożenie skalarne wektorów).

Wzór (3.102) można przepisać w postaci

$$\mathcal{K}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n K(i, j) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j-i=1}^{n-i} K(i, j), \quad (3.104)$$

która będzie w dalszym ciągu przekształcana. Zakładając że wszystkie parcjalne funkcje autokorelacji są jednorodne (co wynika z jednorodności czasu wyrażonego liczbą pojedynczych przemieszczeń i jednorodności przestrzeni) i nie przejawiają asymptotycznych oscylacji, można zapisać

$$K(i, j) = K(j - i) \quad (3.105)$$

co razem z (3.104) daje

$$\mathcal{K}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-i} K(m). \quad (3.106)$$

Należy podkreślić, że własność jednorodności jest cechą powszechnie występującą - obserwuje się ją nie tylko w stanach równowagowych czy ogólniej stacjonarnych układu ale nawet w przypadku relaksacji układu. Korzystając z wyrażenia (3.106) wykazujemy, że funkcję autokorelacji $\mathcal{K}(n)$ można przekształcić do wygodnej postaci

$$\mathcal{K}(n) = \sum_{j=1}^n (n - j) K(j) = n \sum_{j=1}^n K(j) - \sum_{j=1}^n j K(j). \quad (3.107)$$

Wyprowadzenie wzoru (3.107) opiera się po prostu na zestawieniu wszystkich składników sumy podwójnej (3.106) uzupełnionej o pomocniczą sumę $\sum_{j=1}^n j Z(j)$ (na razie elementy $Z(j)$, $j = 1, \dots, n$, są dowolne) w postaci tabelarycznej, gdzie na przecięciu każdego wiersza i kolumny stoi jeden element tak poszerzonej sumy. Sumując teraz elementy tabeli pionowo oraz przyjmując, że $Z(j) = K(j)$, $j = 1, \dots, n$, otrzymujemy

$$n \sum_{j=1}^n K(j) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-i} K(m) + \sum_{j=1}^n j K(j) \quad (3.108)$$

a stąd w oparciu o (3.106) poszukiwany wzór (3.107).

Tabela 3.1: Zestawienie wszystkich elementów sumy $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-i} K(m) + \sum_{j=1}^n jZ(j)$

$i = 1$	$K(1)$	$K(2)$	$\dots$	$K(n-2)$	$K(n-1)$	$Z(n)$
$i = 2$	$K(1)$	$K(2)$	$\dots$	$K(n-2)$	$Z(n-1)$	$Z(n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$i = n-1$	$K(1)$	$Z(2)$	$\dots$	$Z(n-2)$	$Z(n-1)$	$Z(n)$
$i = n$	$Z(1)$	$Z(2)$	$\dots$	$Z(n-2)$	$Z(n-1)$	$Z(n)$

3.12.1 Dyspersja a funkcja autokorelacji

Ze wzorów (3.61) oraz (3.107) wynika, że znalezienie zależności sumarycznej dyspersji σ_X od czasu dla długich czasów wymaga znajomości zależności sumarycznej funkcji autokorelacji $\mathcal{K}$ od n dla dużych n a więc zależności cząstkowej funkcji autokorelacji K od n dla dużych n .

Istnieją co najwyżej trzy różne przypadki asymptotycznego (gdy $n \rightarrow \infty$), monotonicznego zanikania cząstkowej funkcji autokorelacji

- 1) zanikanie szybsze niż $1/n$ czyli, $K(n) \approx Cn^{-(1+\alpha)}$, $0 < \alpha$,
- 2) zanikanie wolniejsze niż $1/n$ czyli, $K(n) \approx Cn^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$,
- 3) $K(n) \approx C/n$,

gdzie $C(> 0)$ jest pewną stałą. Przypadek 1) definiuje tzw. **autokorelacje krótko-zasięgowe**, zaś przypadek 2) **autokorelacje długozasięgowe**; sytuacja 3) określa przypadek marginalny (przejściowy).

Przedstawmy teraz funkcję autokorelacji w postaci sumy dwóch następujących składników

$$\mathcal{K}(n) = \mathcal{K}(n_0) + \mathcal{K}_{>}(n), \quad (3.109)$$

gdzie

$$\mathcal{K}_{>}(n) = n \sum_{j=n_0+1}^n K(j) - \sum_{j=n_0+1}^n jK(j), \quad (3.110)$$

tutaj n_0 jest taką najmniejszą liczbą naturalną powyżej której oba sumowania w (3.109) można zastąpić całkowaniem. Zatem

$$\mathcal{K}_{>}(n) \approx n \int_{n_0}^n K(j) dj - \int_{n_0}^n jK(j) dj; \quad (3.111)$$

jak widać, $\mathcal{K}(n_0)$ jest stałą (nieistotną dla dalszych rozważań) - oznaczamy ją przez C_0 . Można teraz wyznaczyć asymptotyczne zachowanie sumarycznej funkcji autokorelacji $\mathcal{K}(n)$ dla trzech wspomnianych powyżej przypadków.

Przypadek 1

Rozważmy najpierw sytuację gdy $0 < \alpha \neq 1$. Wtedy, z (3.109) oraz (3.111) po wykonaniu prostego całkowania wynika, że dla $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{K}_{>}(n) \approx Cn \int_{n_0}^n \frac{1}{j^{1+\alpha}} dj - C \int_{n_0}^n \frac{1}{j^\alpha} dj = C'_0 + C_1 n^{1-\alpha} + C_2 n^{1-\alpha}, \quad (3.112)$$

gdzie C'_0 , C_1 i C_2 są stałymi (które łatwo można powiązać ze stałą C oraz wykładnikiem α).

Rozważmy teraz ten sam przypadek ale dla szczególnej sytuacji gdy $\alpha = 1$. Wówczas, analogicznie jak poprzednio, z (3.109) oraz (3.111) otrzymujemy

$$\mathcal{K}(n) \approx C'_0 - C_1 \ln(n). \quad (3.113)$$

Jak widać, każde z wyrażeń (3.112) oraz (3.113) podzielone przez n jest, w przypadku autokorelacji krótkozasięgowych, malejącą funkcją n . Zatem, z równania (3.61) na wariancję sumarycznego przemieszczenia cząsteczki otrzymujemy dla asymptotycznie dużego n , że

$$(\sigma_X(n))^2 \approx n(\sigma_x)^2. \quad (3.114)$$

Można powiedzieć, że **korelacje krótkozasięgowe nie zmieniają asymptotycznie brownowskiego charakteru błędów przypadkowych.**

Przypadek 2

Wykonując obliczenia analogicznie jak w poprzednim przypadku, otrzymujemy

$$\mathcal{K}(n) \approx C'_0 + C_1 n^{2-\gamma} + C_2 n^{2-\gamma}, \quad (3.115)$$

przy czym jak widać, wykładnik $2 - \gamma > 1$. Łącząc powyższe wyrażenie z (3.61) dostajemy dla asymptotycznie dużych n

$$(\sigma_X(n))^2 \approx n(\sigma_x)^2 + (C_1 + C_2)n^{2-\gamma} \sim n^{2-\gamma}. \quad (3.116)$$

Zatem dyspersja sumarycznego przemieszczenia rośnie superliniowo z całkowitą liczbą przemieszczeń. Wynik ten oznacza, że korelacje długozasięgowe zmieniają klasę uniwersalności błędzenia przypadkowego. Mówimy teraz o superdyfuzji (a dokładniej supersamodyfuzji) cząsteczki. Zauważmy, że skrajnym przypadkiem superdyfuzji jest tzw. dyfuzja balistyczna odpowiadająca wykładnikowi $\gamma = 0$ co fizycznie oznacza, że wszystkie pojedyncze przemieszczenia są identyczne (tzn. o jednakowej długości i zwrócone w tę samą stronę) - może to opisywać skrajny przypadek "dyfuzji" polimeru o 100%-owej sztywności. Innymi słowy, może to być np. ruch jednostajny (ze stałą prędkością) sztywnego pręta.

Przypadek 3

Analogicznie jak w poprzednich przypadkach, z (3.109) oraz (3.111) otrzymujemy (dla asymptotycznie dużych n) po prostych obliczeniach,

$$(\sigma_X(n))^2 \approx n((\sigma_x)^2 - C_1) + C_2 n \ln(n) \sim n \ln(n). \quad (3.117)$$

Jak widać, jest to rezultat o jeszcze innym charakterze niż dwa poprzednie - istnienie korelacji niezwykle wzbogaca problematykę szeroko rozumianej dyfuzji.

Należy podkreślić, że autokorelacje długozasięgowe prowadzą w ogólności do rozkładów granicznych różniących się od rozkładu Gaussa (J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications*, Phys. Rep. **195** (1990) 127-293).

3.13 CTG a zanik potęgowy: zderzenie dwóch światów

Omawiamy przykład, który pozwoli zorientować się w sposobie funkcjonowania CTG w przypadku gdy dany rozkład zanika algebraicznie, czyli posiada algebraicznie zanikający "ogon", ale (pomimo to) skończoną wariancję (patrz D. Sornette: "Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools", Springer-Verlag, Berlin 2000, oraz J.-P. Bouchaud, M. Potter: "Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management", Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001). Zauważmy, że jest to sytuacja odmienna od tej z jaką mamy do czynienia np. w przypadku obciętego rozkładu Lévy'ego (patrz R.N. Mantegna, H.E. Stanley: "Ekonofizyka. Wprowadzenie", tłum. ang., Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001), gdzie zmienna losowa podlega rozkładowi Lévy'ego jedynie w skończonym zakresie (poza którym rozkład po prostu znika).

3.13.1 Rozkład Gaussa i rozkład potęgowy w jednym

W pierwszym etapie rozważmy jawną postać gęstości rozkładu Studenta (czyli W. S. Gosseta) dla trzech stopni swobody (tzn. $\mu = 3$)

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{2\sigma^3}{(\sigma^2 + x^2)^2}, \quad (3.118)$$

która jest scharakteryzowana skończoną wariancją równą po prostu σ^2 ; często w literaturze dla (wąsko rozumianego) rozkładu Studenta przyjmuje się, iż $\sigma^2 = 3$.

W dalszej części wykorzystujemy funkcję charakterystyczną gęstości rozkładu (3.118) czyli transformatę Fouriera tej gęstości $\tilde{p}(k)$, którą łatwo wyznaczyć (patrz np. H. Batemann, A. Erdélyi: "Tables of Integral Transforms", Vol.1, McGraw-Hill

Book Comp. Inc., New York 1954) wiedząc, że

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{(\sigma^2 + x^2)(\sigma_1^2 + x^2)} \right] = \frac{\pi}{(\sigma^2 - \sigma_1^2)} \left[\frac{1}{\sigma_1} \exp(-(\sigma_1 - \sigma) |k|) - \frac{1}{\sigma} \right] \exp(-\sigma |k|) \quad (3.119)$$

i przyjmując $\sigma_1 \rightarrow \sigma$ (jak zwykle, $\mathcal{F}[f(x)]$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $f(x)$). Stąd otrzymujemy, po uwzględnieniu (3.118), że

$$\tilde{p}(k) = (1 + \sigma |k|) \exp(-\sigma |k|). \quad (3.120)$$

Zauważmy, że dla $(x/\sigma)^2 \gg 1$ rozkład (3.118) przybiera postać

$$p(x) \approx \frac{1}{\pi} \frac{2\sigma^3}{|x|^{d+\mu}}, \quad (3.121)$$

gdzie $d = 1$. Tego typu algebraiczny zanik rozkładu $p(x)$ prowadzi do nieskończonych wartości momentów absolutnych zmiennej losowej x czyli

$$\langle |x|^m \rangle = \infty, \quad (3.122)$$

dla wykładnika $m \geq \mu$.

Natomiast, gdy $(x/\sigma)^2 \ll 1$,

$$p(x) \approx \frac{1}{\pi} \frac{2}{\sigma} \left[1 - 2 \left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} \cdot p_G(x; \sigma/2), \quad (3.123)$$

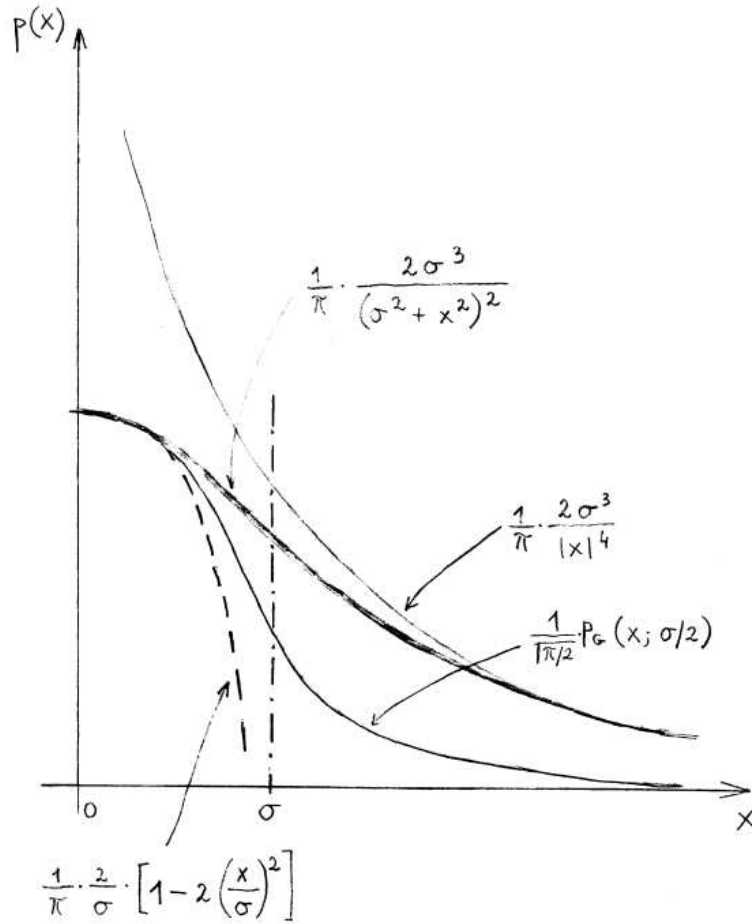
gdzie $p_G(x; \sigma/2)$ jest (centrowanym w zerze) rozkładem Gaussa zmiennej losowej x o odchyleniu standardowym $\sigma/2$.

Rys.3.4 jest podsumowaniem powyższych rozważań - przedstawiono na nim zarówno ścisły rozkład (3.118) jak też pozostałe, przybliżone jeden (3.121) i dwa w wyrażeniu (3.123). Jak widać, obszar wokół $x = \sigma$ można traktować jako przejściowy pomiędzy skrajnymi, omawianymi powyżej.

Przejdziemy teraz do **drugiego etapu** naszych rozważań. Zauważmy, że skończona wariancja wyjściowego rozkładu (3.118) pozwala na zastosowanie Centralnego Twierdzenia Granicznego. W tym celu wyrazimy gęstość prawdopodobieństwa dla sumarycznej zmiennej losowej $X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $n = 2, 3, \dots$, w postaci następującej konwolucji

$$\begin{aligned} P_n(X_n) &= \overbrace{(p \otimes p \otimes \dots \otimes p)}^n(X_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{n-2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \\ &\quad p(X_n | X_{n-1}) p(X_{n-1} | X_{n-2}) \dots p(X_2 | X_1) p(X_1), \end{aligned} \quad (3.124)$$

gdzie $p(X_j | X_{j-1})$ jest gęstością prawdopodobieństwa wystąpienia określonej zmiennej sumarycznej X_j pod warunkiem pojawienia się sumarycznej zmiennej X_{j-1} , $j =$



Rysunek 3.4: Ścisły rozkład (3.118) jak też pozostałe, przybliżone jeden (3.121) i dwa w wyrażeniu (3.123).

$2, 3, \dots, n$. W dalszym ciągu, korzystając z warunku jednorodności (stacjonarności) procesu

$$p(X_j | X_{j-1}) = p(X_j - X_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (3.125)$$

otrzymujemy z (3.124), że transformata Fouriera

$$\tilde{P}_n(k) = [\tilde{p}(k)]^n = (1 + \sigma |k|)^n \exp(-n\sigma |k|); \quad (3.126)$$

czyli funkcja charakterystyczna $\tilde{P}_n(k)$ prawdopodobieństwa $P_n(X_n)$ jest n -tą potęgą funkcji charakterystycznej $\tilde{p}(k)$ elementarnego prawdopodobieństwa $p(x)$. Rozkład spełniający taką własność nazywamy *nieskończenie podzielny*. Rozkłady nieskończenie podzielne nie muszą być stabilne (czyli mogą zmieniać swój kształt przy

przechodzeniu od pojedynczej do sumarycznej zmiennej losowej); na szczęście odwrotne twierdzenie jest prawdziwe. Niestety nie jest znana zamknięta postać rozkładu posiadającego funkcję charakterystyczną w postaci (3.126) dlatego dalej jesteśmy zmuszeni korzystać jedynie z odpowiednich przybliżeń.

Rozwijając działanie $\ln \tilde{P}_n(k)$ w szereg w otoczeniu punktu $k = 0$ i ograniczając się do wyrazów rzędu $|k|^3$, można przybliżyć funkcję charakterystyczną (3.126) w następujący sposób

$$\tilde{P}_n(k) \approx 1 - \frac{1}{2}n\sigma^2 k^2 + \frac{1}{3}n\sigma^3 |k|^3 \quad (3.127)$$

czyli także z dokładnością do wyrazów rzędu $|k|^3$. Podkreślmy, że wyrazy tego typu zależą od modułu k co oznacza, że trzecia pochodna funkcji charakterystycznej $\tilde{P}_n(k)$ po k w zerze nie istnieje (istnieją tylko pochodne lewo- i prawostronne, które są od siebie różne) a tym samym nie istnieje trzeci moment rozkładu, tak jak to ma miejsce dla potęgowo zanikającego rozkładu o wykładniku 4. Zauważmy, że niezależnie od wartości $n = 1, 2, \dots$, wyraz $\sim |k|^3$, który możemy nazwać singularnym, jest zawsze obecny tzn. funkcja charakterystyczna jest stabilna ze względu na ten wyraz lub inaczej algebraicznie zanikający "ogon" rozkładu jest stabilny ze względu na n . Wynika stąd, że dla dowolnego n istnieje zwasze na tyle duże X , że

$$P_n(X) \approx \frac{2n\sigma^\mu}{\pi X^{d+\mu}}. \quad (3.128)$$

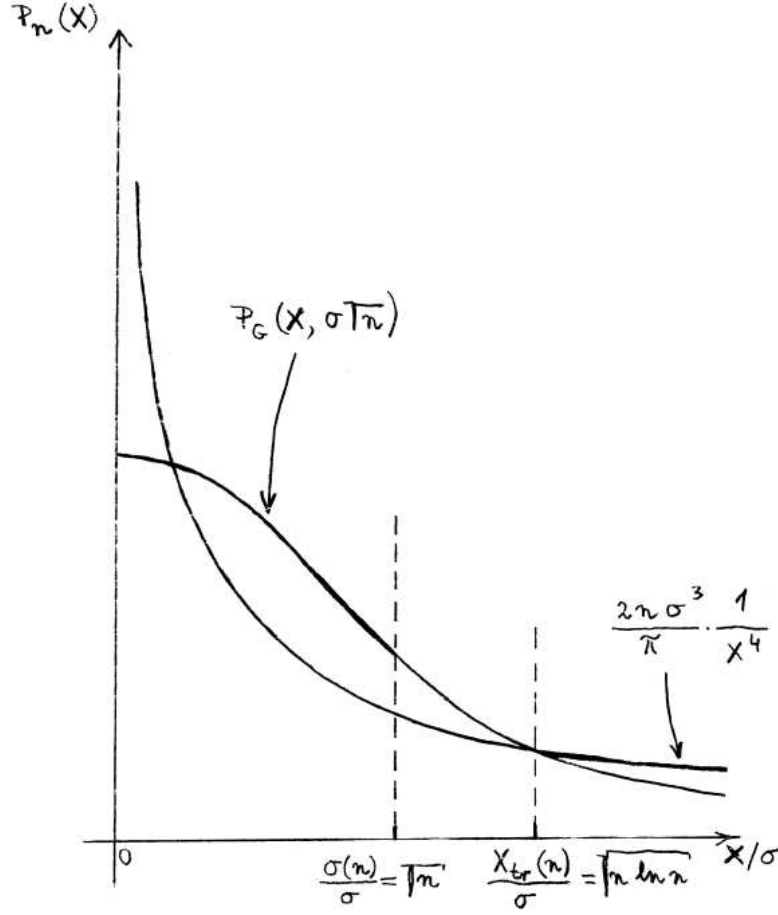
Można łatwo sprawdzić, korzystając z (3.126), że wariancja $\sigma^2(n)$ rozkładu $P_n(X_n)$ wynosi

$$\sigma^2(n) \left(= -\frac{d^2 \tilde{P}_n(k)}{dk^2} \Big|_{k=0} \right) = n \cdot \sigma^2, \quad (3.129)$$

czyli jest skończona dla skończonego n . W oparciu o CTG otrzymujemy, dla dostatecznie dużego $n(\gg 1)$, że

$$P_n(X) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{X^2}{2n\sigma^2}\right), \quad (3.130)$$

czyli jest asymptotycznie przybliżany rozkładem Gaussa o wariancji danej przez (3.129). Przybliżenie to jest tym lepsze, czyli zachodzi dla tym większego zakresu zmiennej losowej X , im większe jest n . Zatem możemy oczekiwać istnienia takiej charakterystycznej wartości $X_{tr}(n)$ monotonicznie rosnącej ze wzrostem n , że jedynie dla $X \ll X_{tr}(n)$ spełnione jest przybliżenie gaussowskie (3.130) natomiast dla $X \gg X_{tr}(n)$ właściwym przybliżeniem $P_n(X_n)$ jest jakiś inny rozkład - **kluczowym zadaniem niniejszych rozważań jest znalezienie tego rozkładu** (na podstawie rozważań przeprowadzonych na wstępie niniejszego rozdziału przypuszczamy, że jest to rozkład potęgowy) **oraz zależności $X_{tr}(n)$ od n .**



Rysunek 3.5: Ilustracja przejścia od rozkładu Gaussa dla $X \ll X_{tr}(n) = \sigma\sqrt{n \ln n}$ do rozkładu potęgowego dla $X \gg X_{tr}(n) = \sigma\sqrt{n \ln n}$.

Teraz bez trudu znajdujemy to poszukiwane pośrednie X_{tr} , które najlepiej charakteryzuje obszar przejściowy; porównując (3.128) z (3.130)

$$\frac{2n\sigma^\mu}{\pi[X_{tr}(n)]^{d+\mu}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[X_{tr}(n)]^2}{2n\sigma^2}\right), \quad (3.131)$$

otrzymujemy po prostych przekształceniach (zaniedbując poprawkę logarytmiczną i stałe składniki)

$$X_{tr}(n) \approx \sigma\sqrt{(\mu - 2)n \ln n}, \quad (3.132)$$

co, jak widać, ma sens tylko dla $\mu \geq 2$. Rys.3.5 dobrze ilustruje opisaną powyżej sytuację (dla $\mu = 3$): ze wzrostem n wzrasta szybciej niż liniowo rozmiar obszaru, w którym sumaryczna zmienna losowa podlega rozkładowi Gaussa. Innymi słowy,

ze wzrostem n coraz dalej odsuwa się granica obszaru w którym zmienna losowa X posiada rozkład potęgowy czyli maleje prawdopodobieństwo $P(|X| > X_{tr})$. Oszacujemy to prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} P(|X| \geq X_{tr}) &= P(X \geq X_{tr}) + P(X \leq -X_{tr}) \\ &\geq P(|X| > X_{tr}) = P(X > X_{tr}) + P(X < -X_{tr}), \end{aligned} \quad (3.133)$$

gdzie prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} P(X \geq X_{tr}) + P(X \leq -X_{tr}) &= 2 \int_{\sigma \sqrt{(\mu-2)n \ln n}}^{\infty} \frac{2n\sigma^\mu}{\pi X^{d+\mu}} dX \\ &= \frac{4}{\mu(\mu-2)^{\mu/2} \pi} \frac{1}{n^{\mu/2-1} \ln^{\mu/2} n}, \end{aligned} \quad (3.134)$$

dążąc, dla $\mu > 2$, do zera gdy $n \rightarrow \infty$. Tym samym prawdopodobieństwo $P(|X| > X_{tr})$ dąży do zera nie wolniej niż $1/n^{\mu/2-1} \ln^{\mu/2} n$. Zauważmy, że dla $\mu \leq 2$ całe nasze postępowanie w niniejszym rozdziale załamuje się - mamy wówczas do czynienia z rozkładem Lévy'ego a więc z odmiennym "światem statystycznym", któremu poświęcone są dalsze części niniejszej pracy.

3.13.2 Od rozkładu Gaussa do rozkładu logarytmiczno-normalnego

Transformację rozkładu Gaussa w rozkład logarytmiczno-normalny (w skrócie log-normalny) można łatwo przeprowadzić korzystając z odpowiedniej transformacji zmiennej (rozpatrujemy dla prostoty przypadek jednowymiarowy). Podejście to zilustrujemy na przykładzie amorficznego substratu - obiektu używanego w rozdz. 6 oraz części IV do pogłębionej analizy wielu zagadnień związanych z procesami i rozkładami niegaussowskimi. Tutaj wykorzystamy tylko jeden aspekt tzw. **substratu gaussowskiego** w ramach tzw. modelu dolinowego błędzeń losowych.

Mówiąc tutaj o gaussowskim substracie amorficznym mamy na myśli fakt, że głębokości minimum potencjału, $\varepsilon \geq 0$, są rzeczywistymi liczbami przypadkowymi odlosowywanymi z połówkowego rozkładu Gaussa $G(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\varepsilon^2/2\sigma^2)$ (we wspomnianych rozdz. 6 i części IV używamy tzw. substratu wykładniczego). Z tego, że zmienna ε jest losowa wynika, że zmienna przetransformowana dana wzorem: $\tau(\varepsilon) = \tau_0 \exp(\varepsilon/k_B T) \geq \tau_0$, jest też zmienną losową. Stąd, pytanie jakie stawiamy tutaj brzmi: **jakiemu rozkładowi $p(\tau)$ podlega zmienna τ ?** Przy okazji zauważmy, że zmienna ta definiuje średni czas przebywania błądzącej cząsteczki w minimum potencjału o głębokości ε .

Odpowiedź na powyższe pytanie jest niemal natychmiastowa jeżeli uprzytomnimy sobie, że mamy tutaj do czynienia z rozkładami niezmienniczymi, tzn. spełniającymi równość

$$p(\tau) = G(\varepsilon(\tau)) \left| \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \right|, \quad (3.135)$$

gdzie $\varepsilon(\tau) = k_B T \ln(\tau/\tau_0)$. Podstawiając to wyrażenie na $\varepsilon(\tau)$ do wzoru (3.135) otrzymujemy ostatecznie wzór na poszukiwany rozkład

$$p(\tau) = \frac{1}{\tau_0} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \frac{1}{\tau/\tau_0} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_T^2} \ln^2(\tau/\tau_0)\right), \quad \tau/\tau_0 \geq 1, \quad (3.136)$$

który jest właśnie zapowiedzianym na wstępie tego rozdziału (ograniczonym) rozkładem logarytmiczno-normalnym; tutaj zredukowana dyspersja $\sigma_T \stackrel{\text{def.}}{=} \sigma/k_B T$.

3.14 Łańcuchy multiplikatywne: rozkład logarytmiczno-normalny

Rozkład logarytmiczno-normalny pojawił się przy rozwiązywaniu wielu zagadnień probabilistycznych np. typu kruszenia (rozdrabniania) węgla, kamienia bądź rudy [1]. Wykażemy idąc za Kołmogorowem [2], że tego typu łańcuchy¹³ mają charakter multiplikatywny (iloczynowy). Dotychczas omawialiśmy łańcuchy i procesy addytywne (sumaryczne) tzn. będące sumą niezależnych, pojedynczych zmiennych losowych (bądź też skorelowanych w sposób krótkozasięgowy). Obecnie pochylimy się nad łańcuchami i procesami multiplikatywnymi tzn. takimi, które są iloczynem tego typu zmiennych losowych czyli zachodzącymi np. w sposób sekwencyjny.

Przypuśćmy, że w wyniku wielostopniowego (wieloetapowego), sekwencyjnego kruszenia (na sitach o coraz mniejszej średnicy) liniowy rozmiar ziaren X tworzy ciąg zmiennych losowych $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n)$, gdzie X_n jest liniowym rozmiarem pojedynczego ziarna na n -tym etapie (stopniu, poziomie) kruszenia przy czym

$$0 < X_n < X_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.137)$$

Oczywiście, X_n jest zmienną losową posiadającą pewien (skończony, na ogół niewielki) rozrzut statystyczny wokół średniego rozmiaru ziaren $\langle X_n \rangle$ ¹⁴ na danym etapie (czyli po pewnym czasie) kruszenia. Kolejna różnica $X_n - X_{n-1} (< 0)$ jest jakąś przypadkową częścią (ułamkiem) wyjściowego rozmiaru ziarna X_{n-1}

$$X_n - X_{n-1} = R_n \cdot X_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.138)$$

¹³O łańcuchach stochastycznych mówimy wtedy, gdy czas jest dyskretny. Gdy czas jest ciągły to mówimy o procesach stochastycznych.

¹⁴Średnią tą należy rozumieć jako średnią po wszystkich ziarnach na danym, n -tym, etapie kruszenia. Zauważmy, że na każdym etapie kruszenia, n , tworzy się pewien stan ustalony, w którym rozmiar ziaren nie ulega już dalszemu zmniejszeniu. Wynika to z faktu, że ziarna przeleciały na sito o mniejszej średnicy otworów, przechodząc tym samym do następnego, $n+1$, etapu kruszenia. Podlegają wtedy dalszemu kruszeniu, aż do powstania nowego stanu ustalonego, itd, itp.

gdzie R_n jest zmienną losową z przedziału $-1 < R_n < 0$ ¹⁵ o rozkładzie (dla prostoty) niezależnym od n . Z powyższego wyniku (poprzez wielokrotne wykorzystanie rekurencji (3.138) dla kolejnych n), że zmienna losowa X_n ma następującą reprezentację multiplikatywną

$$x_n \stackrel{def.}{=} \frac{X_n}{X_0} = \prod_{j=1}^n p_j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.139)$$

gdzie $p_j = 1 + R_j = X_j/X_{j-1}$ jest zmienną losową z przedziału $0 < p_j < 1$ (oczywiście, o rozkładzie także niezależnym od j). Zatem, logarytmując stronami to wyrażenie otrzymujemy addytywną reprezentację równania (3.139)

$$\ln x_n = \sum_{j=1}^n y_j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.140)$$

gdzie $y_j = \ln p_j < 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, jest zmienną losową o skończonej wartości przeciętnej $\langle y_j \rangle = \langle \ln p_j \rangle < 0$ i skończonej wariancji $\sigma^2(y_j) = \langle y_j^2 \rangle - \langle y_j \rangle^2 = \langle (\ln p_j)^2 \rangle - \langle \ln p_j \rangle^2$. Oczywiście, obie wielkości są teraz niezależne od j , tzn. $\langle y_j \rangle = \langle y \rangle = \langle \ln p_j \rangle = \langle \ln p \rangle$ oraz $\sigma^2(y_j) = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \langle (\ln p)^2 \rangle - \langle \ln p \rangle^2 = \sigma^2$.

Zauważmy, że równanie (3.140) można teraz przepisać dla asymptotycznie dużego n w postaci:

$$X_n = \exp(-n \langle |\ln p| \rangle) X_0, \quad (3.141)$$

która pokazuje, że $\langle |\ln p| \rangle$ ¹⁶ pełni rolę współczynnika szybkości asymptotycznego zaniku zmiennej X_n , tzn. mówi o tym jak szybko proces $\ln x_n$ oddala się **nieograniczenie** od stanu wyjściowego $\ln(x_0 = 1) = 0$.

Jak widać, **zmienna losowa $\ln x_n$ nie ma dolnego ograniczenia**, natomiast od góry jest ograniczona przez 0. Wynika stąd, że tylko wtedy gdy wpływ tego ograniczenia jest zaniedbywalny można przyjąć, iż sumaryczna zmienna losowa $\sum_{j=1}^n y_j$ spełnia Centralne Twierdzenie Graniczne¹⁷ czyli, że zmienna losowa $\ln x_n$ posiada rozkład asymptotycznie normalny

$$\mathcal{P}(\ln x_n) d \ln x_n \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(n)}} \exp\left(-\frac{(\ln x_n - \mu_n)^2}{2\sigma^2(n)}\right) d \ln x_n \quad (3.142)$$

gdzie średnia po wszystkich ziarnach na danym etapie kruszenia

$$\mu_n \stackrel{def.}{=} \langle \ln x_n \rangle = \sum_{j=1}^n \langle y_j \rangle = n \langle y \rangle = n \langle \ln p \rangle \quad (3.143)$$

¹⁵Nierówność ta wynika natychmiast z nierówności (3.137) wyrażonej w postaci $0 < X_n < (1 + R_n) X_{n-1} < X_{n-1}$.

¹⁶Proszę nie mylić tej średniej po j , gdzie $j = 1, 2, \dots, n$, ze średnią $\langle y_j \rangle$ po różnych wartościach y_j dla ustalonego pokolenia j .

¹⁷Interesującą sytuację, gdy istnieje dolne ograniczenie (a nie istnieje górne) rozważamy w rozdz.3.14.4.

oraz sumaryczna wariancja

$$\sigma^2(n) = \sigma^2(\ln x_n) = \sum_{j=1}^n \sigma^2(y_j) = n\sigma^2. \quad (3.144)$$

W powyższych oznaczeniach warunek zachodzenia Centralnego Twierdzenia Granicznego można zapisać następująco:

$$|\mu_n| \gg \sigma(n) \equiv \langle y \rangle \gg \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.145)$$

Z rozkładu (3.142) otrzymujemy bezpośrednio rozkład logarytmicznie-normalny (czyli w skrócie log-normalny) dla zmiennej x_n

$$P(x_n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(n)}} \frac{1}{x_n} \exp\left(-\frac{(\ln x_n - \mu_n)^2}{2\sigma^2(n)}\right), \quad (3.146)$$

lub dla zmiennej $x_n/\bar{x}_n$, gdzie $\ln \bar{x}_n \stackrel{def.}{=} \mu_n (= \langle \ln x_n \rangle)$,

$$P\left(\frac{x_n}{\bar{x}_n}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(n)}} \frac{1}{x_n/\bar{x}_n} \exp\left(-\frac{(\ln(x_n/\bar{x}_n))^2}{2\sigma^2(n)}\right), \quad (3.147)$$

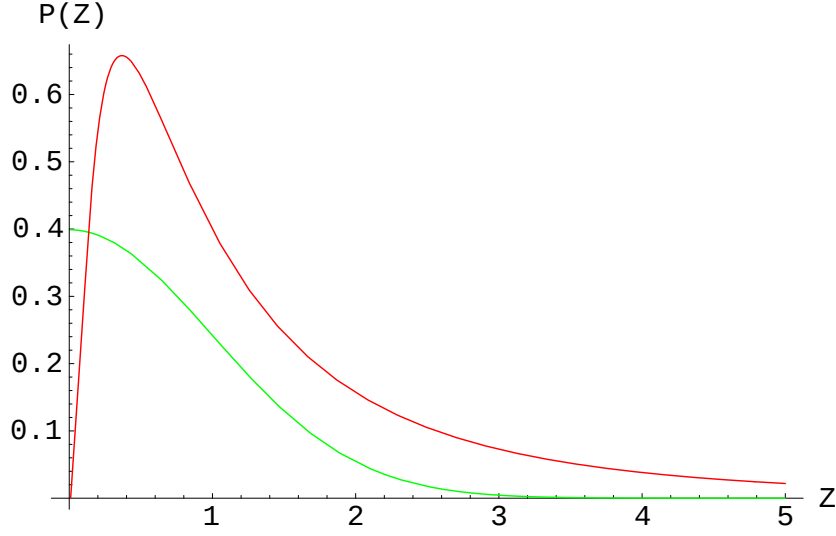
które stanowią podstawę naszej dalszej dyskusji w tym rozdziale. Oczywiście, ani rozkład (3.142) ani rozkłady (3.146) i (3.147) nie są rozkładami asymptotycznie stacjonarnymi (o których będzie mowa w podrozdziałach 3.14.4 i 3.14.8) niemniej ich przydatność jest wprost trudno przecenić. Podkreślmy raz jeszcze, **u podstaw pełnego (nieograniczonego) rozkładu logarytmiczno-normalnego leży fakt braku jakichkolwiek ograniczeń przestrzennych na zmienną losową moltiplikatywnego łańcucha stochastycznego.**

Łatwo sprawdzić (tytułem prostego ćwiczenia), że rozkład $\mathcal{P}\left(\frac{x_n}{\bar{x}_n}\right)$ posiada maksimum dla

$$\frac{x_n}{\bar{x}_n} = \frac{x_n^{max}}{\bar{x}_n} = \exp(-\sigma^2(n)) \quad (3.148)$$

oraz jest asymetryczny. Na rys.3.6 przedstawiono ten rozkład dla zmiennej względnej $Z \stackrel{def.}{=} x_n/\bar{x}_n$ oraz dyspersji jednostkowej $\sigma(n) = 1$ – widać, jak bardzo różni się on od odpowiadającego mu rozkładu normalnemu (Gaussa) o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji.

Zauważmy, że maksimum $\ln(x_n^{max})$ rozkładu (3.146) przesuwają się w stronę liczb coraz bardziej ujemnych w miarę jak n rośnie czyli jest "odpychane" od zera w kierunku ujemnym ze względu na to, że średnia $\langle \ln p \rangle$ jest mniejsza od zera - będzie to jeszcze dyskutowane w rozdz. 3.14.4.



Rysunek 3.6: Porównanie rozkładu log-normalnego (to ten posiadający lokalne maksimum) z odpowiadającym mu rozkładem Gaussa.

Rozkład log-normalny posiada jeszcze jedną, charakterystyczną własność mianowicie, znajomość nawet wszystkich momentów tego rozkładu nie określa go jednoznacznie. Można łatwo sprawdzić, że rozkład postaci

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(n)}} \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\ln^2(Z)}{2\sigma^2(n)}\right) [1 + a \sin(2\pi \ln(Z))], \quad -1 < a < 1, \quad (3.149)$$

ma identyczne momenty jak odpowiadający mu rozkład logarytmiczno-normalny (3.147).

3.14.1 Od rozkładu log-normalnego do potęgowego

Wykażemy teraz ważną własność rozkładu log-normalnego polegającą na imitowaniu rozkładu potęgowego w szerokim zakresie zmiennej niezależnej. Zauważmy w tym celu, że zachodzi następująca tożsamość

$$\exp(a \cdot \ln^2 x) \equiv x^{a \cdot \ln x}, \quad (3.150)$$

korzystając z niej możemy rozkład log-normalny (3.147) przepisać w postaci

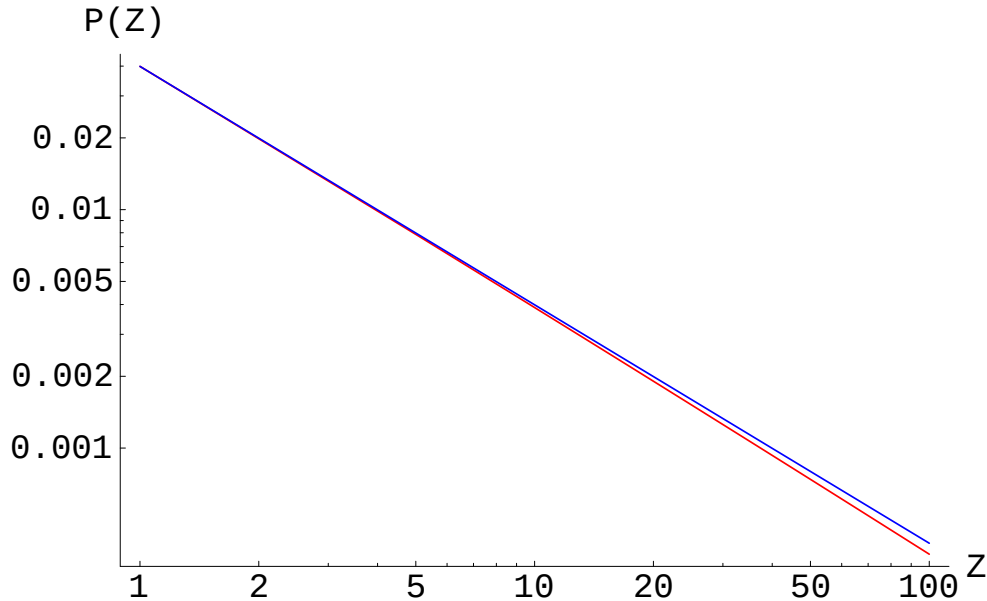
$$P(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(n)}} \left(\frac{x_n}{\bar{x}_n}\right)^{-1-\alpha(x_n)}, \quad (3.151)$$

gdzie wolnozmienna funkcja $\alpha(x_n) \stackrel{def.}{=} \frac{1}{2\sigma^2(n)} \ln\left(\frac{x_n}{\bar{x}_n}\right)$. Jak widać, gdy spełniony jest warunek

$$|\alpha(x_n)| \ll 1 \equiv |\ln(x_n/\bar{x}_n)| \ll 2\sigma^2(n), \quad (3.152)$$

wtedy mamy do czynienia z rozkładem potęgowym o wykładniku potęgi w przybliżeniu równym 1 co stanowi źródło szumu typu $1/f$, o którym jest mowa poniżej.

Na rysunku 3.7 porównaliśmy taki rozkład log-normalny (3.147), który spełnia warunek (3.152) (gdyż przyjęliśmy, że $\sigma(n) = 10$ oraz $1 \leq Z(= x_n/\bar{x}_n) \leq 100$) z odpowiadającym mu (czyli posiadającym tę samą wartość parametru $\sigma(n)$) rozkładem potęgowym kładąc po prostu we wzorze (3.151) wykładnik $\alpha = 0$. Jak widać, rozróż-



Rysunek 3.7: Porównanie rozkładu log-normalnego (to ten położony nieco niżej) z odpowiadającym mu rozkładem potęgowym o wykładniku potęgi równym 1 w skali log-log. Jak widać, obie krzywe są trudne do odróżnienia w zakresie Z spełniającym (3.152).

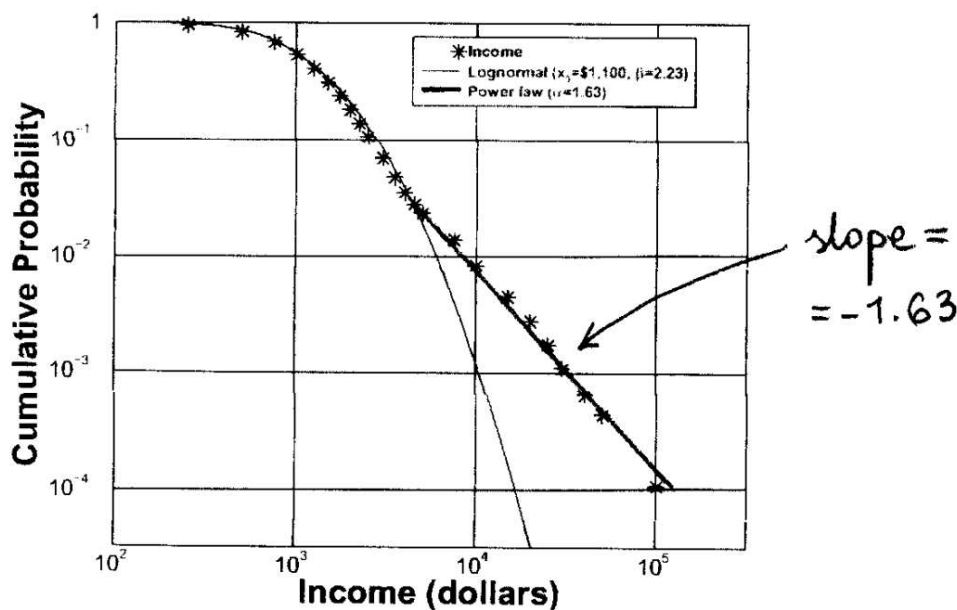
nienie w tych warunkach obu rozkładów jest trudne tym bardziej gdy uwzględnimy (nieobecny na rysunku) nieunikniony rozrzut punktów doświadczalnych.

3.14.2 Log-normalne oraz potęgowe dochody jednostek w społeczeństwie

Równanie (3.138) opisujące proces multiplikatywny można interpretować tak jak to uczynił R. Gibrat w roku 1931 analizując statystykę osób o niskich i średnich dochodach (W. Souma: "Physics of Personal Income", arXiv:cond-mat/0202388 v1 22 Feb 2002); z tego powodu w analizie finansowej charakterystyczny współczynnik $\beta = 1/\sqrt{2\sigma^2(n)}$ parametryzujący rozkład log-normalny (3.147) nosi nazwę indeksu Gibrata. Gibrat założył, że roczny przyrost dochodu jednostki $X_n - X_{n-1}$ jest jakimś losowym ułamkiem dochodu X_{n-1} w roku poprzedzającym a sam dochód X_n w

dowolnym roku n jest nieujemny. Oznacza to, że czynnik losowy R_n w równaniu (3.138) można traktować (podobnie jak to ma miejsce we wcześniej omawianym procesie kruszenia) jako nie mniejszy od -1 ale nieograniczony od góry (gdyż może się zdarzyć, że w danym roku jednostka osiągnie znaczny zysk, w przeciwieństwie do procesu kruszenia) co nie wpływa na omawiane wyprowadzenie rozkładu log-normalnego¹⁸.

Na rysunku 3.8 przedstawiono skumulowane prawdopodobieństwo dochodów osobistych obywateli Stanów Zjednoczonych w latach 1935-36 od najniższych po najwyższe dostępne (w skali $\log - \log$; gwiazdkami zaznaczono dane empiryczne). Widać, że dane dla jednostek o niskich dochodach dają się opisać rozkładem log-normalnym (cienka czarna linia) o indeksie Gibrata $\beta = 1.63$ i wartości średniej $\bar{x}_n = 1100$ [\$], natomiast jednostki o dochodach przeciętnych a zwłaszcza wysokich (gruba czarna linia) opisują się rozkładem Pareto-Lévy'ego o indeksie $\alpha = 1.63$ (gdzie błąd jest na trzecim miejscu po kropce dziesiętnej). W oparciu o wykres przedstawiony na rys.

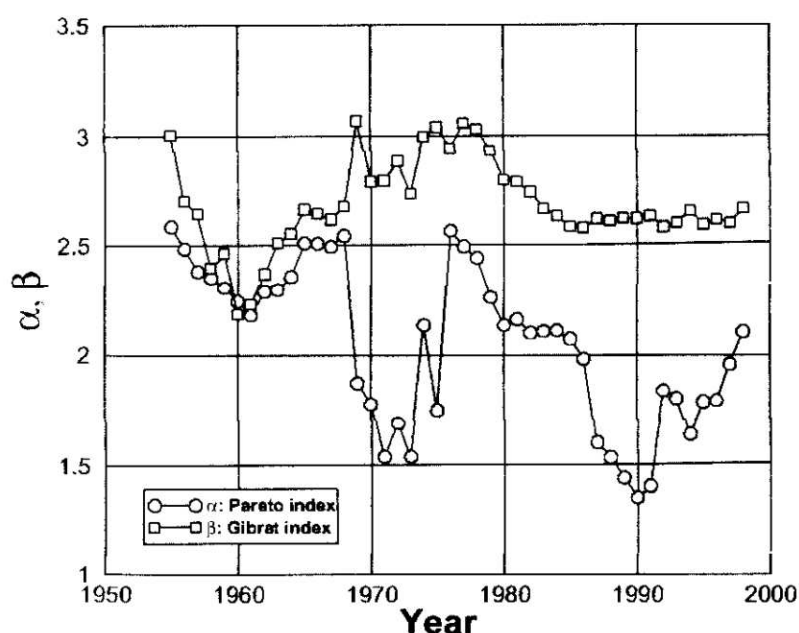


Rysunek 3.8: Porównanie (typu Gibrata) danych empirycznych (gwiazdki) z rozkładem log-normalnym (cienka czarna linia ciągła o indeksie Gibrata $\beta = 2.23$ i $\bar{x}_n = 1100$ [\$]) oraz z rozkładem Pareto-Lévy'ego (gruba linia ciągła o indeksie rozkładu $\alpha = 1.63$).

¹⁸Chodzi o to, że występowanie takiego ograniczenia zmusiłoby nas do wymagania przyjętego w rozdz. 3.14, że $\langle \ln p \rangle < 0$. Dopiero takie ograniczenie pozwoliło na wyprowadzenie tam rozkładu log-normalnego dla dostatecznie dużych n , odsuwając centrum rozkładu na lewo, dostatecznie daleko od wpływu tego (górnego) ograniczenia.

3.8 można stwierdzić, że rozkładowi Pareto podlega blisko 1% osób czynnych zawodowo podczas gdy pozostałe podlegają rozkładowi log-normalnemu. Zaskakującym może być fakt znikomej liczności grupy osób o przeciętnych dochodach osobistych.

Analogiczne wyniki badań przeprowadzonych nad społeczeństwem japońskim w okresie 44 lat od roku 1955 do 1998 zestawiono na rys. 3.9, gdzie podano roczne wartości indeksów α and β . Jak widać, w niektórych latach indeks Pareto był większy



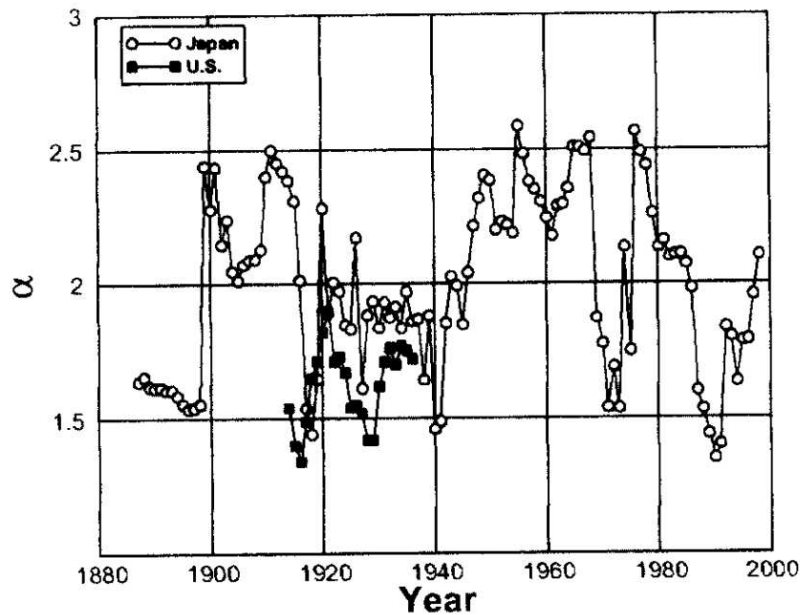
Rysunek 3.9: Wartości indeksów: Pareto α (kółka) i Gibrata β (kwadraciki) otrzymane z danych dotyczących społeczeństwa japońskiego w latach 1955-98.

od 2 co potraktowano jako rozrzut wokół wartości średniej indeksu $\bar{\alpha}$.

Aby wyznaczyć tę wartość średnią zebrano dane z okresu 112 lat od roku 1887 do 1998 i przedstawiono na rys. 3.10. Z danych empirycznych dotyczących Japonii wynika, że $\bar{\alpha}$ równa się (z dobrym przybliżeniem) granicznej wartości 2.

3.14.3 Potęgowe dochody przedsiębiorstw

W roku 1999 opublikowana została wielce charakterystyczna praca (K. Okuyama, M. Takayasu, H. Takayasu: "Zipf's law in income distribution of companies", *Physica A* 269 (1999) 125–131) dotycząca rozkładu rocznych dochodów przedsiębiorstw japońskich, które porównano z analogicznymi dla przedsiębiorstw włoskich - otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 3.11 Jak widać, gospodarka japońska znacznie lepiej daje się opisać prawem Zipfa niż włoska.



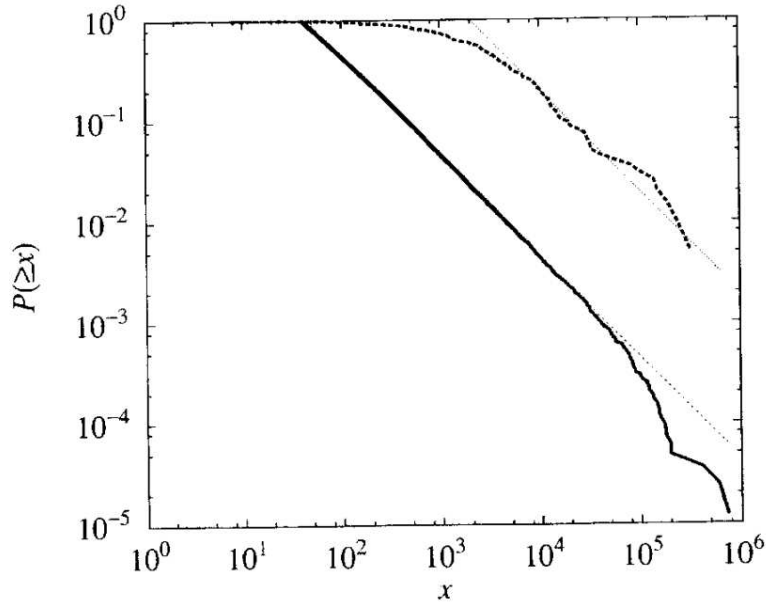
Rysunek 3.10: Wartości indeksu Pareto α dla Japonii (puste kółka) i Stanów Zjednoczonych (czarne kwadraciki) otrzymane z danych dotyczących odpowiednio społeczeństwa japońskiego w latach 1887-98 i amerykańskiego w latach 1914-1936.

Ponadto, na rys. 3.12 przedstawiono bardziej szczegółowe wyniki uzyskane na drodze analizy poszczególnych gałęzi gospodarki japońskiej. Jak widać budownictwo, które w największym stopniu podlega wolnej konkurencji, jest najlepiej opisywane prawem potęgowym w przeciwieństwie do energetyki, w której intrwencjonizm państwa jest największy.

3.14.4 Stochastyczny proces multiplikatywny w obecności bariery

Często w multiplikatywnych procesach stochastycznych, za pomocą których staramy się opisać rzeczywistość, zmienne losowe posiadają naturalne ograniczenie od dołu - są dodatnie. Na przykład, cena akcji na giełdzie czy też liczebność określonej populacji zwierząt na danym terytorium rezerwatu w rzeczywistości nigdy nie spada do zera gdyż w przypadku osiągnięcia ustalonego dolnego ograniczenia (na wartość akcji lub liczebność populacji w rezerwacie) następuje interwencja z zewnątrz uniemożliwiająca przekroczenie ustalonego progu. Zatem, rzeczywistość często nakłada na dynamikę stochastyczną dolny ograniczający warunek brzegowy.

Przypuśćmy zatem, że równanie (3.138) opisuje teraz stochastyczną dynamikę ceny akcji, X_n , w chwili n na giełdzie [3]. Przepiszmy to równanie w postaci zloga-



Rysunek 3.11: Skumulowane prawdopodobieństwo dochodów przedsiębiorstw japońskich (linia ciągła) oraz włoskich (linia przerywana) przedstawione w skali log-log. Widać, że prawo Zipfa (cienkie linie przerywane) jest spełnione znacznie lepiej dla gospodarki japońskiej niż dla włoskiej.

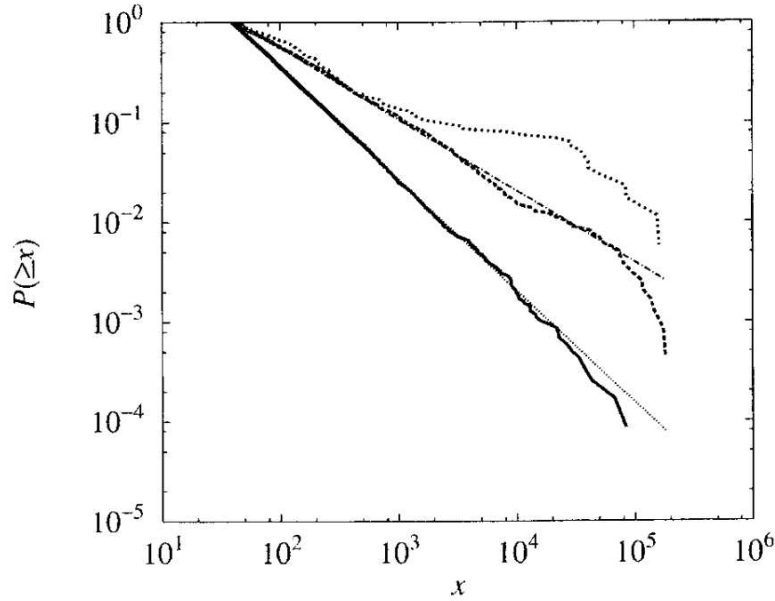
rytmowanej

$$Y_{n+1} = Y_n + l_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.153)$$

która wskazuje, że mamy tutaj do czynienia z błędzeniem przypadkowym typu ruchu Browna, w czasie dyskretnym n , gdzie aktualne położenie $Y_n = \ln X_n$ oraz aktualne przemieszczenie $l_n = \ln p_n$. W dalszym ciągu zakładamy (podobnie jak poprzednio), że zmienna p_n (a więc i l_n) jest losowana z rozkładu, który jest niezależny od n oraz, że $\langle \ln p \rangle < 0$ co nie oznacza, że zawsze $p_n < 1$ - czasami może się zdarzyć, że $p_n \geq 1$ co odróżnia tę sytuację od omawianej poprzednio¹⁹. Zauważmy, że ten ostatni warunek dopuszcza sytuacje gdy od czasu do czasu (w wyniku fluktuacji) $\ln p_n > 0$. Jednakże po chwili, następuje dryf w kierunku odpychającej bariery umieszczonej na lewo od Y_0 w odległym punkcie Y_b , tzn. $|Y_b| \gg |Y_0|$.

Należy podkreślić, że istnienie odpychającej bariery prowadzi do kumulowania się na niej tych wszystkich przemieszczeń, które w przypadku jej braku prowadziłyby do realizacji **nieograniczonego** procesu na lewo od bariery. W ten sposób w pobliżu bariery może powstać, dla asymptotycznie dużego n , znacząca odpychająca siła termodynamiczna (a dokładniej chemiczna, proporcjonalna do gradientu potencjału

¹⁹Oczywiście, w obu przypadkach przemieszczenia l_n są z definicji statystycznie niezależne.



Rysunek 3.12: Skumulowane prawdopodobieństwo dochodów przedsiębiorstw japońskich w ramach trzech charakterystycznych gałęzi gospodarki w skali log-log: 1) budownictwa (linia ciągła), 2) wyroby elektryczne i elektrotechniczne (w tym oczywiście 'high-tech' - linia przerywana), 3) energetyka (linia kropkowana). Jak widać, chroniona przez państwo energetyka wykazuje największe odstępstwa od prawa potęgowego (linia prosta przerywano-kropkowana); budownictwo, podlegające w największym stopniu działaniu wolnej konkurencji, najlepiej daje się opisać prawem potęgowym (o wykładniku $\alpha = 1.13$ - linia prosta kropkowana); branża elektryczna i elektrotechniczna także daje się opisać (z niezłym przybliżeniem) rozkładem potęgowym (o wykładniku $\alpha = 0.72$).

chemicznego a stąd do gradientu gęstości prawdopodobieństwa) prowadząca do dyfuzji w kierunku dodatnim (na prawo od bariery). Istnienie dwóch przeciwstawnych prądów: dryfu $j_V = V \mathcal{P}_s(Y_n)$ w kierunku bariery, gdzie $V = -|\langle \ln p \rangle|$ jest (bezwymiarową) prędkością unoszenia (dryfu) a $\mathcal{P}_s(Y_n)$ jest poszukiwanym stacjonarnym rozkładem prawdopodobieństwa, i dyfuzji $j_D = -D \frac{d\mathcal{P}_s(Y_n)}{dY_n}$ w kierunku odwrotnym wywołanej istnieniem tejże bariery, gdzie $D = [\langle (\ln p)^2 \rangle - \langle \ln p \rangle^2]/2$ jest (bezwymiarowym, jednowymiarowym) współczynnikiem dyfuzji, może prowadzić do powstania stanu stacjonarnego procesu, w przeciwieństwie do sytuacji omawianej poprzednio (także w niniejszym rozdz. 3.14); w następnym rozdz. 3.14.6 dokładniej uzasadniamy powyższe rozważania wychodząc od równania mistrza.

Z warunku znikania sumarycznego prądu w stanie równowagi

$$j = j_V + j_D = 0, \quad (3.154)$$

otrzymujemy

$$\frac{d\mathcal{P}_s(Y_n)}{dY_n} = -\frac{|V|}{D}\mathcal{P}_s(Y_n), \quad (3.155)$$

skąd natychmiast wynika (z dobrym przybliżeniem), że

$$\mathcal{P}_s(Y_n) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha(Y_n - Y_b)), & \text{dla } Y_b \leq Y_n \leq Y_0 \\ 0, & \text{dla } Y_n < Y_b, \end{cases} \quad (3.156)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie $\alpha = \frac{|V|}{D}$ oraz wykorzystaliśmy warunek normalizacji

$$1 \approx \int_{Y_b}^{\infty} \mathcal{P}_s(Y_n) dY_n. \quad (3.157)$$

Posługując się równaniem (3.156), powracamy w występującym tam rozkładzie do wyjściowej zmiennej X_n , czyli korzystamy z niezmienniczości rozkładów, otrzymując

$$P_s(X_n) = \mathcal{P}_s(Y_n(X_n)) \left| \frac{dY_n}{dX_n} \right| \Rightarrow P_s(X_n) = \frac{\alpha}{X_b} \frac{1}{(X_n/X_b)^{1+\alpha}}, \quad (3.158)$$

a więc uzyskaliśmy rozkład potęgowy Pareto, o którym mówiliśmy na wstępie. Zauważmy, że nawet dla $\alpha \ll 1$ stacjonarny rozkład potęgowy może się utworzyć, gdyż jest to rozkład o charakterze asymptotycznym.

Podkreślmy: **powstanie rozkładu potęgowego było możliwe dzięki wprowadzeniu dolnego ograniczenia na wartość zmiennej losowej X ; brak takiego ograniczenia doprowadza do powstania rozkładu log-normalnego** (patrz rozdz. 3.14).

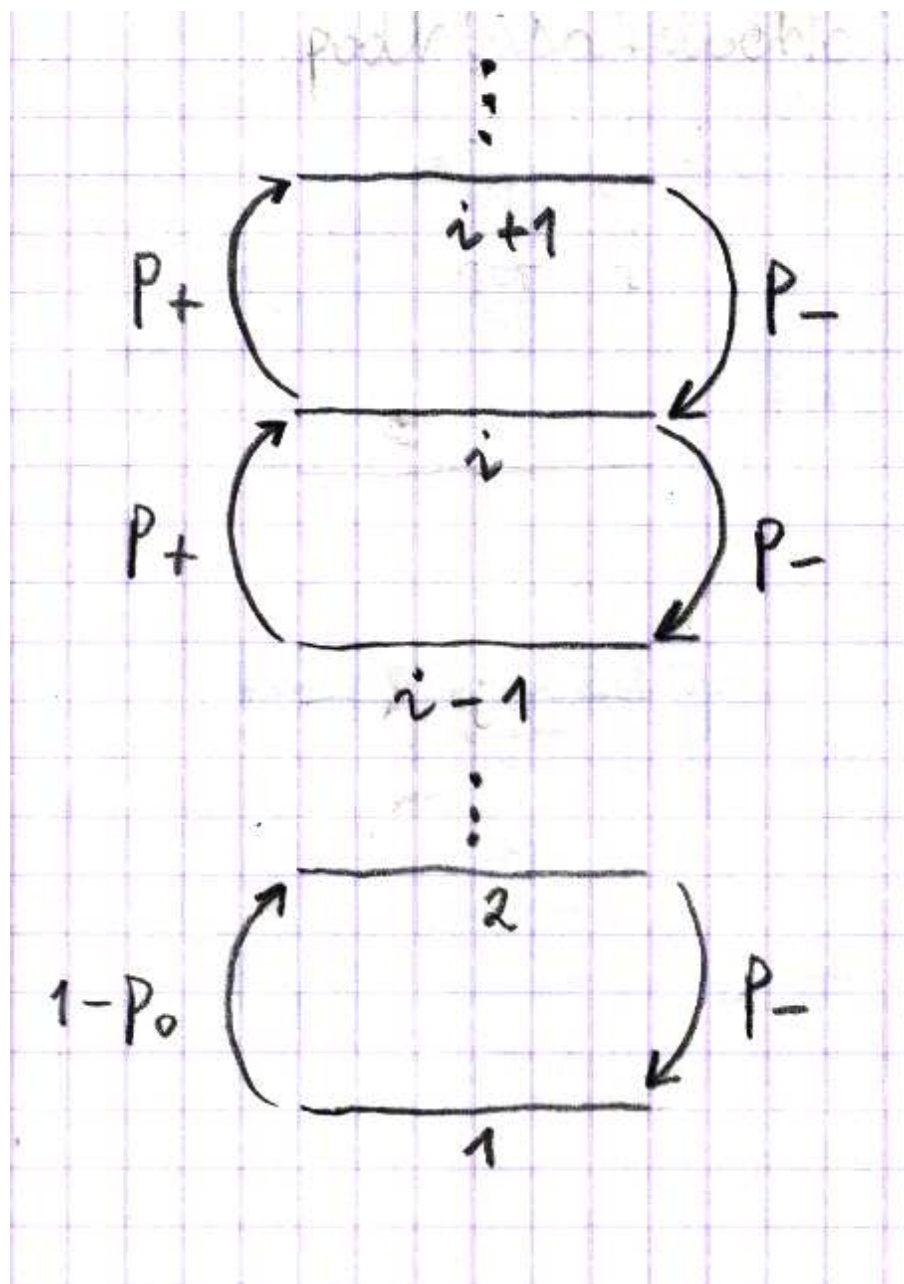
3.14.5 Model drabinowy dochodów gospodarstw domowych

Model drabinowy opisuje pojedynczą klasę dochodową określoną jednym (ustalonym) wykładnikiem Pareto α . Za pomocą tego modelu określimy warunki w jakich skumulowany rozkład prawdopodobieństwa dochodów gospodarstw domowych ma postać potęgową.

Na rysunku 3.13 przedstawiono drabinę społeczną podklas dochodowych na jakie dzielimy daną klasę dochodową. Podział na podklasy dokonujemy według następującej popularnej reguły wykładniczej:

$$q^{i-1} \leq \frac{y}{y_{min}} < q^i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad q > 1, \quad (3.159)$$

gdzie wykładnik i numeruje podklasy, q jest liczbą rzeczywistą, $y > 0$ oznacza dochód a $y_{min} > 0$ minimalną wartość tego dochodu. Jak widać, logarytm względnego dochodu, $\ln(y/y_{min})$, jest równomiernie rozłożony ze stałym dystansem pomiędzy podklasami krokiem $\ln q$.



Rysunek 3.13: Drabina podklas modelu drabinowego opisującego pojedynczą klasę dochodową określoną jednym (ustalonym) wykładnikiem Pareto α . Prawdopodobieństwa przejść do góry i w dół oznaczono, odpowiednio, przez p_+ oraz p_- . Dodatkowo, przez p_0 oznaczono prawdopodobieństwo przetrwania w pierwszej podklasie. Stąd, prawdopodobieństwo przejścia z tej podklasy do podklasy drugiej wynosi $1-p_0$.

W dalszym ciągu zakładamy, że układ znajduje się w stanie równowagi. W stanie takim spełnione są warunki równowagi szczegółowej w postaci charakterystycznej dla jednokrokowego modelu drabinowego:

$$\begin{aligned} N_i p_+ &= N_{i+1} p_-, \quad i \geq 2, \\ N_2 p_- &= N_1 (1 - p_0), \end{aligned} \quad (3.160)$$

gdzie N_j , $j = 1, 2, \dots$, oznacza liczbę gospodarstw domowych w podklasie dochodowej o numerze j .

Rozwiązanie jednorodnego równania rekurencyjnego stopnia pierwszego (3.160) jest następujące:

$$\begin{aligned} N_i &= \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{i-2}, \quad i \geq 2, \\ N_2 &= \frac{1 - p_0}{p_-} N_1. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Teraz, główny problem jakie staje przed nami to **wyznaczenie prawdopodobieństwa skumulowanego** $P(y \geq y_i)$. Rozkłada się ono na dwa kroki.

W pierwszym kroku wyznaczamy prawdopodobieństwo:

$$P_i = P(y_{\min} q^{i-1} \leq y < y_{\min} q^i) = P(y_i \leq y < y_{i+1}) = \frac{N_i}{N}, \quad (3.162)$$

znalezienia dochodu gospodarstwa domowego w podklasie o numerze i ; tutaj $N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i$ oznacza liczbę wszystkich gospodarstw domowych ponadto, $y_i = y_{\min} q^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$.

W drugim kroku sumujemy prawdopodobieństwa P_i otrzymując poszukiwaną zależność potęgową:

$$\begin{aligned} P(y \geq y_i) &= P(y_i \leq y < y_{i+1}) + P(y_{i+1} \leq y < y_{i+2}) + P(y_{i+2} \leq y < y_{i+3}) + \dots \\ &= \sum_{j=i}^{\infty} P_j = \frac{(q/q_0)^\alpha}{1 + \frac{q_0^{-\alpha}}{1-q^{-\alpha}}} q^\alpha \sum_{j=i}^{\infty} \left(\frac{1}{q^\alpha} \right)^j = \frac{(q/q_0)^{-\alpha}}{1 - q^{-\alpha} + q_0^{-\alpha}} (y_i/y_{\min})^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Powyższe wyrażenie jest szczególnie proste gdy $1 - p_0 = p_+$. Wówczas:

$$P(y \geq y_i) = (y_i/y_{\min})^{-\alpha}. \quad (3.164)$$

gdyż wtedy $q_0 = q$.

Podkreślmy, że model drabinowy nie dostarcza informacji o strukturze wykładnika α a jedynie precyzuje warunki w jakich uzyskuje się rozkład potęgowy.

3.14.6 Od równania Markowa do równania Fokkera-Plancka

Omawiany w poprzednim rozdz. 3.14.4 multiplikatywny proces stochastyczny (3.153) z warunkiem brzegowym w postaci blokującej bariery w Y_b daje się opisać za pomocą równania mistrza dla procesu Markowa

$$\mathcal{P}(Y, t+1) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(l) P(Y-l, t) dl, \quad (3.165)$$

gdzie $\pi(l)$ jest rozkładem z którego losowane jest pojedyncze przemieszczenie l . W dalszym ciągu przyjmujemy, że rozkład $\pi(l)$ jest wąski tzn. jego dyspersja $\sigma = \sqrt{\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2} \ll \langle l \rangle$. Rozwińmy w (3.165) gęstość prawdopodobieństwa $P(Y-l, t)$ tego, że w chwili t proces znajdzie się w położeniu $Y-l$ w szereg Taylora, ograniczając się tylko do trzech pierwszych wyrazów

$$\mathcal{P}(Y-l, t) \approx \mathcal{P}(Y, t) - l \frac{\partial \mathcal{P}(Y, t)}{\partial Y} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 \mathcal{P}(Y, t)}{\partial Y^2}. \quad (3.166)$$

Z (3.165) i (3.166) otrzymujemy po prostych przekształceniach, dla $t \gg 1$, równanie Fokkera-Plancka (tutaj o stałych współczynnikach)

$$\frac{\partial \mathcal{P}(Y, t)}{\partial t} = - \frac{\partial j(Y, t)}{\partial Y}, \quad (3.167)$$

które jest po prostu równaniem ciągłości wyrażającym zasadę zachowania prawdopodobieństwa; tutaj gęstość strumienia prawdopodobieństwa

$$j(Y, t) = j_V(Y, t) + j_D(Y, t), \quad (3.168)$$

gdzie gęstość prądu unoszenia (dryf) $j_V(Y, t)$ oraz gęstość prądu dyfuzyjnego $j_D(Y, t)$ dane są odpowiednio przez

$$\begin{aligned} j_V(Y, t) &\approx V \mathcal{P}(Y, t), \\ j_D(Y, t) &\approx -D \frac{\partial \mathcal{P}(Y, t)}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (3.169)$$

przy czym $V = \langle l \rangle$ oraz $2D = \sigma^2$. Oczywiście z równań (3.168) i (3.169) i warunku znikania gęstości prądu otrzymujemy natychmiast wynik (3.158) z poprzedniego rozdz. 3.14.6. Jest to alternatywna, wychodząca od procesu stochastycznego droga uzyskania rozkładu potęgowego (3.158).

3.14.7 Multiplikatywno-addytywny proces stochastyczny a proces multiplikatywny z odpychającą barierą

Jak widzieliśmy, każdemu procesowi (czysto) multiplikatywnemu o dodatnim szumie i dodatniej wartości początkowej procesu odpowiada proces addytywny i odwrotnie każdemu procesowi (czysto) addytywnemu odpowiada proces multiplikatywny.

Relacja pomiędzy takimi procesami jest zbudowana za pomocą funkcji logarytm mianowicie, logarytmując stronami proces multiplikatywny otrzymujemy odpowiadający mu proces addytywny. Obecnie zajmujemy się procesem multiplikatywno-addytywnym i wskażemy w jakich okolicznościach prowadzi on do rozkładu potęgowego.

Zatem, niech będzie dany stochastyczny proces multiplikatywno-addytywny

$$X_{n+1} = p_n \cdot X_n + b_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.170)$$

gdzie niezależne szumy multiplikatywny p_n i addytywny b_n są dodatnie i losowane odpowiednio z dwóch niezależnych rozkładów²⁰. Należy podkreślić, że w powyższym problemie nie zostały narzucone żadne dodatkowe warunki, np. brzegowe (w tym sensie jest to zagadnienie swobodne). Jak wiadomo (I. Koźniewska: "Równania rekurencyjne", PWN, Warszawa 1972), powyższe równanie posiada ściśle rozwiązanie w postaci

$$X_n = X_0 \exp(n \langle \ln p \rangle) + \sum_{j=1}^n b_j \prod_{l=j+1}^n p_l, \quad (3.171)$$

gdzie dla wygody dodefiniowaliśmy $\prod_{l=n}^{n-1} p_l = 1$. W dalszym ciągu dyskutujemy przypadek $\langle \ln p \rangle < 0$, który (jak wykazemy) jest analogiczny do dyskutowanego poprzednio dla procesu (czysto) multiplikatywnego przy czym rolę "siły odpychającej" pełni w powyższym rozwiązaniu dodatnia ("miękką") niejednorodność zbudowana z obu rodzajów szumu a nie, jak poprzednio, (sztywna) bariera odpychająca. Innymi słowy, rywalizacja obu szumów może prowadzić do powstania asymptotycznie stabilnego rozwiązania postaci

$$X_{n \rightarrow \infty} = \sum_{j=1}^{n \rightarrow \infty} b_j \prod_{l=j+1}^{n \rightarrow \infty} p_l, \quad (3.172)$$

które różni się od wartości przeciętnej procesu

$$\langle X \rangle = \frac{\langle b \rangle}{1 - \langle p \rangle}, \quad (3.173)$$

gdzie $\langle p \rangle < 1$.

3.14.8 Równanie Langevina a rozkład potęgowy

Równanie rekurencyjne (3.170) można łatwo sprowadzić do postaci równania Langevina dla asymptotycznie długiego czasu. W tym celu przepisujemy (3.170) w postaci

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = \frac{b_n}{X_n} + p_n - 1, \quad (3.174)$$

²⁰Warto wiedzieć, że proces (3.170) nosi także nazwę mapy afinicznej a zmienna X_n nosi w matematyce nazwę zmiennej Kestena.

skąd, po uśrednieniu obu stron równania względem szumu $b(t)$, otrzymujemy poszukiwane równanie

$$\begin{aligned}\frac{dY(t)}{dt} &= F(Y(t)) + V + \eta(t), \\ F(Y(t)) &\stackrel{\text{def.}}{=} \langle b \rangle \exp(-Y(t)),\end{aligned}\tag{3.175}$$

gdzie dla wygody²¹

- zastąpiliśmy dyskretny czas n przez ciągły (bezwymiarowy) t zastępując jednostkę czasu przez nieskończenie krótki przedział czasu dt ,
- użyliśmy nowej zmiennej $Y(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln X(t)$,
- wprowadziliśmy (bezwymiarową) prędkość $V = \langle p \rangle - 1 \approx \langle \ln p \rangle < 0$ oraz
- zdefiniowaliśmy tutaj δ -samoskorelowany biały szum $\eta(t) = p(t) - \langle p \rangle$ posiadający znikającą wartość przeciętną oraz (bezwymiarową) wariancję $2D = \sigma^2 = \langle \eta^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \approx \langle (\ln p)^2 \rangle - (\langle \ln p \rangle)^2$.

Jak widać, $F(Y(t))$ pełni rolę siły, która jest tym większa im $Y(t)$ jest mniejsze, przeciwstawiając się osiągnięciu przez proces ujemnych wartości $Y(t)$. Mamy tutaj do czynienia nie tylko z addytywnym szumem $\eta(t)$ (który może przybierać zarówno wartości dodatnie jak i ujemne) ale także z dodatnią stochastyczną siłą $F(Y(t))$ odgrywającą kluczową rolę w tym problemie.

Równanie Fokkera-Plancka odpowiadające równaniu Langevina (3.175) przybiera postać (patrz ogólne wyprowadzenie zamieszczone w podrozdz. 3.14.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{P}(Y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial j(Y, t)}{\partial Y}, \\ j(Y, t) &= [V + F(Y)]\mathcal{P}(Y, t) - D\frac{\partial \mathcal{P}(Y, t)}{\partial Y},\end{aligned}\tag{3.176}$$

która posiada interesujące nas rozwiązanie równowagowe dla $Y > 0$. Zauważmy przy okazji, że gdy $|V| > |\langle b \rangle| \exp(-Y(t))$ to dryf jest zwrócony na lewo (w kierunku ujemnego Y), natomiast prąd dyfuzyjny na prawo (od dużego do małego prawdopodobieństwa). Zatem możliwe jest zrównoważenie się tych dwóch prądów dając w konsekwencji rozwiązanie stacjonarne.

Rozwiązanie stacjonarne

Rozwiązanie stacjonarne uzyskujemy zakładając znikanie gęstości prądu (3.176), co prowadzi do równania

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{stac}(Y)}{dY} = \frac{V + F(Y)}{D},\tag{3.177}$$

²¹W równaniu (3.175) dla prostoty opuściliśmy dodatkowe indeksowanie wszystkich wielkości podkreślające, że dotyczą one sytuacji uśrednionego a nie chwilowego szumu $b(t)$, którego wartość średnia nie znika.

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy, po powrocie do zmiennej X , że $P_{stac}(X)$ dane jest odwrotnym rozkładem gamma,

$$P_{stac}(X) = \frac{const}{(X/X_0)^{1+|V|/D}} \exp\left(-\frac{\langle b \rangle}{D} \frac{1}{X}\right). \quad (3.178)$$

Jak widać, rozkład ten, dla $X \gg \langle b \rangle / D > 0$ przechodzi w rozkład potęgowy zmiennej X . Tym samym uzyskaliśmy pogłębione objaśnienie okoliczności w jakich multiplikatywno-addytywna dynamika stochastyczna generuje rozkład potęgowy. Przy okazji zauważmy, że wykładnik potęgi jest tutaj identyczny do tego dla procesu multiplikatywnego z barierą odpychającą. Co więcej, we wspomnianych powyżej warunkach rola szumu addytywnego jest zanikająca.

Zauważmy na zakończenie tego rozdziału, że przejścia graniczne prowadzące do rozwiązań (3.178) i (3.142) są zupełnie inne, chociaż (w sytuacji gdy $\langle b \rangle = 0$) dotyczą tego samego procesu multiplikatywnego. Zatem nic dziwnego, że są to inne rozkłady prawdopodobieństwa.

3.14.9 Od nieliniowego równania Langevina do równania Fokkera-Plancka

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy brakujące, nadzwyczaj ważne ogniwo łącząc dziedzinę procesów stochastycznych z dynamiką stochastyczną. Dokładniej mówiąc, wyprowadzamy równanie Fokkera-Plancka z nieliniowego (w ogólności) równania Langevina. Wyprowadzenie to składa się z kilku etapów [4].

W pierwszym etapie odcałkowujemy równanie dynamiki stochastycznej Langevina²²,

$$\frac{dX(t)}{dt} = -A(X(t), t) + C(X(t), t)\eta(t) \quad (3.179)$$

rzędzone przez biały szum η , do postaci równania dynamiki stochastycznej Winera

$$dX(t) = -A(X(t), t)dt + C(X(t), t)dW, \quad (3.180)$$

gdzie $dW = \eta(t)dt$ jest procesem Wienera, przy czym dW jest tzw. różniczką stochastyczną (patrz np. [6, ?]). Z definicji procesu Wienera, typowa wartość $(dW)^2$ jest rzędu dt . Innymi słowy, zmienna losowa dW jest odlosowywana z symetrycznego rozkładu Gaussa o wariancji proporcjonalnej do dt i stałej proporcjonalności rzędu 1.

W następnym kroku korzystamy z Lematu Itô, który sprowadza się do następującego rozwinięcia dowolnej, co najmniej dwukrotnie różniczkowalnej funkcji $h(X)$:

$$dh = -A(X(t), t)\frac{dh(X)}{dX}dt + B(X(t), t)\frac{d^2h(X)}{dX^2}dt + \frac{dh(X)}{dX}C(X(t), t)dW, \quad (3.181)$$

²²Wprowadzamy równanie Langevina w postaci ogólniejszej od tej jaka została podana w książce van Kampena [5], gdyż dopuszczamy tutaj jawną zależność współczynników równania od czasu.

gdzie $B(X(t), t) = C^2(X(t), t)/2$ i po drodze skorzystaliśmy z równania (3.180) oraz przyjęliśmy po prostu, że $(dW)^2 = dt$.

W kolejnym kroku średniujemy powyższe równanie uzyskując:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle h \rangle}{dt} &= A(X, t) \left\langle -\frac{dh(X)}{dX} \right\rangle + B(X, t) \left\langle -\frac{d^2h(X)}{dX^2} \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-A(X, t) \frac{dh(X)}{dX} + B(X, t) \frac{d^2h(X)}{dX^2} \right] P(X, t) dX, \end{aligned} \quad (3.182)$$

gdzie wyraz proporcjonalny do dW wyzerował się.

Całkując przez części prawą stronę powyższego równania i wykorzystując znikanie rozkładu prawdopodobieństwa $P(X, t)$ na brzegach $X \rightarrow \mp\infty$ i $t \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$\frac{d\langle h \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} h(X) \left\{ \frac{\partial}{\partial X} [A(X, t)P(X, t)] + \frac{\partial^2}{\partial X^2} [B(X, t)P(X, t)] \right\} dX. \quad (3.183)$$

gdzie dodatkowo skorzystaliśmy z unormowania $\int_{-\infty}^{\infty} P(X, t) dX = 1$.

Z drugiej strony, pochodna po czasie wartości średniej wynosi

$$\frac{d\langle h \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} h(X) P(X, t) dX = \int_{-\infty}^{\infty} h(X) \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) dX. \quad (3.184)$$

W ostatnim etapie, porównując lewe strony równań (3.183) i (3.184) oraz pamiętając, że są one sobie równe dla dowolnej funkcji $h(X)$, otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = \frac{\partial}{\partial X} [A(X, t)P(X, t)] + \frac{\partial^2}{\partial X^2} [B(X, t)P(X, t)], \quad (3.185)$$

czyli poszukiwane równanie Fokkera-Plancka. Równanie to będzie jeszcze kilkakrotnie wykorzystywane w dalszej części. Mam tu na myśli, na przykład, oryginalne zastosowanie stacjonarnego rozwiązania równania Fokkera-Plancka do analizy dochodów gospodarstw domowych, przedstawione w kolejnym rozdziale.

Aby uzyskać rozwiązanie stacjonarne $P(X, t) = P_{stac}(X)$ wystarczy zauważyć, że równanie (3.185) jest równaniem ciągłości na rozkład $P(X, t)$, gdzie gęstość prądu prawdopodobieństwa

$$j(X, t) = A(X, t)P(X, t) + \frac{\partial}{\partial X} [B(X, t)P(X, t)]. \quad (3.186)$$

Rozwiązanie stacjonarne uzyskuje się zakładając, że gęstość prądu unoszenia $j_{dryf}(X, t) \stackrel{\text{def.}}{=} A(X, t)P(X, t)$ jest równa gęstości prądu dyfuzyjnego $j_{dyf}(X, t) = -\frac{\partial}{\partial X} [B(X, t)P(X, t)]$. Stąd,

$$P_{stac}(X) = \frac{const}{B(X)} \exp \left[-\int_{X_0}^X \frac{A(X')}{B(X')} dX' \right], \quad (3.187)$$

gdzie muszą być spełnione warunki: $A(X, t) = A(X) > 0$ oraz $B(X, t) = B(X) > 0$; w przeciwnym razie rozwiązanie stacjonarne nie istnieje.

Bibliografia

- [1] R. Nowak: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- [2] E. W. Montroll, M. F. Shlesinger: *On the wonderful world of random walks in Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastics to Hydrodynamics, Studies in Statistical Mechanics XI*, Vol. Eds. E. W. Montroll, J. L. Lebowitz, North-Holland, Amsterdam 1984, pp. 1–121.
- [3] D. Sornette: *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Self-organization and Disorder: Concepts and Tools*, Springer series in synergetics, Springer–Verlag, New York 2000.
- [4] K. Jacobs: *Stochastic Processes for Physicists. Understanding Noisy Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2010.
- [5] N. G. van Kampen: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Third edition, Elsevier, Amsterdam 2007.
- [6] A. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
- [7] A. D. Wenzell: *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980.

Rozdział 4

Analiza portfelowa

4.1 Bańka kredytowa - przypowieść

Zanim przystąpimy do systematycznej analizy portfelowej przytoczymy przysłowio-
wą opowieść o fryzjerze, kliencie i banku, pokazującą z jaką nadzwyczajną łatwością
rynek może popaść w tarapaty finansowe z powodu naturalnej aktywności banku.

Wyobraźmy sobie banalną sytuację klienta płacącego, np. u fryzjera, za usługę
20 zł. Fryzjer ma dobrze rozkręcony interes przynoszący zyski, więc część tej kwoty,
np. 10 zł, lokuje w banku. Zatem, po obsłużeniu przez fryzjera dwóch klientów bank
dysponuje pełną kwotą umożliwiającą skredytowanie następnego klienta, którego
nie stać na fryzjera a który zwrócił się do banku o pożyczkę. Oczywiście, bank żeby
zarobić musi prowadzić akcję kredytową. Udziela zatem owego dwudziestozłotowe-
go kredytu. Fryzjer znowu zarabia 20 zł za usługę wykonaną na rzecz tego klienta.
Ponownie zanoszi zarobione pieniądze do banku, ten udziela kredytu kolejnemu klien-
towi fryzjera i tak w kółko. Rzecz jasna, przez jakiś czas system działa ale tylko do
chwili, gdy fryzjer będzie chciał odebrać swoją gotówkę (np. aby dokonać jakiejś
inwestycji). Zwróćmy uwagę, że to finansowe "perpetum mobile" oparte było tyl-
ko na jednej faktycznej kwocie 20 zł, jaką na samym początku fryzjer ulokował w
banku - wszystkie kolejne stanowiły tylko jej "wirtualne repliki". Zatem bank nie
dysponuje gotówką, żeby oddać fryzjerowi co jego, gdyż po pierwsze gotówka jest w
obrocie a po drugie jest jej niewystarczająca ilość (fryzjer sporo odłożył a zasada
"tyle kredytu ile depozytu" jest dla banku nie do utrzymania). Oczywiście, wieść o
niewypłacalności banku rozchodzi się "lotem błyskawicy" - kłopoty mają inne banki
a stąd cały sektor finansowy.

Ta pozornie naiwna przypowieść jasno wskazuje, że powstawanie baniek kredyto-
wych jest wmontowane w system finansowy - jest jego nieodłączną, fundamentalną
cechą. Oczywiście, każdy etap akcji kredytowej banku jest zabezpieczany - niestety,
nie da się tego zrobić w stu procentach, gdyż każda aktywność nastawiona na zysk
niesie ze sobą kumulujące się ryzyko. Właśnie **o neutralizowanie ryzyka i o wy-
nikających stąd różnych (zależnie od okoliczności) strategiach działania,**
jest mowa w niniejszym rozdziale.

Gwoli ścisłości powiedzmy, że w niniejszym rozdziale zajmujemy się głównie ryzykiem rynkowym, podczas gdy nasza przypowieść dotyczyła ryzyka systemowego. Jednakże, chodziło nam tutaj o wskazanie na nieodłączną obecność ryzyka systemowego, kładącego się cieniem na ryzyko rynkowe (zwiększając je). Zatem będziemy pamiętać, że zawężając naszą analizę tylko do ryzyka rynkowego faktycznie niedoszacowujemy całkowite ryzyko.

Analiza portfelowa¹ przeprowadzona w niniejszym rozdziale ma charakter referencyjny - stanowi punkt wyjścia ogromnej większości współczesnych modeli opisujących dynamikę portfela, zarówno w czasie dyskretnym jak też ciągłym. W istocie rzeczy, dotyczy tylko dynamiki trzech rodzajów walorów (instrumentów):

- 1) dwóch obarczonych ryzykiem tzn. bazowego (np. akcji) i pochodnego (np. opcji) oraz
- 2) jednego rodzaju pozbawionych ryzyka (tzn. obligacji oraz lokaty bankowej).

Operowanie tymi instrumentami umożliwiają różne, omawiane tutaj strategie.

4.2 Dwumianowy model dynamiki instrumentów finansowych

Model dwumianowy (ang. *binomial model*), dzięki swojej prostocie, umożliwia budowanie ewolucji (bazowych oraz pochodnych) instrumentów finansowych na drzewku dwumianowym (ang. *binomial tree*) krok po kroku (ang. *step-by-step*), w sposób sekwencyjny (rekurencyjny). Pozwala to dostrzec i sformalizować wiele zasadniczych zależności, które są następnie wykorzystywane w bardziej złożonych modelach, np. wielomianowych lub traktujących czas jako parametr ciągły a przedziały czasu jako zmienne losowe. W ramach dwumianowego rozważamy trzy rodzaje walorów a mianowicie,

- pozarynkowe (np. obligacje lub lokaty bankowe) o stałej stopie oprocentowania
- akcje (będące bazowym instrumentem finansowym) oraz
- pochodne instrumenty finansowe (np. opcje) wystawione na te akcje.

Dynamikę tych walorów omawiamy wykorzystując trzy najpopularniejsze strategie należące do grupy strategii replikujących (ang. *replicating strategies*) cenę pochodnego instrumentu finansowego:

- 1) strategię arbitrażową² (ang. *arbitrage strategy*)

¹W niniejszym rozdziale zajmujemy się tylko portfelem klienta a nie portfelem instytucji finansowej.

²Jak zobaczymy to dalej, strategia ta powinna się raczej nazywać bezarbitrażowa.

2) strategię zabezpieczającą (ang. *hedging*)

3) strategię samofinansującą (ang. *self-financing strategy*),

które stanowią punkt odniesienia strategii bardziej złożonych; dodajmy, że ostatnia strategia stanowi zastosowanie procesów martynałowych, które są oczywiście omawiane w niniejszym rozdziale.

Filarami, na których spoczywa analiza portfelowa omawiana w niniejszym rozdziale są dwie miary: arbitrażowa i martynałowa, będące (jak zobaczymy) miarami neutralnymi wobec ryzyka. Dzięki nim możliwe było **ukoronowanie modelu dwumianowego wyprowadzeniem w ramach niego** (na drodze przejścia granicznego do czasu ciągłego) **słynnej formuły wyceny opcji Blacka-Scholesa dla portfela pozbawionego ryzyka**.

4.2.1 Od awersji do ryzyka do miary neutralnej względem ryzyka - podejście intuicyjne

Wszelka ludzka aktywność jest nastawiona na szeroko rozumianą korzyść, czyli zysk np. materialny lub mentalny (intelektualny lub emocjonalny). Z drugiej strony, **każda aktywność jest obciążona ryzykiem prowadzącym do możliwości pojawienia się strat**. Ryzyko będziemy więc utożsamiali z możliwością ponoszenia strat; inaczej mówiąc, będziemy zakładać, że **nie ma korzyści bez ryzyka**. Jak widać, znajdujemy się w sytuacji "między młotem a kowadłem". Zatem w każdej chwili, mniej lub bardziej świadomie, staramy się optymalizować ryzyko, gdyż towarzyszy temu wszechobecne **zjawisko awersji do ryzyka**. Sam fakt zrozumienia tego co to jest ryzyko jest niewystarczający - aby móc racjonalnie podejmować decyzje i działać musimy **umieć mierzyć ryzyko**, czyli dysponować miarą ryzyka oraz **umieć nim zarządzać**. Trzeba podkreślić, że **brak jest powszechnie akceptowanej teorii ryzyka** - każde z istniejących podejść jest niewystarczające i może prowadzić do przeszacowania albo niedoszacowania rzeczywistego ryzyka.

Awersja do ryzyka

Rozważmy prosty przykład gry³, której uczestnik może wygrać $X_{down} = 50 \text{ j.u.}$ albo $X_{up} = 150 \text{ j.u.}$ z jednakowym prawdopodobieństwem równym $p = 1/2$. Zatem, średnio rzecz biorąc wygrana w tej grze wynosi $\langle X \rangle_P = 100 \text{ j.u.}$ Jednakże, mała jest szansa na to, że uczestnik gry zapłaci tytułem opłaty wstępnej tak wysoką kwotę akceptując z prawdopodobieństwem $1 - p = 1/2$ stratę równą $X_{down} - \langle X \rangle_P = -50$ albo z prawdopodobieństwem p zysk $X_{up} - \langle X \rangle_P = +50$. Chociaż taka gra byłaby

³Jest to uogólnienie rozważań zaczerpniętych z książki Grażyny Trzpiot, *Wybrane modele oceny ryzyka. Podejście nieklasyczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice 2008.

grą sprawiedliwą⁴ (ang. *fair game*), to jednak **znaczna większość z nas zdecydowałaby się**, paradoksalnie (gdyby taka możliwość istniała), **na brak zysku o ile tylko miałyby pewność, że nie towarzyszy temu żadna strata** - właśnie tego typu wybór jest bezpośrednim skutkiem awersji do ryzyka.

Możemy tutaj łatwo zmierzyć naszą awersję do ryzyka zadając sobie pytanie **jaką opłatę wstępną (prowizję, premię) bylibyśmy w stanie uiścić?** Zapewne byłaby to wielkość mniejsza od wartości średniej $\langle X \rangle_P$, np. wynosząca $+90 \text{ j.u.}$. Podnosi to jeden z głównych problemów finansów - **problem uwzględnienia premii za ryzyko**.

Powyższe rozważania sugerują a pokazane to jest ściśle poniżej, że **określenie awersji do ryzyka jest wykonalne o ile w problemie istnieje wartość przeciętna, czyli istnieje jakaś fizyczna skala** (proszę nie mylić jej z jednostką) charakteryzująca grę. Należy zaznaczyć, że istnieją także gry bezskalowe dla których ustalenie takiej skali nie jest możliwe; najbardziej popularną a zarazem najstarszą z nich jest tzw. *paradoks petersburski* Bernoulliego (patrz podrozdz. 2.2.2).

Miara neutralna wobec ryzyka

Uwzględnienie premii za ryzyko może się odbyć na drodze zamiany oryginalnej miary $\mathcal{P} = \{p\}$, która prowadzi do premii nieakceptowalnej, na neutralną wobec ryzyka $\mathcal{Q} = \{q\}$, a więc taką która prowadzi do premii akceptowalnej. W naszym konkretnym przypadku jest to (jak wykażemy) miara $q = 2/5$, w której wartość oczekiwana (przeciętna)

$$\langle X \rangle_Q = X_{up}q + X_{down}(1 - q) = +90 \text{ j.u.} \quad (4.1)$$

jest dokładnie równa opłacie wstępnej jaką zgadzamy się uiścić. To **właśnie ta zgoda definiuje pojęcie neutralności wobec ryzyka**. Oczywiście, powyższa miara także definiuje grę sprawiedliwą. Innymi słowy, rozwiązując równanie (4.1) względem poszukiwanej (dychotomicznej) miary q otrzymujemy,

$$\begin{aligned} q &= \frac{\langle X \rangle_Q - X_{down}}{X_{up} - X_{down}}, \\ 1 - q &= \frac{X_{up} - \langle X \rangle_Q}{X_{up} - X_{down}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Jak widać, musiało zostać tutaj przeszacowane prawdopodobieństwo straty, wynoszącej teraz

$$X_{down} - \langle X \rangle_Q = -40 \text{ j.u.} \quad (4.3)$$

⁴Przez grę sprawiedliwą rozumiemy taką grę, w której straty i zyski statystycznie rzecz biorąc równoważą się. Tutaj oznacza to, że $(X_{down} - \langle X \rangle_P)(1 - p) + (X_{up} - \langle X \rangle_P)p = 0$. W dalszym ciągu zajmujemy się tylko grami sprawiedliwymi.

z $1 - p = 1/2$ na większe $1 - q = 3/5$, kosztem prawdopodobieństwa zysku - zysk ten wynosi w tej nowej mierze

$$X_{up} - \langle X \rangle_Q = +60 \text{ j.u.} \quad (4.4)$$

z $p = 1/2$ na mniejsze $q = 2/5$. **Miara ryzyka jest tutaj związana bezpośrednio z awersją do ryzyka określoną wysokością opłaty wstępnej** (zwanej też wysokością premii lub prowizji za wejście do gry albo po prostu ceną). Im większa jest ta prowizja tym wielkość straty wzrasta a zysku maleje. Oczywiście, strata ta ma dobrze określone prawdopodobieństwo (dane drugim równaniem w (4.2)), które (na szczęście) maleje ze wzrostem tej prowizji. Zauważmy, że prawdopodobieństwo zysku zachowuje się odwrotnie - rośnie ze wzrostem prowizji. Inaczej, mielibyśmy do czynienia z finansowym "perpetum mobile". Tym samym, w naszym odczuciu, **potrafimy zneutralizować ryzyko**, co wynika z faktu, że godzimy się na określoną nieprzekraczalną wielkość starty (tutaj wynoszącą -40 j.u.) mniejszą, oczywiście, od straty maksymalnej $\Delta X_{max} = X_{down} - \langle X \rangle_P = -50 \text{ j.u.}$

Przedstawiona powyżej miara ryzyka

- a) wymaga określenia w sposób jawny i precyzyjny prawdopodobieństw zysków i strat oraz
- b) wymaga aby wartość przeciętna istniała; co więcej,
- c) takie podejście ma zastosowanie do rynku zupełnego, który nie nakłada na transakcje żadnych dodatkowych ograniczeń.

Jest interesującym, że struktura otrzymanych wzorów na prawdopodobieństwa q oraz $1 - q$ jest analogiczna do struktury wyrażenia na prawdopodobieństwa arbitrażowe, o którym jest mowa poniżej w podrozdz. 4.2.3 (patrz wyrażenia (4.20)).

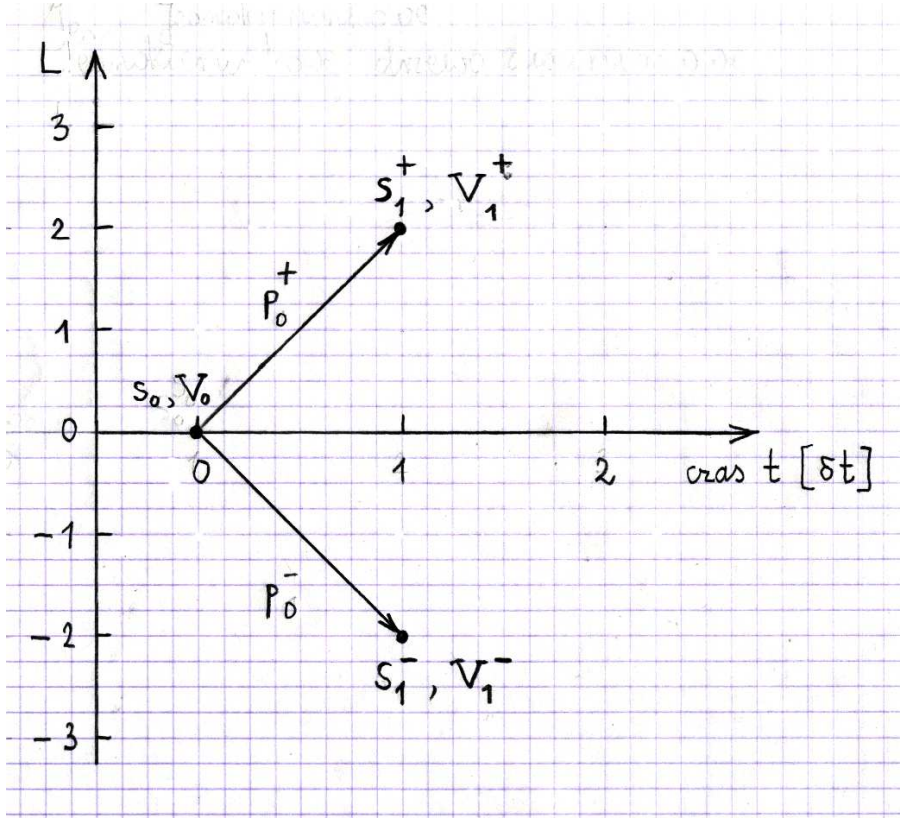
4.2.2 Podstawowe idee i definicje: pierwszy krok na drzewku dwumianowym - istota problemu

Celem zrozumienia podstawowej idei modelu dwumianowego skonstruujmy prosty portfel składający się w każdej chwili czasu t tylko z dwóch walorów

$$\pi_t = (\phi_t^A, \phi_t^O), \quad (4.5)$$

gdzie ϕ_t^A jest liczbą akcji a ϕ_t^O liczbą obligacji w portfelu (portfel π_t jest tutaj dwuwymiarową zmienną losową), przy czym obie te liczby mogą być ułamkowe, zarówno dodatnie jak też ujemne; liczba ujemna oznacza, że zakup nastąpił za pożyczone pieniądze (walor jest zadłużony a dług należy spłacić - zakup lewarowany). Naszym wyjściowym celem jest wyznaczenie struktury portfela czyli liczby akcji i obligacji przy założeniu ich nieograniczonej płynności.

Ograniczamy się na razie do dwóch kolejnych chwil $t = 0$ i $t = 1 \delta t$ (patrz rys. 4.1). Niech w chwili $t = 0$ cena akcji wynosi S_0 a w następnej $t = 1 [\delta t]$ z praw-



Rysunek 4.1: Pierwszy krok ewolucji w modelu dwumianowym. Cena bazowego instrumentu finansowego wykonuje błądzenie przypadkowe w czasie dyskretnym na jednowymiarowej sieci L równoodległych położeń. Pojedyncze przemieszczenie do góry z określonym prawdopodobieństwem rynkowym odpowiada wzrostowi ceny a na dół z dopełniającym, jej spadkowi.

dopodobieństwem ocenianym przez inwestora (a więc subiektywnym zwanym też rynkowym) p_0^+ wynosi S_1^+ o ile jest większa od S_0 a w przeciwnym razie z analogicznym prawdopodobieństwem $p_0^- (= 1 - p_0^+)$ wynosi S_1^- . Należy podkreślić, że S_1^+ , S_1^- są cenami domniemanymi przez inwestora (przyszłymi) a nie rzeczywistymi, gdyż w chwili $t = 0$ nie wiadomo jeszcze jak potoczą się losy rynku. Dalej przyjmijmy, że wartość obligacji w chwili $t = 0$ wynosi Λ_0 a ponadto, (pozagiełdową) stopę procentową na jednostkę czasu oznaczmy przez r . Stąd, domniamaną wartość portfela V w chwili $t=1$ może przyjąć jako jedną z dwóch

$$V_1(\pi_0) = \begin{cases} V_1^+, & \text{o ile cena akcji wzrośnie,} \\ V_1^-, & \text{o ile cena akcji spadnie,} \end{cases} \quad (4.6)$$

tutaj

$$V_1^\pm = \phi_0^A S_1^\pm + \phi_0^O \Lambda_0 (1 + r\delta t) \approx \phi_0^A S_1^\pm + \phi_0^O \Lambda_0 \exp(r\delta t) \quad (4.7)$$

gdzie założyliśmy (jak to zwykle ma miejsce w rzeczywistości), że $r\delta t \ll 1$ co umożliwia, z dobrym przybliżeniem, wykładniczą (a więc wygodną z matematycznego punktu widzenia) kapitalizację ciągłą.

Przypuśćmy, że **wybrany przez inwestora pochodny instrument finansowy F zależy od kursu akcji**, daje w chwili $t = 1$ jedną z dwóch wypłat (tak jak to ma miejsce dla opcji, czyli niech jego cena będzie tak określona jak dla opcji, o czym jest mowa poniżej)

$$F_1 = \begin{cases} F_1^+, & \text{dla kursu akcji } S_1^+, \\ F_1^-, & \text{dla kursu akcji } S_1^-. \end{cases} \quad (4.8)$$

Zakładając, że nasz **portfel π_t ma charakter replikujący**⁵ możemy bez trudu odpowiedzieć na pytanie o wielkości udziałów ϕ_0^A, ϕ_0^O w portfelu w chwili $t = 0$. W tym celu wystarczy rozwiązać układ dwóch równań liniowych na niewiadome ϕ_0^A, ϕ_0^O :

$$\begin{aligned} F_1^+ &= V_1^+ = \phi_0^A S_1^+ + \phi_0^O \Lambda_0 \exp(r\delta t), \\ F_1^- &= V_1^- = \phi_0^A S_1^- + \phi_0^O \Lambda_0 \exp(r\delta t); \end{aligned} \quad (4.9)$$

poszukiwane rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \phi_0^A &= \frac{F_1^+ - F_1^-}{S_1^+ - S_1^-}, \\ \phi_0^O &= \frac{1}{\Lambda_0} \exp(-r\delta t) \frac{S_1^+ F_1^- - S_1^- F_1^+}{S_1^+ - S_1^-}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Jak widać, liczba udziałów na akcje jest po prostu stosunkiem możliwej zmiany wartości pochodnego instrumentu finansowego przypadającej na jednostkową dopuszczalną zmianę wartości instrumentu bazowego. Paradoksalnie, wyrażenie na udziały na obligacje jest bardziej skomplikowane, gdyż cena możliwych wartości opcji jest odpowiednio "ważona" ceną akcji.

Korzystając teraz z obu wyrażeń (4.10) oraz z wartości portfela V_0 w chwili $t = 0$

$$V_0 = \phi_0^A S_0 + \phi_0^O \Lambda_0, \quad (4.11)$$

osiągamy nasz zasadniczy cel, czyli otrzymujemy (po prostych przekształceniach) odpowiedź na **kluczowe dla inwestora pytanie o wartość danego instrumentu finansowego w chwili $t = 0$** a więc w chwili, gdy stawia pytanie o opłacalność strategii. Mianowicie,

$$\begin{aligned} F_0 &= V_0 = \exp(-r\delta t) (q_0^+ F_1^+ + q_0^- F_1^-) \\ &= \exp(-r\delta t) E_0^Q(F_1) = \exp(-r\delta t) \langle F_1 \rangle_Q^0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

⁵Replikujący charakter portfela oznacza tutaj, że wartość portfela w danej chwili czasu jest równa cenie danego instrumentu finansowego F .

gdzie wagi $q_0^\pm$ zwane prawdopodobieństwami arbitrażowymi (ang. *arbitrage probabilities*) zdefiniowane są w następujący sposób

$$q_0^+ = \frac{S_0 \exp(r\delta t) - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}, \quad q_0^- = 1 - q_0^+, \quad (4.13)$$

natomiast $E_0^Q(F_1) \equiv \langle F_1 \rangle_Q^0$ jest wartością oczekiwaną w mierze $\mathcal{Q} \stackrel{\text{def.}}{=} \{q_0^\pm\}$ instrumentu F w chwili $t = 1$. Oczywiście, stwierdzenie to ma sens tylko wtedy, gdy $0 \leq q_0^\pm \leq 1$, czyli gdy dynamika cen akcji ma charakter opłacalny, tzn.

$$S_1^- \leq S_0 \exp(r\delta t) \quad (4.14)$$

i

$$S_1^+ \geq S_0 \exp(r\delta t). \quad (4.15)$$

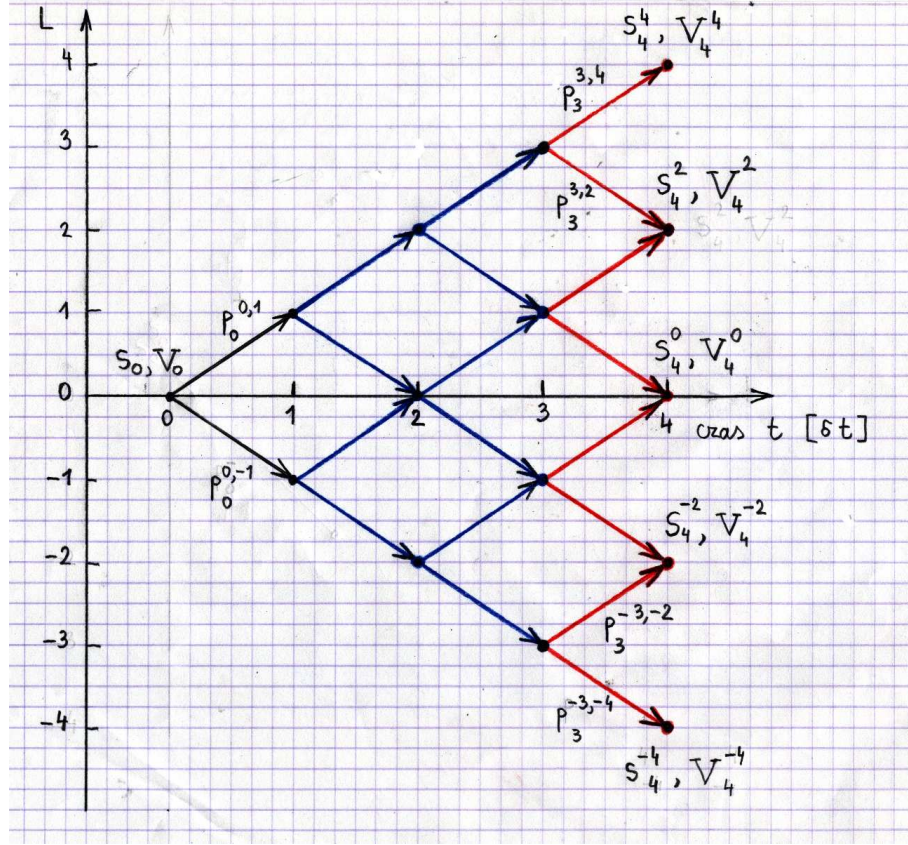
Zatem, wartość portfela w chwili początkowej jest równa jego wartości oczekiwanej w chwili aktualnej, zdyskontowanej na chwilę początkową. W dalszym ciągu bierzemy pod uwagę tylko opłacalność większą niż ta na jaką pozwala kapitalizacja pozarynkowa.

Tym samym przeszliśmy od procesu stochastycznego w mierze subiektywnej (rynkowej, podstawowej) $\mathcal{P} \stackrel{\text{def.}}{=} \{p_0^\pm\}$ do nowego, opisanego powyższą miarą $\mathcal{Q}$ zwaną arbitrażową (ang. *arbitrage measure*) - będzie jeszcze o tym mowa przy okazji wprowadzenia procesów martyngałowych w rozdz. 4.3.

Zauważmy, że w równaniach (4.10) użyliśmy udziałów w chwili $t = 0$ a nie (jak mogłoby się wydawać "na pierwszy rzut oka") w chwili $t = 1$ - wymaga to wyjaśnienia tym bardziej, że przenosi się to na miarę arbitrażową. Tego typu podejście bazuje na pragmatycznej procedurze, która umożliwia aktualizację udziałów dopiero po wyznaczeniu domniemanego portfela replikującego we właściwej chwili a co za tym idzie i domniemanej wartości instrumentu finansowego. Występujące tutaj opóźnienie nazwiemy bezwładnością udziałów - wrócimy do niego w podrozdz. 4.2.3.

4.2.3 Uogólnienie: dowolny krok na drzewku dwumianowym

Rozszerzymy teraz wzory (4.10), (4.12) i (4.13) na dowolną chwilę t , rozwijając dalej w czasie jednokierunkowe drzewko dwumianowe i traktując zmienną S_t jako proces stochastyczny na tym drzewku. Pierwszy element drzewka przedstawiono na rys. 4.1; na rys. 4.2 przedstawiono rozwinięcie drzewka dwumianowego aż do chwili $t = 4\delta t$. Na rysunku tym oznaczono tylko niektóre (początkowe i wybrane końcowe) elementy drzewka; zauważmy, że wprowadzono tam ogólniejszą notację niż ta, którą użyto na rys. 4.1. Korzystając z tej notacji można wspomniane powyżej wzory uzyskać dla dowolnej chwili (a nie tylko dla $t = 0$), gdyż każdy węzeł tego drzewa jest połączony



Rysunek 4.2: Jednokierunkowe drzewko dwumianowe powstałe w wyniku hipotetycznego błędzenia przypadkowego domniemanej ceny bazowego instrumentu finansowego S w czasie dyskretnym na jednowymiarowej sieci L równoodległych położeń. Pojedyncze przemieszczenie do góry z prawdopodobieństwem $p_t^{l,l+1}$ odpowiada wzrostowi ceny a w dół, z prawdopodobieństwem $p_t^{l,l-1} = 1 - p_t^{l,l+1}$, jej spadkowi; w ogólności prawdopodobieństwa te mogą być niestacjonarne.

bezpośrednio tylko z dwoma sąsiednimi (analogicznie jak węzeł początkowy). Zatem, wyjściowe równania (4.9) można przepisać następująco:

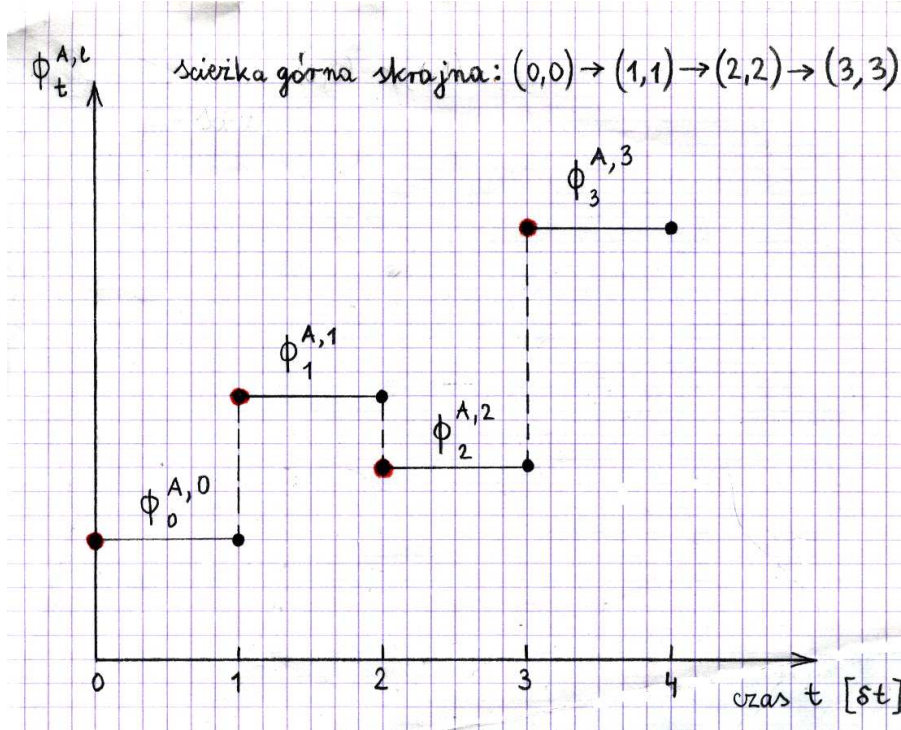
$$\begin{aligned} F_{t+\delta t}^{l+1} &= V_{t+\delta t}^{l+1} = \phi_t^{A,l} S_{t+\delta t}^{l+1} + \phi_t^{O,l} \Lambda_t \exp(r\delta t), \\ F_{t+\delta t}^{l-1} &= V_{t+\delta t}^{l-1} = \phi_t^{A,l} S_{t+\delta t}^{l-1} + \phi_t^{O,l} \Lambda_t \exp(r\delta t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Należy przy tym pamiętać, że **poszukujemy wartości portfela a stąd ceny instrumentu pochodnego we wcześniejszej chwili t**

$$F_t^l = V_t^l = \phi_t^{A,l} S_t^l + \phi_t^{O,l} \Lambda_t. \quad (4.17)$$

Delikatny aspekt modelu tkwi (analogicznie jak poprzednio) w bezwładności udziałów czyli w tym, że zarówno równania (4.16) jak i równanie (4.17) posługują

się tymi samymi wartościami udziałów $\phi_t^{A,l}$ i $\phi_t^{O,l}$ zatem, zmianie może ulegać wartość tych udziałów ale nie ich liczba. Innymi słowy, pomiędzy chwilą początkową i końcową dysponujemy podwójnymi wartościami udziałów tak jak to pokazano na rys. 4.3) zatem, zawsze należy pamiętać o ich kolejnej aktualizacji.



Rysunek 4.3: Przykładowa górna skrajna ścieżka na drzewie dwumianowym, dla której policzono domniemane udziały dwumianowego portfela. Zaczernione punkty oznaczają zaktualizowane wartości udziałów w kolejnych chwilach.

Rozwiązując równania (4.16) (na niewiadome $\phi_t^{A,l}$, $\phi_t^{O,l}$) otrzymujemy, analogicznie jak poprzednio, że

$$\begin{aligned}\phi_t^{A,l} &= \frac{F_{t+\delta t}^{l+1} - F_{t+\delta t}^{l-1}}{S_{t+\delta t}^{l+1} - S_{t+\delta t}^{l-1}}, \\ \phi_t^{O,l} &= \frac{1}{\Lambda_t} \exp(-r\delta t) \frac{S_{t+\delta t}^{l+1} F_{t+\delta t}^{l-1} - S_{t+\delta t}^{l-1} F_{t+\delta t}^{l+1}}{S_{t+\delta t}^{l+1} - S_{t+\delta t}^{l-1}}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

a dzięki temu

$$\begin{aligned}
F_t^l &= V_t^l = \exp(-r\delta t) \left(q_{t,t+\delta t}^{l,l+1} F_{t+\delta t}^{l+1} + q_{t,t+\delta t}^{l,l-1} F_{t+\delta t}^{l-1} \right) \\
&= \exp(-r\delta t) E_l^Q(F_{t+\delta t}) = E_l^Q(\exp(-r\delta t) F_{t+\delta t}) \\
&= \exp(-r\delta t) \langle F_{t+\delta t} \rangle_Q^l = \langle \exp(-r\delta t) F_{t+\delta t} \rangle_Q^l, \\
l &= 0, \pm 1, \dots, \pm L; \quad t = 1, 2, \dots, T-1,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

gdzie niestacjonarne na ogół prawdopodobieństwa arbitrażowe (wagi) $q_{t,t+\delta t}^{l,l\pm 1}$ są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
q_{t,t+\delta t}^{l,l+1} &= \frac{S_t^l \exp(r\delta t) - S_{t+\delta t}^{l-1}}{S_{t+\delta t}^{l+1} - S_{t+\delta t}^{l-1}}, \\
q_{t,t+\delta t}^{l,l-1} &= 1 - q_{t,t+\delta t}^{l,l+1} = \frac{S_{t+\delta t}^{l+1} - S_t^l \exp(r\delta t)}{S_{t+\delta t}^{l+1} - S_{t+\delta t}^{l-1}},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

natomiast, $E_l^Q \equiv \langle \dots \rangle_Q^l$ jest lokalnym operatorem średniowania zdefiniowanym w pierwszym wierszu wyrażenia (4.19). Oczywiście, oba równania w (4.20) są sobie równoważne dzięki lokalnym warunkom normalizacyjnym spełnianym przez prawdopodobieństwa warunkowe $Q = \{q\}$.

Podobnie jak poprzednio (dla chwili $t = 0$) procedura ma sens, gdy spełniony jest warunek $0 \leq q_{t,t+\delta t}^{l,l\pm 1} \leq 1$, czyli gdy dynamika akcji nie przynosi strat

$$\begin{aligned}
S_t^l \exp(r\delta t) &\geq S_{t+\delta t}^{l-1}, \\
S_t^l \exp(r\delta t) &\leq S_{t+\delta t}^{l+1}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Jak wynika z pierwszego równania w trzecim wierszu w (4.19)

$$\exp(r\delta t) F_t^l = \exp(r\delta t) V_t^l = \langle F_{t+\delta t} \rangle_Q^l, \tag{4.22}$$

czyli **spodziewana (oczekiwana) wartość pochodnego instrumentu finansowego replikującego portfel jest w mierze arbitrażowej taka sama jak na lokacie bankowej kwoty F_t^l o oprocentowaniu r . O rynku spełniającym powyższą własność dla dowolnego instrumentu finansowego mówimy, że jest pozbawiony arbitrażu. Miare, w ramach której ma to miejsce nazywa się obojętną (neutralną) wobec ryzyka (patrz podrozdz. 4.2.1).**

Zauważmy, że brak arbitrażu jest definiowany jedynie za pomocą wartości oczekiwanej, co nic nie mówi o wariancji instrumentu. Innymi słowy, nie wyklucza dodatkowego (ponad lokatę) zysku typu fluktuacyjnego i towarzyszącego mu ryzyka fluktuacyjnego poniesienia straty (o czym jest mowa w podrozdz. 4.2.4).

Warto zdać sobie sprawę, że ze wzorów (4.20) wynika także

$$S_t^l = \exp(-r\delta t) \langle S_{t+\delta t} \rangle_Q^l, \tag{4.23}$$

czyli, że rolę derywaty może pełnić również sam instrument bazowy.

Zapisując powyższe równanie w postaci

$$\exp(r\delta t)S_t^l = \langle S_{t+\delta t} \rangle_Q^l, \quad (4.24)$$

widzimy jasno, że spodziewany zysk z instrumentu bazowego w każdym kroku drzewa dwumianowego jest w mierze arbitrażowej dokładnie równy zyskowi z lokaty bankowej (o oprocentowaniu r) kwoty równej S_t^l .

W oparciu o równości (4.22) i (4.24), można powiedzieć, że w żadnym kroku czasowym miara arbitrażowa nie wprowadza na rynek (czyli na drzewo dwumianowe) arbitrażu⁶. Innymi słowy, operujemy tutaj tylko cenami uczciwymi (uczciwą wyceną instrumentów finansowych). Jak widać, przeszliśmy w naszym podejściu drogę od miary arbitrażowej i replikowalności do braku arbitrażu.

Jak już wspominaliśmy, udziały $\phi_t^{A,l}$ i $\phi_t^{O,l}$ wyznacza się biorąc pod uwagę dwie kolejne chwile t oraz $t + \delta t$. Tym samym, **dla każdych dwóch chwil $0 \leq t - \delta t, t + \delta t \leq T$ otrzymujemy w chwili t podwójne rozwiązanie: jedno pochodzące od chwil $t - \delta t$ a drugie od $t + \delta t$** . Tego typu sytuacja - bezwładność udziałów, ma miejsce tylko dla udziałów (a nie dla prawdopodobieństw arbitrażowych i cen pochodnego instrumentu finansowego) - do zagadnienia tego wrócimy przy omawianiu strategii zabezpieczającej portfel.

Dzięki wzorom (4.19) i (4.20) można wyznaczyć jednoznacznie domniemaną cenę pochodnego instrumentu finansowego w każdej wcześniejszej chwili czasu a w tym w chwili jego zakupu, dysponując następującymi informacjami:

- 1) realną S_0^0 oraz domniemanymi wartościami bazowego waloru w każdym węźle dwumianowego drzewa, S_t^l , $t = 1, 2, \dots, T[\delta t]$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$,
- 2) ceną realizacji instrumentu pochodnego, czyli jedynie w chwili jego realizacji $t = T$ (tutaj $T = 4\delta t$).

Innymi słowy, wzór (4.19) wraz z (4.20) określają sekwencję (rekurencję) działającą wstecz, umożliwiającą udzielenie odpowiedzi na pytanie o dynamikę domniemanej ceny pochodnego instrumentu finansowego na drzewie dwumianowym a w tym zwłaszcza **na kluczowe pytanie o wycenę tego instrumentu w chwili jego zakupu** (czyli w chwili zawierania kontraktu) oraz o warunki pod jakimi taką wycenę można dokonać, czyli warunki w jakich zakup instrumentu będzie opłacalny. Charakterystyczną cechą wszystkich omawianych wzorów jest ich niezależność od subiektywnej (rynkowej) miary podstawowej $\mathcal{P}$.

Co więcej, można wykazać (np. poprzez konstrukcję - patrz poniższy przykład), że ze wzoru (4.19) wynika następująca, **kluczowa formuła wyceny pochodnego instrumentu finansowego w mierze arbitrażowej Q**

$$F_0 = \exp(-rT)E^Q(F_T) = E^Q(\exp(-rT)F_T), \quad (4.25)$$

⁶Inaczej mówiąc, wzory (4.22) i (4.24) definiują sytuację braku arbitrażu na drzewie dwumianowym.

stanowiąca inspirację dla wprowadzenia procesów stochastycznych zwanych martyn-
gałami (będzie o tym mowa w dalszej części); dla uproszczenia oznaczeń przyjęliśmy,
że $F_0^0 = F_0$ i $E_0^Q = E^Q$ oraz $\langle \dots \rangle_Q^l = \langle \dots \rangle_Q$ (jak zwykle T jest terminem utraty
ważności kontraktu na rozważany instrument).

Formułę (4.25) należy rozumieć jako globalną średnią ważoną daną w postaci
sumy po wszystkich iloczynach prawdopodobieństw arbitrażowych q liczonych na
pojedynczych trajektoriach łączących punkt $(0, 0)$ drzewa dwumianowego z każdym
z punktów końcowych (T, l) , $l = -L, -(L-2), \dots, L-2, L$; $L = 1, 2, \dots$, z osobna,
pomnożonych przez wartości wypłaty z pochodnego instrumentu finansowego, $F_{t=T}^l$,
w tych (końcowych) punktach. Formuła (4.25) stanowi podstawę wyceny opcji (patrz
rozdz. 4.5.1) oraz punkt wyjścia do określenia ceny opcji dla pośrednich chwil czasu
 $0 < t < T$, czyli wyprowadzenia słynnej formuły Blacka-Scholesa.

Aby wykazać prawdziwość formuły (4.25) oraz pokazać jej funkcjonowanie a
zarazem przygotować się na wprowadzenie pojęcia wspomnianego procesu martyn-
gałowego, przeanalizujemy następujący przykład.

Przykład ilustrujący i uogólniający formułę (4.25)

Na rys. 4.4 przedstawiono przykładowe drzewo dwumianowe domniemanych (zada-
nych) wartości waloru bazowego S wraz z arbitrażowymi prawdopodobieństwami
(przejść) $\{q\}$ obliczonymi ze wzoru (4.20) przy założeniu (dla prostoty) zerowej po-
zagięldowej stopy zwrotu ($r = 0$).

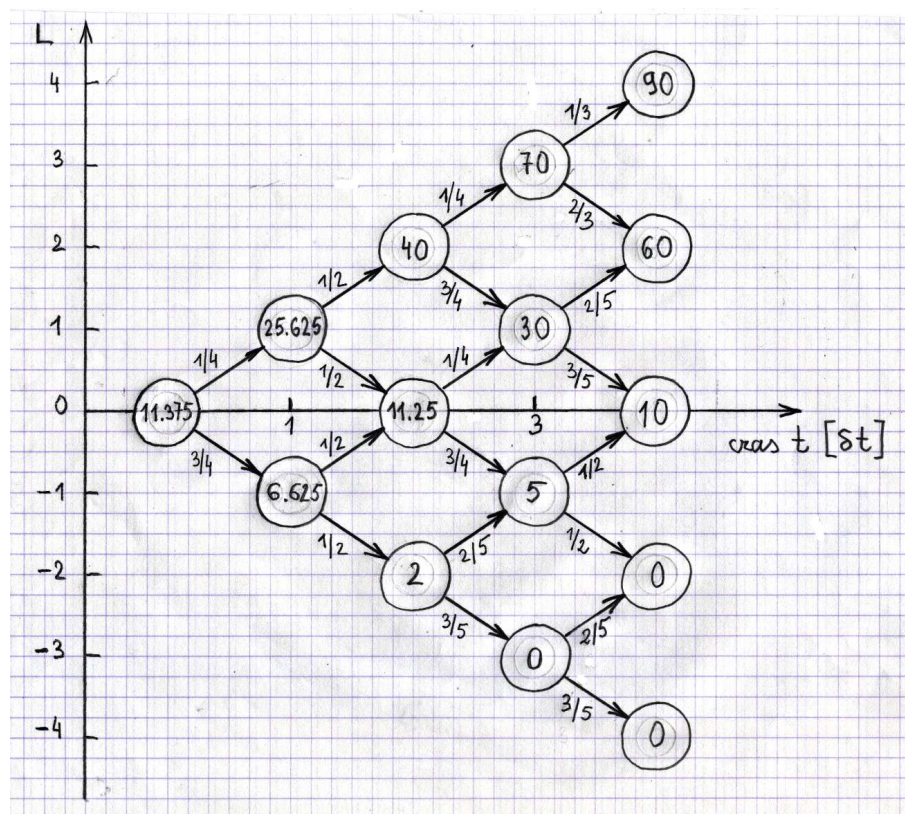
Sprecyzujmy teraz **sposób wyceny pochodnego instrumentu finansowego**
 F . Mianowicie, **niech tym instrumentem będzie europejska opcja kupna** (nie
wypłacająca dywidendy) z ceną wykonania $K = 110$ i terminem realizacji $T = 4 [\delta t]$.
Jak wiadomo, funkcja wypłaty tej opcji (płatność) wynosi

$$F_{t=T} = (S_{t=T} - K)^+ = \begin{cases} S_{t=T} - K & \text{jeżeli } S_{t=T} > K \\ 0 & \text{jeżeli } S_{t=T} \leq K. \end{cases} \quad (4.26)$$

Korzystając z tak określonej ceny możemy wyznaczyć płatność opcji w chwili jej
realizacji (tutaj $T = 4 \delta t$) dla każdego węzła dwumianowego drzewa

$$F_{T=4\delta t} = \begin{cases} F_{T=4\delta t}^{l=4} = 90 & \text{gdyż } S_{T=4\delta t} > K, \\ F_{T=4\delta t}^{l=2} = 60 & \text{gdyż } S_{T=4\delta t} > K, \\ F_{T=4\delta t}^{l=0} = 10 & \text{gdyż } S_{T=4\delta t} > K, \\ F_{T=4\delta t}^{l=-2} = 0 & \text{gdyż } S_{T=4\delta t} < K, \\ F_{T=4\delta t}^{l=-4} = 0 & \text{gdyż } S_{T=4\delta t} < K. \end{cases} \quad (4.27)$$

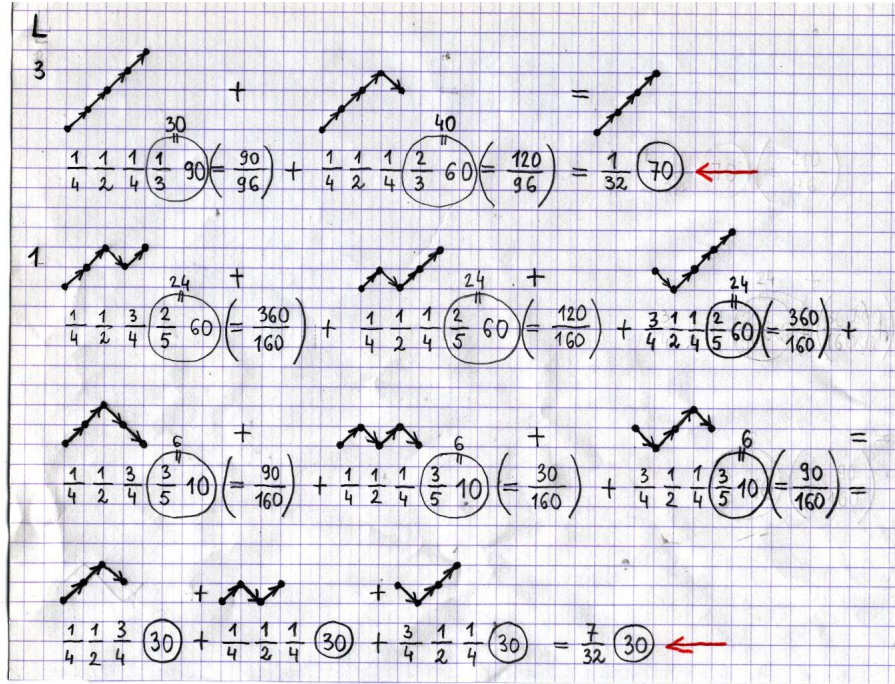
Teraz, w oparciu o wzory (4.19) i (4.20) dokonujemy uzupełnienia, obliczając ce-
nę opcji w każdym węźle dwumianowego drzewa (czyli dla każdej chwili $t < T$).
Na rys. 4.5 przedstawiono wyniki tych obliczeń w postaci dwumianowego drzewa
evolucji ceny opcji. Przy okazji podano wartości prawdopodobieństw przejść $\{q\}$
(wyznaczone ze wzorów (4.20)).



Rysunek 4.5: Jednokierunkowe drzewo dwumianowe powstałe w wyniku hipotetycznego błędzenia przypadkowego ceny pochodnego instrumentu finansowego F w czasie dyskretnym na jednowymiarowej sieci L równoodległych (dyskretnych) położeń. Kółkami zaznaczono ceny instrumentu pochodnego, strzałkami obliczone arbitrażowe prawdopodobieństwa przejść q .

wszystkich trajektoriach danej grupy (oczywiście wychodzących ze wspólnego węzła początkowego, patrz oprócz rysunków 4.4 lub 4.5, także rysunki 4.6 i 4.7 na których zestawiono trajektorie zgodnie ze wspomnianym podziałem na grupy) pomnożonych przez odpowiadające im ceny końcowe instrumentu pochodnego (zaznaczone czerwonymi strzałkami). W ten sposób cofamy się o jeden krok czasowy, uzyskując wzór (4.28) (a następnie wzór (4.29), jak trzeba, ze wzoru (4.25)). Ponadto, sumując wszystkie wartości oczekiwane uzyskane w ramach wszystkich grup wyceniamy opcję (czyli uzyskujemy jej wartość na chwilę początkową) zgodnie ze wzorem (4.25). Jak widać, wartość poszukiwanej ceny opcji, $F_0 = 11.375$, w chwili jej nabycia (zakontraktowania, patrz rys. 4.5) pokrywa się, jak być powinno, z tą uzyskaną za pomocą jednokrokowego wzoru (4.19) na drodze sukcesywnego cofania się w czasie.

Zatem wskazaliśmy (patrz czerwone strzałki na obu rysunkach 4.6 i 4.7, pokazujące końcowe wyniki skrócenia trajektorii do chwili $T - \delta t$), że mają miejsce



Rysunek 4.6: Konstrukcja wartości oczekiwanych ceny pochodnego instrumentu finansowego (opcji) F w chwili $t = T - \delta t = 3\delta t$ (zamieszczonych w kółkach po prawej stronie i wskazanych czerwonymi strzałkami) oraz ich wag (liczby stojące tuż przed nimi) na drzewie dwumianowym (przedstawionym na poprzednim rysunku) w oparciu o znajomość arbitrażowych prawdopodobieństw przejść q na wszystkich trajektoriach prowadzących z węzła początkowego $(0,0)$ do każdego węzła $(t = T = 4\delta t, l)$, $l = -4, -2, 0, 2, 4$. Dodatkowo, czarnymi strzałkami zaznaczono odpowiednio pogrupowane trajektorie (diagramy) prowadzące do tych węzłów.

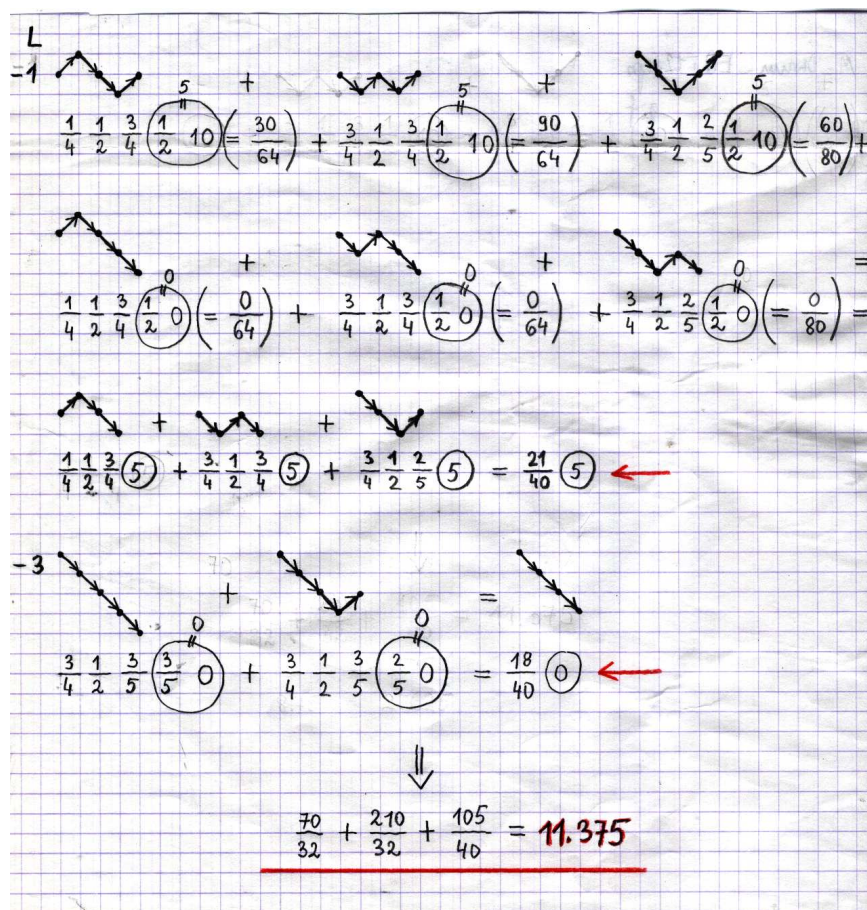
następujące ważne relacje, przydatne w naszych dalszych rozważaniach

$$F_0 = \exp(-r(T - \delta t)) E^Q(F_{t=T-\delta t}) = E^Q(\exp(-r(T - \delta t)) F_{t=T-\delta t}) \quad (4.28)$$

a także ogólniejsza (dla $0 \leq m \leq \frac{T}{\delta t}$)

$$F_0 = \exp(-r(T - m\delta t)) E^Q(F_{t=T-m\delta t}) = E^Q(\exp(-r(T - m\delta t)) F_{t=T-m\delta t}). \quad (4.29)$$

Zanim przejdziemy do analizy kolejnych strategii musimy odpowiedzieć na pytanie o **fluktuacyjne ryzyko inwestycyjne jakie niesie ze sobą strategia arbitrażowa**.



Rysunek 4.7: Ciąg dalszy konstrukcji wartości oczekiwanych ceny pochodnego instrumentu finansowego (opcji) F przedstawionej na poprzednim rysunku. Jak widać, uzyskana średnia ważona odtwarza jak trzeba cenę pochodnego instrumentu finansowego w chwili zawarcia kontraktu.

4.2.4 Ryzyko fluktuacyjne strategii arbitrażowej

Na rysunku 4.5 przedstawiono drzewko dwumianowe ceny przykładowej, europejskiej opcji kupna zdefiniowanej poprzez wyrażenie (4.26). W niniejszym podrozdziale drzewko to zostanie uzupełnione o względne dyspersje warunkowe ceny opcji w pośrednich chwilach (czyli dla $0 \leq t < T$). Oczywiście, dla każdej takiej chwili dysponujemy wartością oczekiwaną ceny pochodnego instrumentu finansowego F daną np. w pierwszym wierszu wzoru (4.19). Ponadto, dysponujemy arbitrażowymi prawdopodobieństwami przejść $\{q\}$. Zatem, możemy względną dyspersję warunkową ceny

F wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_F(l, t)}{F_t^l} &= \sqrt{\frac{E_t^Q((F_{t+\delta t})^2) - (E_t^Q(F_{t+\delta t}))^2}{(E_t^Q(F_{t+\delta t}))^2}} \\ &= \sqrt{q_{t, t+\delta t}^{l, l+1} q_{t, t+\delta t}^{l, l-1}} \frac{|F_{t+\delta t}^{l+1} - F_{t+\delta t}^{l-1}|}{F_t^l},\end{aligned}\quad (4.30)$$

czyli jako iloczyn względnego rozrzutu ceny derywaty w następnej chwili tłumionej średnią geometryczną (jedokrokowych) prawdopodobieństw przejść. Brak czynnika dyskontującego wynika z faktu, że wzór ten wyraża się poprzez odpowiednie wielkości względne. Ten elegancki wzór stanowi poszukiwane dopełnienie formuły (4.19) a zarazem jest rozwiązaniem problemu postawionego na zakończenie poprzedniego podrozdziału.

Na rysunku 4.8 przedstawiono drzewko dwumianowe zaczerpnięte z rysunku 4.5, uzupełnione o względne dyspersje warunkowe dla każdej chwili poprzedzającej końcową i dla każdego węzła drzewka (za wyjątkiem ostatniej kolumny węzłów). Dopiero drzewko przedstawione na rysunku 4.8 jest kompletne, umożliwiając podjęcie optymalnej decyzji przez inwestora.

Rozważmy więc ponownie kompletne drzewko dwumianowe przedstawione na rysunku 4.8. Widzimy, że ryzyko jakim jest obarczona wyjściowa (średnia) cena pochodnego instrumentu finansowego (wynosząca $F_{t=0}^{l=0} = 11.375$ [j.u.]) to 72.3%. Zatem, faktyczna cena zawarta jest w przedziale⁷ $11.375(1 - 0.723) \leq F_{t=0}^{l=0} \leq 11.375(1 + 0.723) \Leftrightarrow 3.151 \leq F_{t=0}^{l=0} \leq 19.599$. Jest to szeroki przedział - jego znajomość jest konieczna do prowadzenia przez inwestora racjonalnych negocjacji z biurem maklerskim co do wysokości prowizji. Analogiczne przedziały można zbudować dla pozostałych cen tej derywaty (oczywiście, za wyjątkiem ostatniej kolumny).

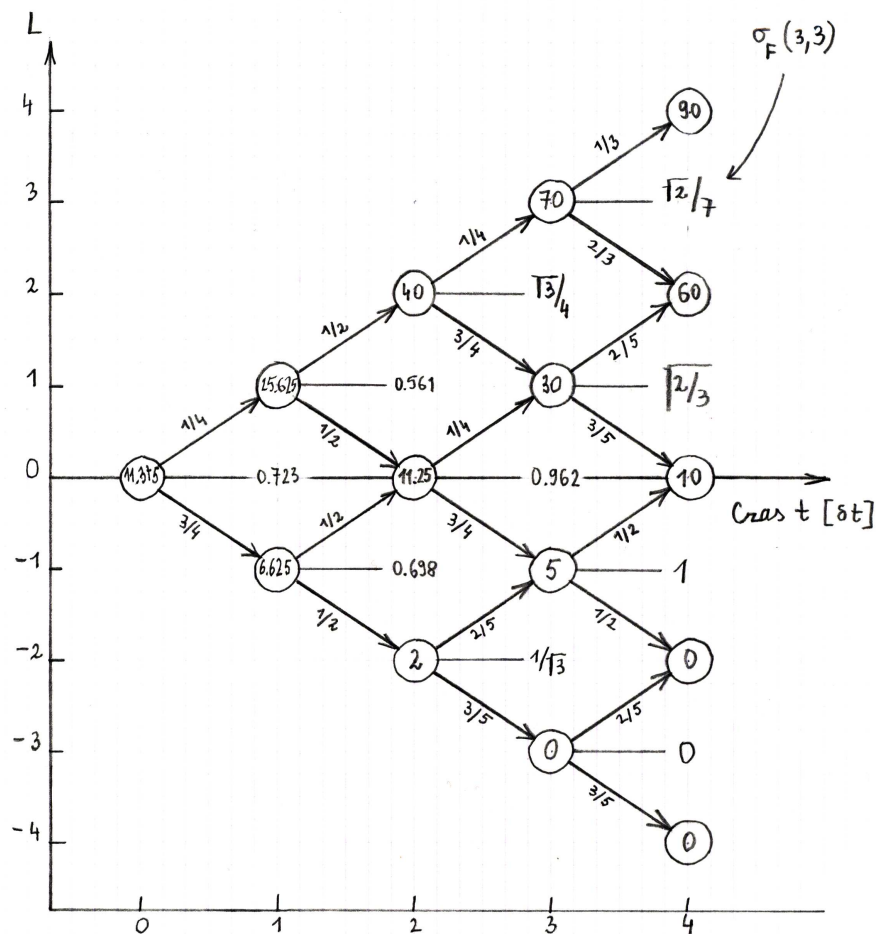
4.2.5 Strategia zabezpieczająca portfel

Dotychczas omawialiśmy strategię, która (niezbyt celnie) nazwa się arbitrażową (SA). Teraz podamy przykład pozwalający przedstawić strategię zabezpieczającą (SZ) portfel inwestora.

Sygnałem do aktywności inwestora może być realna cena posiadanej przez niego opcji kupna, czyli prawa do zakupu akcji od sprzedającego po umówionej cenie w dniu realizacji opcji. Jak wiadomo, cena sprawiedliwa (teoretyczna) wynosi $F_0^0 = 11.375$ (patrz rys. 4.5) podczas gdy rynkowa jest wyższa i wynosi np. $\tilde{F}_0^0 = 25.5$; niech stała w czasie cena obligacji będzie $\Lambda_0 = 1$ (przyjmujemy dla uproszczenia, że pozarynkowa stopa zwrotu $r = 0$).

Przykładowo, rozważymy dwie zasadniczo różne trajektorie na drzewku dwumianowym kończące się dla czasu $t = T = 4\delta t$ (patrz rys. 4.4 lub rys. 4.5):

⁷Staranniejsza analiza wymagałaby wprowadzenia pojęcia *poziomu ufności*.



Rysunek 4.8: Jednokierunkowe drzewo dwumianowe powstałe w wyniku hipotetycznego błędzenia przypadkowego ceny pochodnego instrumentu finansowego F w czasie dyskretnym na jednowymiarowej sieci L równoodległych (dyskretnych) węzłów. Kółkami zaznaczono ceny instrumentu pochodnego, strzałkami obliczone arbitrażowe prawdopodobieństwa przejść $\{q\}$, natomiast dodatkowe liczby umieszczone pomiędzy oznaczają względne dyspersje warunkowe wyznaczone ze wzoru (4.30) i przypisane (za pomocą poziomych kresek) do odpowiadających im cen.

- 1) trajektorię $[0, 1, 0, 1, 2]$, kończącą się opcją w cenie (czyli realizowaną o wypłacie $F_{t=T=4}^{l=2} = 60$) oraz
- 2) trajektorię symetryczną do powyższej $[0, -1, 0, -1, -2]$, kończącą się opcją nie podlegającą realizacji (czyli o wypłacie $F_{t=T=4}^{l=-2} = 0$).

Porównamy w obu sytuacjach zysk z portfela dla SZ, przy czym przez zysk rozumie się tutaj po prostu wartość portfela.

Trajektoria $[0,1,0,1,2]$

Wyjściowy krok SZ: $t = 0, l = 0$

Ponieważ opcja kupna jest przewartościowana, czyli przeceniona przez rynek na kwotę $\tilde{F}_{t=0}^{l=0} - F_0^0 = 25.5 - 11.375 = 14.125$, więc należy ją sprzedać uzyskując kwotę $\tilde{F}_{t=0}^{l=0} = 25.5$. Jednak, ten krok ma swoje konsekwencje; np. musimy dostarczyć akcję posiadaczowi tej opcji w terminie jej realizacji (tutaj w terminie $t = T = 4\delta t$) po cenie umownej K (tutaj $K = 110$). Musimy odpowiedzieć na pytanie czy krok ten jest opłacalny - jest to związane z dynamiką struktury udziałów naszego portfela. Zatem, **należy zbadać strukturę portfela czyli wyznaczyć liczbę udziałów** (liczbę akcji i liczbę obligacji).

Ze wzorów (4.18) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} SA, SZ : \phi_{t=0}^{A,l=0} &= \frac{25.625 - 6.625}{130 - 90} = 0.475, \\ SA : \phi_{t=0}^{O,l=0} &= \frac{130 \cdot 6.625 - 90 \cdot 25.625}{130 - 90} = -36.125 \end{aligned} \quad (4.31)$$

gdzie znak '-' oznacza zadłużenie.

Zakładamy, że

- w strategii zabezpieczającej udziały na akcje są dane tymi samymi wzorami co i w strategii arbitrażowej natomiast,
- udziały na obligacje są do tego odpowiednio dostosowywane (właśnie zgodnie ze strategią zabezpieczającą, patrz poniżej).

Są to kluczowe (ogólne) założenia tej strategii.

Zatem, **jak dostosowywane są udziały na obligacje do udziałów na akcje?** Z pierwszego równania (4.31) wynika, że należy zakupić $\phi_{t=0}^{A,l=0} = 0.475$ udziałów na akcje po aktualnej cenie $S_{t=0}^{l=0} = 100$ na co należy wydać dodatkowo, **ze środków własnych**, kwotę równą

$$\phi_{t=0}^{A,0} \cdot S_{t=0}^{l=0} - \tilde{F}_{t=0}^{l=0} = 47.5 - 25.5 = 22; \quad (4.32)$$

kwota ta, z założenia, ma być asekurowana identyczną pożyczoną na zakup obligacji (w cenie $\Lambda_0 = 1$ za sztukę) tzn.

$$\tilde{\phi}_{t=0}^{O,l=0} \cdot \Lambda_0 = -(\phi_{t=0}^{A,0} \cdot S_{t=0}^{l=0} - \tilde{F}_{t=0}^{l=0}) = -(47.5 - 25.5) = -22. \quad (4.33)$$

Zatem, liczba obligacji w portfelu w węźle ($t = 0, l = 0$) drzewa dwumianowego w ramach strategii zabezpieczającej wynosi

$$SZ : \tilde{\phi}_{t=0}^{O,l=0} = -22 \quad (4.34)$$

gdzie (jak poprzednio, w strategii arbitrażowej) znak '-' oznacza, iż są one zadłużone. W ten sposób skompletowaliśmy wyjściowy portfel strategii zabezpieczającej.

Zauważmy, że **kwota $\tilde{\phi}_{t=0}^{O,l=0} \cdot \Lambda_0$ jaką musimy pożyczyć w tej strategii aby zakupić obligacje jest teraz**, dzięki temu, że cena rynkowa opcji jest przewartościowana, **niższa od analogicznej kwoty $\phi_{t=0}^{O,l=0} \cdot \Lambda_0$ jaką musielibyśmy pożyczyć w strategii arbitrażowej właśnie o to początkowe przewartościowanie**. Jak zobaczymy, to przewartościowanie długu będzie nam towarzyszyło aż do czasu realizacji opcji w chwili $t = T$.

Istotą SZ jest zabezpieczanie (asekurowanie, równoważenie, lewarowanie) **kwoty wydatkowanej w danej chwili czasu przez właściciela portfela na zakup akcji identyczną kwotą pożyczoną na zakup odpowiedniej liczby obligacji** - nie obawiamy się takiego kroku, gdyż mamy (na każdym etapie) zabezpieczenie długu w postaci posiadanych akcji. Jak się okaże, strategia taka może być dochodowa tylko wtedy gdy wyjściowo opcja jest przewartościowana.

Pierwszy krok SZ: $t = 1\delta t, l = 1$

Postępujemy analogicznie jak w kroku wstępnym, czyli korzystając ze wzoru (4.18) dla strategii SA aktualizujemy udziały w chwili $t = 1\delta t$. Mianowicie,

$$\begin{aligned} SA, SZ : \phi_{t=1}^{A,l=1} &= \frac{40 - 11.25}{150 - 110} = 0.71875, \\ SA : \phi_{t=1}^{O,l=1} &= \frac{150 \cdot 11.25 - 110 \cdot 40}{150 - 110} = -67.8125. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Jak widać, pulę udziałów na akcje należy zwiększyć o $\phi_{t=1}^{A,l=1} - \phi_{t=0}^{A,l=0} = 0.24375$; ponieważ cena akcji wynosi teraz $S_{t=1}^{l=1} = 130$ więc, zgodnie z naszą strategią zabezpieczającą, należy pożyczyć kwotę asekurującą równą

$$\Delta \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=1} \cdot \Lambda_0 = -(\phi_{t=1}^{A,l=1} - \phi_{t=0}^{A,l=0}) \cdot S_{t=1}^{l=1} = -31.6875, \quad (4.36)$$

na zakup obligacji (w cenie, jak poprzednio, równej $\Lambda_0 = 1$ za sztukę) w liczbie 31.6875 sztuk. Zatem, aktualna liczba obligacji w portfelu (przypomnijmy, kupionych za pożyczone pieniądze) wynosi

$$SZ : \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=1} = \tilde{\phi}_{t=0}^{O,l=0} + \Delta \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=1} = -22 - 31.6875 = -53.6875. \quad (4.37)$$

Jak widać, zadłużenie w SZ jest niższe w porównaniu z analogicznym dla SA (drugi wzór w (4.35), cały czas o kwotę wspomnianego przewartościowania - chodzi o to aby nie wydawać zbyt wiele własnych zasobów.

Podkreślmy, w SZ ponosząc wydatek na zakup akcji, zawsze obligacje kupujemy asekuracyjnie już za pieniądze pożyczone.

Drugi krok SZ: $t = 2\delta t$, $l = 0$

W węźle ($t = 2\delta t$, $l = 0$) naszego drzewa dwumianowego (patrz rysunki 4.4 i 4.5) struktura portfela w strategii SA (liczona wciąż z tego samego wzoru (4.18)) jest następująca

$$\begin{aligned} SA, SZ : \phi_{t=2}^{A,l=0} &= \frac{30 - 5}{140 - 100} = 0.625, \\ SA : \phi_{t=2}^{O,l=0} &= \frac{140 \cdot 5 - 100 \cdot 30}{140 - 100} = -57.5, \end{aligned} \quad (4.38)$$

co oznacza konieczność sprzedaży $\phi_{t=1}^{A,l=1} - \phi_{t=2}^{A,l=0} = 0.09375$ udziałów na akcje po ich aktualnej cenie $S_{t=2}^{l=0} = 110$; daje to kwotę

$$\Delta\tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} = (\phi_{t=1}^{A,l=1} - \phi_{t=2}^{A,l=0}) \cdot S_{t=2}^{l=0} = 10.3125, \quad (4.39)$$

wystarczającą na zakup 10.3125 obligacji po (stałej) cenie $\Lambda_0 = 1$. Stąd, zaktualizowana liczba obligacji w portfelu wynosi⁸

$$SZ : \tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} = \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=1} + \Delta\tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} = -53.6875 + 10.3125 = -43.375; \quad (4.40)$$

oczywiście, jest to sumaryczna (wypadkowa) liczba obligacji wciąż zadłużona, ale niższej niż w SA, o wspomniane przewartościowane.

Trzeci krok SZ: $t = 3\delta t$, $l = 1$

Postępując analogicznie jak w poprzednich krokach, aktualizujemy portfel otrzymując

$$\begin{aligned} SA, SZ : \phi_{t=3}^{A,l=1} &= \frac{60 - 10}{170 - 120} = 1.0, \\ SA : \phi_{t=3}^{O,l=1} &= \frac{170 \cdot 10 - 120 \cdot 60}{170 - 120} = -110. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Wynika stąd, że należy dokupić $\phi_{t=3}^{A,l=1} - \phi_{t=2}^{A,l=0} = 0.375$ udziałów na akcje po $S_{t=3}^{l=1} = 140$ za sztukę co wymaga pożyczania kwoty

$$\Delta\tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=1} = -(\phi_{t=3}^{A,l=1} - \phi_{t=2}^{A,l=0}) \cdot S_{t=3}^{l=1} = -52.5, \quad (4.42)$$

idącej ponownie na zakup obligacji. Po aktualizacji liczba (zadłużonych) obligacji w portfelu wynosi

$$SZ : \tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=1} = \tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} + \Delta\tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=1} = -43.375 - 52.5 = -95.875, \quad (4.43)$$

⁸Dokonałismy tutaj skrótu myślowego; chodzi o to, że teraz dysponujemy wolną kwotą, którą zwracamy wierzycielowi, natomiast obligacje na tę kwotę jakie posiadamy w portfelu sprzedajemy, wycofując je tym samym z naszego portfela.

po cenie $\Lambda_0 = 1$ - wciąż mniej o przewartościowanie niż dla SA. Zatem, nasz dług wzrósł ale wzrosła także liczba udziałów na akcje - wkrótce zobaczymy jaka *per saldo* jest końcowa wartość naszego portfela.

Czwarty krok SZ: $t = T = 4\delta t$, $l = 2$

Należy teraz wykonać ostatni krok, w którym realizowany jest zysk (lub strata) na portfelu. Stan portfela dla strategii arbitrażowej i zabezpieczającej wraz z jego historią oraz odpowiednie zyski podano w tabeli 4.1 przy czym zysk został obliczony w następujący sposób.

Ponieważ opcja jest w cenie więc dla węzła ($t = T = 4\delta t$, $l = 2$) drzewa dwumianowego, czyli **w chwili realizacji opcji kupna przez jej nabywcę, inwestor ma obowiązek dostarczyć akcję po cenie umownej (tutaj) $K = 110$ uzyskując taką właśnie kwotę z jej sprzedaży. Z kwoty tej musi jednak spłacić pożyczkę zaciągniętą na zakup obligacji** czyli poszukiwany zysk strategii zabezpieczającej wynosi⁹:

$$SZ : Z_{t=T=4}^{l=2} = K + \tilde{\phi}_{t=T=4}^{O,l=2} \cdot \Lambda_0 = 14.125, \quad (4.44)$$

czyli (jak należało oczekiwać) tyle ile wynosi różnica pomiędzy rynkową a sprawiedliwą ceną opcji w chwili początkowej (tzn. początkowe przewartościowanie). Jak widać, **przez zysk strategii zabezpieczającej rozumiemy wartość portfela, przy czym wartość akcji liczona jest tutaj po cenie umownej K a nie, jak w strategii arbitrażowej, po cenie rynkowej.**

Jeżeli chodzi o strategię arbitrażową to analogiczny zysk wynosi¹⁰

$$SA : A_{t=T=4}^{l=2} = S_{t=T=4}^{l=2} \cdot \phi_{t=T=4}^{A,l=2} + \phi_{t=T=4}^{O,l=2} \cdot \Lambda_0 = 60, \quad (4.45)$$

czyli tyle ile zyskalibyśmy kupując opcje na akcje bez odliczania opłaty wstępnej (ceny opcji czyli premii).

W tabeli 4.1 zebrano uzyskane wyniki. Zauważmy, że w przedostatniej kolumnie występują wartości portfela w strategii arbitrażowej w kolejnych chwilach, które (ponieważ portfel jest replikowalny) równają się odpowiednim cenom opcji. Natomiast, w strategii zabezpieczającej sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdyż zysk możemy ustalić dopiero po upływie terminu umownego, czyli dopiero po sprzedaży akcji posiadaczowi opcji. Jak widać, zysk w strategii arbitrażowej jest cały czas pod kontrolą (jawnie widoczny).

Obliczymy łączne prawdopodobieństwo arbitrażowe na trajektorii $[0, 1, 0, 1, 2]$. Zatem,

$$q_{0,1}^{0,1} \cdot q_{1,2}^{1,0} \cdot q_{2,3}^{0,1} \cdot q_{3,4}^{1,2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{80}. \quad (4.46)$$

Porównując to prawdopodobieństwo z poniższym dla trajektorii $[0, -1, 0, -1, -2]$, uzyskamy odpowiedź co do szansy realizacji zysków dla poszczególnych trajektorii.

⁹Zauważmy, że $\tilde{\phi}_{t=T=4}^{O,l=2} = \tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=1}$.

¹⁰Analogicznie jak powyżej przyjmujemy, że $\phi_{t=T=4}^{A,l=2} = \phi_{t=3}^{A,l=1}$ oraz $\phi_{t=T=4}^{O,l=2} = \phi_{t=3}^{O,l=1}$.

Tabela 4.1: Trajektoria $[0,1,0,1,2]$: porównanie strategii zabezpieczającej (SZ) z arbitrażową (SA)

$(t [\delta t], l [j.u.])$	S_t^l	F_t^l	$\phi_t^{A,l}$	SA: $\phi_t^{O,l}$	SZ: $\tilde{\phi}_t^{O,l}$	SA: A_T	SZ: Z_T
(0, 0)	100	11.375	0.475	-36.125	-22	11.375	—
(1, 1)	130	25.625	0.71875	-67.8125	-53.6875	25.625	—
(2, 0)	110	11.25	0.625	-57.5	-43.375	11.25	—
(3, 1)	140	30	1.0	-110	-95.875	30	—
$(T = 4, 2)$	170	60	1.0	-110	-95.875	60	14.125

Trajektoria $[0,-1,0,-1,-2]$

Rozważymy teraz (dla porównania) trajektorię $[0, -1, 0, -1, -2]$. Tak jak poprzednio dla trajektorii $[0, 1, 0, 1, 2]$, będziemy teraz prowadzić równoległe obliczenia zarówno dla strategii arbitrażowej jak i zabezpieczającej.

Wyjściowy krok SZ: $t = 0, l = 0$

Krok ten daje analogiczny wynik jak poprzednio, gdyż dotyczy tego samego węzła; udziały na akcje i obligacje dla portfela arbitrażowego i zabezpieczonego przedstawiono w pierwszym wierszu zbiorczej tabeli 4.2.

Pierwszy krok SZ: $t = 1\delta t, l = -1$

Postępujemy analogicznie jak w kroku wstępnym, czyli korzystając ze wzoru (4.18) dla strategii SA aktualizujemy udziały w chwili $t = 1\delta t$. Mianowicie,

$$\begin{aligned} SA, SZ : \phi_{t=1}^{A,l=-1} &= \frac{11.25 - 2}{110 - 70} = 0.23125, \\ SA : \phi_{t=1}^{O,l=-1} &= \frac{110 \cdot 2 - 70 \cdot 11.25}{110 - 70} = -14.1875 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Jak widać, pulę udziałów na akcje należy zmniejszyć o $\phi_{t=0}^{A,l=0} - \phi_{t=1}^{A,l=-1} = 0.475 - 0.23125 = 0.24375$ co pozwala uzyskać (chwilowy) dochód; ponieważ cena akcji wynosi teraz $S_{t=1}^{l=-1} = 90$ więc, zgodnie z naszą strategią zabezpieczającą, należy za zarobioną kwotę dokupić asekurującą liczbę udziałów na obligacje równą:

$$\Delta \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=-1} \cdot \Lambda_0 = (\phi_{t=0}^{A,l=0} - \phi_{t=1}^{A,l=-1}) \cdot S_{t=1}^{l=-1} = 21.9375, \quad (4.48)$$

(w cenie, jak poprzednio, równej $\Lambda_0 = 1$ za sztukę). Zatem, aktualna liczba obligacji w portfelu (przypomnijmy, kupionych raz za pożyczone pieniądze a raz za zarobione) wynosi¹¹

$$SZ : \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=-1} = \tilde{\phi}_{t=0}^{O,l=0} + \Delta \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=-1} = -22 + 21.9375 = -0.0625. \quad (4.49)$$

¹¹Podobnie jak poprzednio, zrobiliśmy tutaj skrót myślowy. Podkreślimy raz jeszcze, chodzi o to, że teraz dysponujemy wolną gotówką, którą zwracamy wierzycielowi a odpowiadającą tej kwocie liczbę obligacji sprzedajemy wycofując je tym samym z naszego portfela.

Jak widać, to chwilowe zadłużenie jest znacznie niższe w porównaniu z analogicznym dla SA (drugi wzór w (4.47)) o kwotę początkowego przewartościowania ceny opcji.

Drugi krok SZ: $t = 2\delta t$, $l = 0$

Ten krok jest szczególnie interesujący gdyż potwierdza, że **w tych samych węzłach analizowane strategie dają (każda z osobna) taki sam portfel niezależnie od historii portfela**. Już bez komentarza przytoczymy odpowiednie wzory:

$$\begin{aligned} SA, SZ : \phi_{t=2}^{A,l=0} &= \frac{30 - 5}{140 - 100} = 0.625, \\ SA : \phi_{t=2}^{O,l=0} &= \frac{140 \cdot 5 - 100 \cdot 30}{140 - 100} = -57.5, \end{aligned} \quad (4.50)$$

co oznacza konieczność dokupienia $\phi_{t=2}^{A,l=0} - \phi_{t=1}^{A,l=-1} = 0.625 - 0.23125 = 0.39375$ udziałów na akcje po ich aktualnej cenie $S_{t=2}^{l=0} = 110$; daje to kwotę

$$-\Delta\tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} \cdot \Lambda_0 = (\phi_{t=2}^{A,l=0} - \phi_{t=1}^{A,l=-1}) \cdot S_{t=2}^{l=0} = 0.39375 \cdot 110 = 43.3125, \quad (4.51)$$

wystarczającą na zakup (za dopożyczzone pieniądze w tej samej wysokości) -43.3125 obligacji po (stałej) cenie $\Lambda_0 = 1$. Stąd, zaktualizowana liczba obligacji w portfelu wynosi

$$SZ : \tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} = \tilde{\phi}_{t=1}^{O,l=-1} + \Delta\tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} = -43.3125 - 0.0625 = -43.375; \quad (4.52)$$

oczywiście, jest to sumaryczna (wypadkowa) liczba obligacji wciąż zadłużonych niższej niż w ramach SA (jak zwykle o kwotę wyjściowego przewartościowania).

Trzeci krok SZ: $t = 3\delta t$, $l = -1$

Postępując analogicznie jak w poprzednich krokach, aktualizujemy portfel otrzymując

$$\begin{aligned} SA, SZ : \phi_{t=3}^{A,l=-1} &= \frac{10 - 0}{120 - 80} = 0.25, \\ SA : \phi_{t=3}^{O,l=-1} &= \frac{120 \cdot 0 - 80 \cdot 10}{120 - 80} = -20. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Wynika stąd, że należy dokonać sprzedaży $\phi_{t=2}^{A,l=0} - \phi_{t=3}^{A,l=-1} = 0.625 - 0.25 = 0.375$ udziałów na akcje po $S_{t=3}^{l=-1} = 100$ za sztukę co daje kwotę chwilowego zysku

$$\Delta\tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=-1} \cdot \Lambda_0 = -(\phi_{t=3}^{A,l=-1} - \phi_{t=2}^{A,l=0}) \cdot S_{t=3}^{l=-1} = 37.5; \quad (4.54)$$

kwota ta w całości idzie na zakup obligacji¹². Po aktualizacji, liczba obligacji w portfelu wynosi

$$SZ : \tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=-1} = \tilde{\phi}_{t=2}^{O,l=0} + \Delta\tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=-1} = -43.375 + 37.5 = -5.875, \quad (4.55)$$

¹²Tego typu skrót myślowy wyjaśniliśmy już wcześniej w kroku $1\delta t$.

po cenie $\Lambda_0 = 1$. Zatem, nadal nasz dług jest niższy, o początkowe przewartościowanie ceny opcji, od analogicznego w ramach strategii arbitrażowej - wkrótce zobaczymy jaka *per saldo* jest końcowa wartość naszego portfela dla przyjętej trajektorii.

Czwarty krok SZ: $t = T = 4\delta t$, $l = -2$

Należy teraz wykonać ostatni krok, w którym realizowany jest zysk (lub strata) na portfelu. Stan portfela dla strategii arbitrażowej i zabezpieczającej wraz z jego historią oraz odpowiednie zyski podano w tabeli 4.2, przy czym zysk został obliczony teraz w następujący sposób.

Ponieważ opcja nie jest w cenie (patrz węzeł $(t = T = 4\delta t, l = -2)$ drzewka dwumianowego), czyli w chwili realizacji opcji kupna przez jej nabywcę inwestor nie musi się wywiązywać z obowiązku dostarczenia akcji. Zatem, zysk z portfela w ramach strategii zabezpieczającej wynosi¹³:

$$SZ : Z_{t=T=4}^{l=2} = \phi_{t=T=4}^{A,l=-2} \cdot S_{t=T=4}^{l=-2} + \tilde{\phi}_{t=T=4}^{O,l=-2} \cdot \Lambda_0 = 0.25 \cdot 80 - 5.875 = 14.125, \quad (4.56)$$

czyli (jak należało oczekiwać) tyle ile wynosi różnica pomiędzy rynkową i sprawiedliwą ceną opcji w chwili początkowej $t = 0$.

Natomiast, jeżeli chodzi o strategię arbitrażową to analogiczny zysk z portfela wynosi¹⁴

$$SA : A_{t=T=4}^{l=2} = S_{t=T=4}^{l=-2} \cdot \phi_{t=T=4}^{A,l=-2} + \phi_{t=T=4}^{O,l=-2} \cdot \Lambda_0 = 0, \quad (4.57)$$

czego można się było spodziewać ponieważ opcja nie jest w cenie.

Tabela 4.2: Trajektorja $[0, -1, 0, -1, -2]$: porównanie strategii zabezpieczającej (SZ) z arbitrażową (SA)

(t, l)	S_t^l	F_t^l	$\phi_t^{A,l}$	SA: $\phi_t^{O,l}$	SZ: $\tilde{\phi}_t^{O,l}$	SA: A_T	SZ: Z_T
(0, 0)	100	11.375	0.475	-36.125	-22	11.375	-
(1, -1)	90	6.625	0.23125	-14.1875	-0.0625	6.625	-
(2, 0)	110	11.250	0.625	-57.5	-43.375	11.250	-
(3, -1)	100	5.0	0.25	-20	-5.875	5.0	-
$(T = 4, 2)$	80	0.0	0.25	-20	-5.875	0.0	14.125

Łączne prawdopodobieństwo arbitrażowe na trajektorii $[0, -1, 0, -1, -2]$ wynosi:

$$q_{0,1}^{0,-1} \cdot q_{1,2}^{-1,0} \cdot q_{2,3}^{0,-1} \cdot q_{3,4}^{-1,-2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{64}, \quad (4.58)$$

¹³Przypomnijmy, że $\phi_{t=T=4}^{A,l=-2} = \phi_{t=3}^{A,l=-1}$ oraz $\tilde{\phi}_{t=T=4}^{O,l=-2} = \tilde{\phi}_{t=3}^{O,l=-1}$.

¹⁴Analogicznie jak powyżej, $\phi_{t=T=4}^{O,l=-2} = \phi_{t=3}^{O,l=-1}$.

czyli jest **kilkunastokrotnie** większe niż dla trajektorii $[0, 1, 0, 1, 2]$ (patrz wyrażenie (4.46)).

Podsumowując, podobnie można sprawdzić, że analogiczna sytuacja ma miejsce dla pozostałych trajektorii na drzewku dwumianowym tzn.

- w ramach SZ zysk jest różnicą pomiędzy rynkową i sprawiedliwą ceną opcji w chwili początkowej
- w ramach SA zysk jest równy płatności za opcje na rozważaną akcję.

Jak widać, wprawdzie na rozważanym drzewie dwumianowym istnieją (dwie) trajektorie dla których zysk w ramach SA jest znacznie wyższy niż uzyskany dla SZ ale w ramach SA istnieją też trajektorie nie dające zysku podczas gdy wszystkie trajektorie SZ dają jednakowy zysk. Ponadto, trajektorie niskiego zysku w ramach SA są bardziej prawdopodobne w porównaniu z trajektoriami przynoszącymi duży zysk. Właśnie charakterystyczną cechą strategii zabezpieczającej jest: **mały zysk przy małym ryzyku straty**.

4.2.6 Korekta związana z wypłatą dywidendy

Zwróćmy jeszcze uwagę na sytuację, w której od rozważanego waloru bazowego (akcji) jest wypłacana w sposób ciągły dywidenda (np. stała w czasie) o stopie d w skali roku (akcja typu 'income'). Aby zrozumieć wpływ dywidendy na dynamikę ceny tego waloru (którego cena zmienia się od S_t w chwili t do $S_{t+\delta t}$ w chwili $t + \delta t$) porównajmy jego cenę z ceną akcji tej samej spółki ale pozbawionej dywidendy (akcja typu 'growth'). Ponieważ zakładamy (jak zwykle), że nie ma okazji do arbitrażu więc cena akcji nie przynoszącej dywidendy powinna się zmieniać od S_t do $S_{t+\delta t} \exp(d \delta t)$. Wynika to z faktu, że akcje *income* są tańsze od akcji *growth*. Wtedy akcje tego typu będą równie chętnie kupowane jak akcje przynoszące dywidendę, co nie prowadzi do różnicowania tych dwóch rodzajów akcji a więc nie stwarza okazji do arbitrażu. Alternatywnie rzecz biorąc można powiedzieć, że cena akcji pozbawionych dywidendy powinna się zmieniać od $S_t \exp(-d \delta t)$ do $S_{t+\delta t}$. Dlatego omawiana poprzednio wycena pochodnego instrumentu finansowego (np. opcji) wystawionego na akcje przynoszącą dywidendę może być sprowadzona do wyceny tego instrumentu na akcje pozbawioną dywidendy, której aktualna cena (w chwili t) jest zmniejszona o czynnik $\exp(-d \delta t)$. Stąd, we wzorach (4.20) na arbitrażowe prawdopodobieństwa przejść q należy parametr r zastąpić po prostu przez $r - d$ co daje,

$$\begin{aligned} q_{t,t+\delta t}^{l,l+1} &= \frac{S_t^l \exp((r-d) \delta t) - S_{t+\delta t}^{l-1}}{S_{t+\delta t}^{l+1} - S_{t+\delta t}^{l-1}}, \\ q_{t,t+\delta t}^{l,l-1} &= 1 - q_{t,t+\delta t}^{l,l+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T; \quad l = 0, 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Tym samym, całą analizę przeprowadzoną w rozdz.4.2 można rozszerzyć na walory przynoszące dywidendy.

4.3 Procesy martyngałowe

Proces martyngałowy jest szczególnym rodzajem procesu stochastycznego (losowego), który wygodnie jest omówiać w oparciu o wprowadzone wcześniej procesy losowe określone na drzewie dwumianowym. Ogólnie rzecz biorąc, **martyngały zdefiniowane są za pomocą prawdopodobieństw warunkowych** dlatego w pierwszym kroku zdefiniujemy te warunki zwane powszechnie filtrami (filtracjami).

4.3.1 Filtry

Definicja filtru (filtracji) $\mathcal{F}_t$ składa się z dwóch następujących kroków:

- 1) specyfikacji węzłów początkowych zajmowanych przez dany instrument (bazowy lub pochodny) w chwili $t = 0$ (w naszym przypadku jest to pojedynczy węzeł $l = 0$ drzewa dwumianowego) i węzłów końcowych, możliwych do obsadzenia przez ten instrument w danej chwili $t \geq 0$.
- 2) wyznaczenia wszystkich możliwych ścieżek łączących punkt (węzeł) początkowy z końcowymi. Na przykład, dla wprowadzonego wcześniej drzewa dwumianowego (patrz rys. 4.4)

$$\mathcal{F}_{t=3} = \begin{cases} \mathcal{F}_{t=3}^{l=3} = [0, 1, 2, 3] & (180) \\ \mathcal{F}_{t=3}^{l=1} = [0, 1, 2, 1] \cup [0, 1, 0, 1] \cup [0, -1, 0, 1] & (140) \\ \mathcal{F}_{t=3}^{l=-1} = [0, 1, 0, -1] \cup [0, -1, 0, -1] \cup [0, -1, -2, -1] & (100) \\ \mathcal{F}_{t=3}^{l=-3} = [0, -1, -2, -3] & (50) \end{cases} \quad (4.60)$$

Powyższe rozważania ująć w postaci następującej definicji.

Definicja 4.3.1.1 (Definicja filtracji) *Filtracja (filtr) $\mathcal{F}_t$ jest zbiorem wszystkich filtrów cząstkowych $\mathcal{F}_t^l$, gdzie każdy filtr cząstkowy jest zbiorem ścieżek związanych z danym węzłem początkowym $t = 0$ oraz z konkretnym węzłem dwumianowego drzewa w danej chwili $t \geq 0$.*

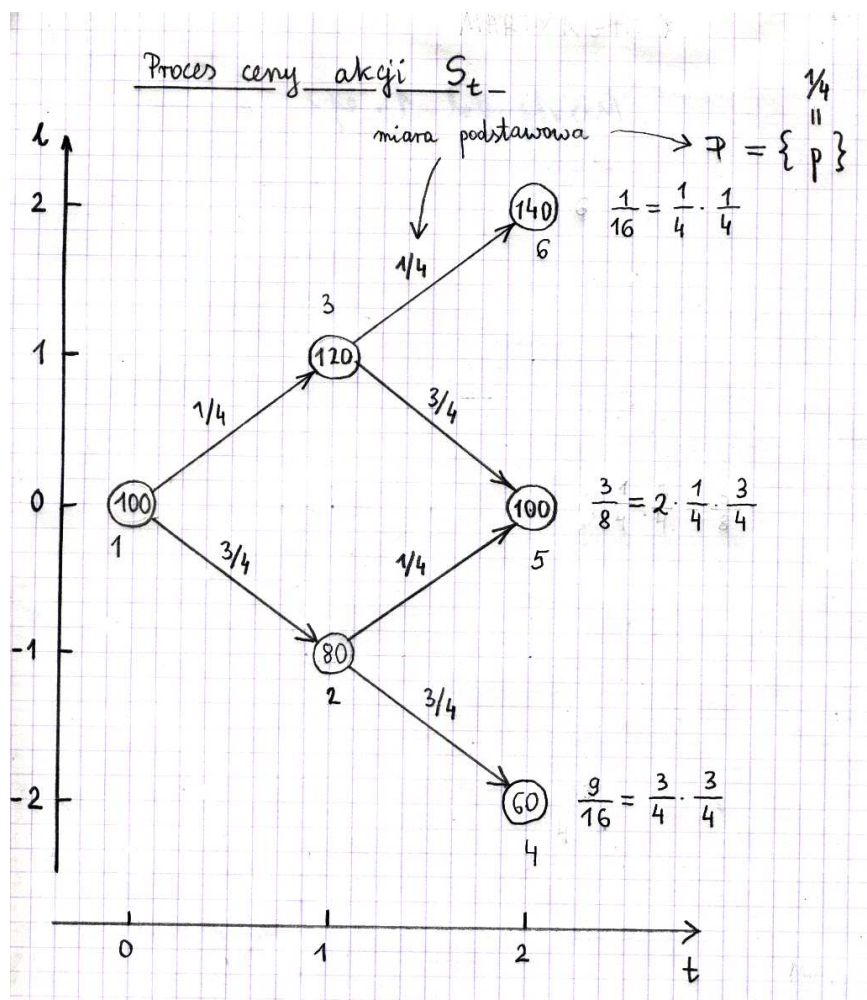
W dalszym ciągu (dla prostoty) poprowadzimy nasz wywód dla drzewka dwumianowego przedstawionego na rys. 4.9, gdzie zamiast poprzednio używanego indeksu l wprowadzimy zwykłą numerację węzłów (1, 2, ..., 6). W tym przypadku filtracja dla $t = 0, 1, 2$ jest postaci

t=0:

$$\mathcal{F}_{t=0} = \mathcal{F}_{t=0}^1 = [1] \quad (100) \quad (4.61)$$

t=1:

$$\mathcal{F}_{t=1} = \begin{cases} \mathcal{F}_{t=1}^3 = [1, 3] & (120) \\ \mathcal{F}_{t=1}^2 = [1, 2] & (80) \end{cases} \quad (4.62)$$



Rysunek 4.9: Drzewko dwumianowe przedstawione dla chwil $t=0,1,2$, dla procesu stochastycznego bazowego instrumentu finansowego S_t w mierze $\mathbb{P}$.

$t=2$:

$$\mathcal{F}_{t=2} = \begin{cases} \mathcal{F}_{t=2}^6 = [1, 3, 6] (140) \\ \mathcal{F}_{t=2}^5 = [1, 2, 5] \cup [1, 3, 5] (100) \\ \mathcal{F}_{t=2}^4 = [1, 2, 4] (60) \end{cases} \quad (4.63)$$

Znając prawdopodobieństwa przejść w przyjętej mierze (na razie wprowadziliśmy tylko miarę rynkową, subiektywną $\mathbb{P} = \{p\}$ i miarę arbitrażową $\mathbb{Q} = \{q\}$ - poniżej wprowadzamy także miarę martyngałową), można dla każdej ze ścieżek określić wagę czyli wkład danej ścieżki do średnich ważonych (wartości oczekiwanych) oraz do warunkowych średnich ważonych (warunkowych wartości oczekiwanych).

Jak widać na obu powyższych przykładach, **w każdej chwili** (za wyjątkiem początkowej) **filtracja prowadzi (w ogólności) do różnych wartości instrumen-**

tu z dobrze określonym prawdopodobieństwem, co pozwala (jak zobaczymy) traktować ją jak proces stochastyczny. Innymi słowy, **pozwała to na zdefiniowanie filtracji jako zależnej od czasu zmiennej losowej** - jej "wartościami" są obiekty w postaci odpowiednich filtrów cząstkowych (prowadzących do danej wartości instrumentu finansowego). Jednakże, posługiwanie się tego typu zmienną losową (choćby dobrze umotywowane) jest niewygodne.

4.3.2 Warunkowe średnie ważone - martyngał

Wprowadzimy najpierw definicję warunkowej wartości oczekiwanej (średniej) $E^P(\cdot | \mathcal{F}_t)$, która zależy nie tylko od miary podstawowej (subiektywnej, rynkowej, domniemanej) $\mathcal{P}$ ale także od filtracji $\mathcal{F}_t$ (czyli historii danego procesu stochastycznego na drzewku dwumianowym). Mianowicie, można wprowadzić następującą niezwykle ważną definicję.

Definicja 4.3.2.1 (Definicja wartości oczekiwanej warunkowanej filtracją)
Wyrażenie $E^P(F_t | \mathcal{F}_\tau)$, $\tau \leq t$, oznacza taką warunkową wartość oczekiwaną instrumentu finansowego F_t , jaka jest liczona tylko wzdłuż dróg, które są akceptowane (przepuszczane) przez filtr $\mathcal{F}_\tau$.

Mówiąc konkretniej, aby "zmaterializować" tą wartość oczekiwaną musimy podstawić konkretną wartość filtracji (czyli konkretne wartości zmiennej losowej), tzn. ściśle określone trajektorie prowadzące od węzła początkowego do danego węzła w wybranej chwili czasu t . Definicję tą zilustrujemy na prostym przykładzie.

Przykład

Niech instrumentem finansowym będzie instrument bazowy tzn. $F_t = S_t$. Wyznaczamy warunkowe wartości oczekiwane $E^P(S_t | \mathcal{F}_\tau)$, $\tau \leq t = 0, 1, 2$ (patrz tabele 4.3 - 4.5); w dalszym ciągu nazywamy je przefiltrowanymi wartościami oczekiwanymi. Zauważmy, że z powyższych tabel wynikają dwie ważne równości (warunki

Tabela 4.3: Przefiltrowane wartości oczekiwane dla chwili $t=T=0$

$E^P(F_{t=T(=0)} \mathcal{F}_\tau)$	Filtracja	Wartość $E^P(S_{t=T(=0)} \mathcal{F}_\tau)$
$E^P(S_0 \mathcal{F}_0)$	[1]	100

brzegowe) spełnione dla dowolnej chwili, dowolnej miary i dowolnego instrumentu finansowego:

$$E^P(F_t | \mathcal{F}_0) = E^P(F_t), \quad (4.64)$$

$$E^P(F_t | \mathcal{F}_t) = F_t. \quad (4.65)$$

Tabela 4.4: Przefiltrowane wartości oczekiwane dla chwili $t=T=1$

$E^P(F_{t=T(=1)} \mathcal{F}_\tau)$	Filtracja	Wartość $E^P(S_{t=T(=1)} \mathcal{F}_\tau)$
$E^P(S_1 \mathcal{F}_0)$	[1]	$\frac{3}{4} \cdot 80 + \frac{1}{4} \cdot 120 = 90$
$E^P(S_1 \mathcal{F}_1)$	[1,2]	80
	[1,3]	120

Tabela 4.5: Przefiltrowane wartości oczekiwane dla chwili $t=T=2$

$E^P(F_{t=T(=2)} \mathcal{F}_\tau)$	Filtracja	Wartość $E^P(S_{t=T(=2)} \mathcal{F}_\tau)$
$E^P(S_2 \mathcal{F}_0)$	[1]	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 140 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 100 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 60 = 80$
$E^P(S_2 \mathcal{F}_1)$	[1,2]	$\frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{3}{4} \cdot 60 = 70$
	[1,3]	$\frac{1}{4} \cdot 140 + \frac{3}{4} \cdot 100 = 110$
$E^P(S_2 \mathcal{F}_2)$	[1,2,4]	60
	[1,2,5] $\cup$ [1,3,5]	$100 \cup 100 = 100$
	[1,3,6]	140

Ponadto widać, że **przefiltrowana wartość oczekiwana**

$$Z_t \stackrel{\text{def.}}{=} E^P(S_{T=2} | \mathcal{F}_t), \quad t = 0, 1, 2, \quad (4.66)$$

jest zmienną losową przyjmującą różne wartości (patrz tabela 4.5) z różnymi na ogół prawdopodobieństwami (patrz rys. 4.10), przy czym (jak zobaczymy poniżej) zmienna Z_t nie zależy od T .

Na rys. 4.10 przedstawiono, w oparciu o tabelę 4.5, ten nowy proces stochastyczny Z_t na drzewku dwumianowym (w mierze P).

W ogólności, **procesem stochastycznym jest zmienna losowa**

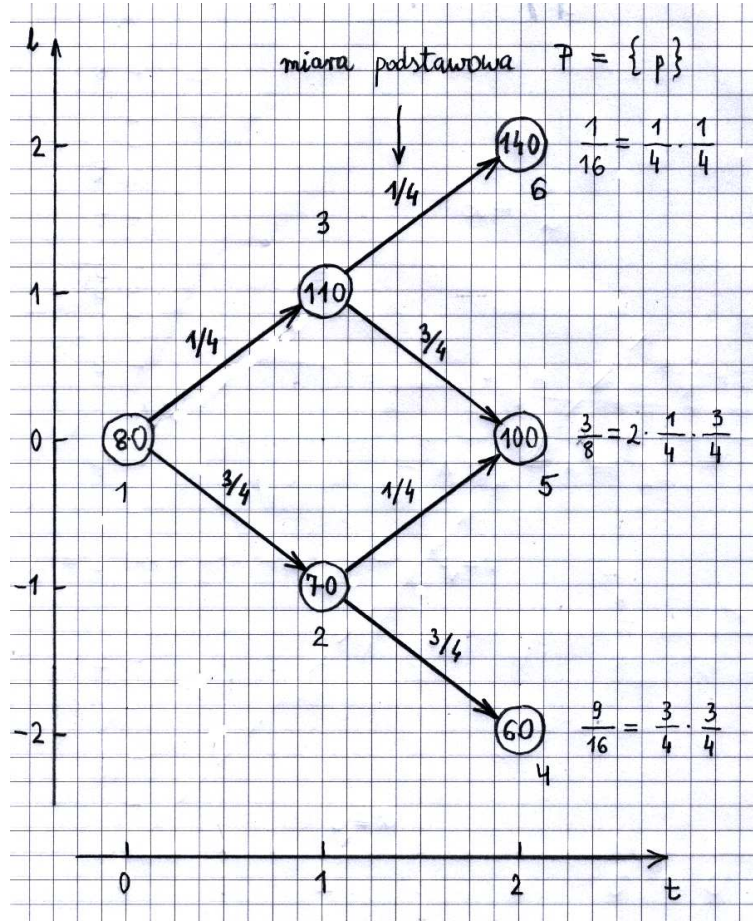
$$\Phi_t \stackrel{\text{def.}}{=} E^P(F_T | \mathcal{F}_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (4.67)$$

określona na drzewku dwumianowym dla dowolnego instrumentu finansowego F (a nie tylko dla ceny S instrumentu bazowego; patrz poniżej kluczowe twierdzenie 4.3.2.1 dotyczące martyngału).

Pokażemy w oparciu o drzewko dwumianowe zamieszczone na rys. 4.10, że proces Z_t (zdefiniowany przez (4.66)) posiada, dla każdej chwili $t \leq T(=2)$, następującą **bardzo istotną własność**

$$Z_t = E^P(Z_{T(=2)} | \mathcal{F}_t). \quad (4.68)$$

W tym celu konstruujemy tabelę 4.6 odpowiednio przefiltrowanych wartości oczekiwanych tej zmiennej. Poprzez (bezpośrednie) porównanie odpowiadających sobie wartości w tej tabeli i na drzewie dwumianowym przedstawionym na rys. 4.10 widać, że spełniona jest równość (4.68).



Rysunek 4.10: Drzewko dwumianowe przedstawione dla trzech kolejnych chwil dla przykładowego procesu stochastycznego $Z_t = E^P(S_{T(=2)} | \mathcal{F}_t)$.

Dodatkowo, tabela 4.6 pokazuje, że mają miejsce następujące własności (wynikające, jak zobaczymy poniżej, bezpośrednio z faktu, że proces stochastyczny Z_t jest martyngałem):

$$E^P(Z_0 | \mathcal{F}_0) = E^P(Z_1 | \mathcal{F}_0) = E^P(Z_2 | \mathcal{F}_0) \quad (4.69)$$

oraz

$$E^P(Z_1 | \mathcal{F}_1) = E^P(Z_2 | \mathcal{F}_1), \quad (4.70)$$

lub ogólniej

$$E^P(Z_t | \mathcal{F}_t) = E^P(Z_{t+j} | \mathcal{F}_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.71)$$

Teraz jesteśmy przygotowani do wprowadzenia kluczowej definicji.

Tabela 4.6: Przetworzone wartości oczekiwane dla procesu stochastycznego Z_t w mierze $\mathcal{P}$

$E^P(F_T \mathcal{F}_t)$	Filtracja	Wartość $E^P(Z_T \mathcal{F}_t)$
$E^P(Z_2 \mathcal{F}_0)$	[1]	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 140 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 100 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 60 = 80$
$E^P(Z_2 \mathcal{F}_1)$	[1,2]	$\frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{3}{4} \cdot 60 = 70$
	[1,3]	$\frac{1}{4} \cdot 140 + \frac{3}{4} \cdot 100 = 110$
$E^P(Z_2 \mathcal{F}_2)$	[1,2,4]	60
	[1,2,5] $\cup$ [1,3,5]	100 $\cup$ 100 = 100
	[1,3,6]	140
$E^P(Z_1 \mathcal{F}_0)$	[1]	$\frac{1}{4} \cdot 110 + \frac{3}{4} \cdot 70 = 80$
$E^P(Z_1 \mathcal{F}_1)$	[1,2]	70
	[1,3]	110
$E^P(Z_0 \mathcal{F}_0)$	[1]	80

Definicja 4.3.2.2 (Definicja martyngału względem miary i filtracji) *Dowolny proces stochastyczny U_t określony w mierze $\mathcal{P} = \{p\}$ i ograniczony, (czyli spełniający nierówność $E^P(|U_t|) < \infty$), nazywamy $\mathcal{P}$ -martyngałem (tzn. martyngałem względem miary $\mathcal{P}$) jeżeli zmienna losowa U_t spełnia równość (analogiczną do (4.68)):*

$$U_t = E^P(U_T | \mathcal{F}_t), \quad (4.72)$$

dla każdej chwili $t \leq T$. Jak widać, proces stochastyczny Z_t jest $\mathcal{P}$ -martyngałem; miara $\mathcal{P}$ nosi nazwę miary martyngałowej.

Warto zauważyć, że nawet gdyby proces U_t nie był martyngałem, to zawsze $U_T = E^P(U_T | \mathcal{F}_T)$, czyli dla dowolnej miary i filtracji.

Jak widać, **znalezienie miary martyngałowej dla procesu stochastycznego danego instrumentu finansowego pozwala wycenić ten instrument w dowolnej chwili $0 \leq t \leq T$. W ten sposób odpowiedzieliśmy na jedno z kluczowych pytań analizy portfelowej o wycenę dowolnego instrumentu finansowego w dowolnej chwili.**

Zachodzi następujące, ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.2.1 (Twierdzenie kluczowe o konstrukcji martyngału) *Dla dowolnego instrumentu finansowego F proces stochastyczny przetworzonej wartości oczekiwanej $\Phi_t = E^P(F_T | \mathcal{F}_t)$, $t \leq T$, jest martyngałem względem miary $\mathcal{P}$ i filtracji $\mathcal{F}$ (zauważmy, że T jest dowolną liczbą naturalną albo zerem), czyli*

$$\Phi_t = E^P(\Phi_T | \mathcal{F}_t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.73)$$

Dowód tego twierdzenia (przez konstrukcję) jest analogiczny jak wywód przeprowadzony dla instrumentu Z_t zbudowanego na bazie S_t , gdyż nie zależał on od konkretnej postaci instrumentu S_t (mógł być to równie dobrze jakiś inny instrument F_t). Co więcej, nie zależał od konkretnej postaci miary P .

Może się zdarzyć, że np. $\Phi_t = F_t$ - wtedy instrument F jest już od razu martyn-gałem w mierze P i filtracji $\mathcal{F}$ bez potrzeby ponownego budowania przefiltrowanej wartości oczekiwanej.

Przy okazji zwróćmy uwagę, że wzór (4.25) można przepisać w języku martyn-gałów a mianowicie,

$$F_0 = \exp(-rT)E^Q(F_T | \mathcal{F}_0) = E^Q(\exp(-rT)F_T | \mathcal{F}_0). \quad (4.74)$$

Oczywiście, gdyby dla instrumentu finansowego istniała taka miara¹⁵ Q , że powyższy wzór można by uogólnić do postaci

$$F_t = \exp(-r(T-t))E^Q(F_T | \mathcal{F}_t) = E^Q(\exp(-r(T-t))F_T | \mathcal{F}_t), \quad (4.75)$$

wówczas, zdyskontowany instrument finansowy $\exp(-rt)F_t$ byłby w tej mierze mar-tyngałem, gdyż spełniona byłaby równość definiująca (4.72) w postaci:

$$\exp(-rt)F_t = E^Q(\exp(-rT)F_T | \mathcal{F}_t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.76)$$

Zatem, **znalezienie miary martyngałowej umożliwia wyznaczenie warto-ści instrumentu w dowolnej chwili** $0 \leq t \leq T$ - to kluczowe zagadnienie jest omawiane poniżej.

Widać, że proces martyngałowy nie prowadzi do arbitrażu - wystarczy w tym celu w równaniu (4.76) podstawić $T = t + \delta t$, co prowadzi do wyrażenia:

$$\exp(r\delta t)F_t = E^Q(F_{t+\delta t} | \mathcal{F}_t), \quad 0 \leq t \leq T - \delta t, \quad (4.77)$$

które ma taką samą wymowę jak wcześniej wyprowadzone (4.22) dla miary arbitra-żowej. Tzn., spodziewany zysk z instrumentu finansowego F w chwili $t + \delta t$ jest, w tym przypadku, taki jak z lokaty bankowej o wartości F_t . Jak już wcześniej mówi-lismy, tego typu miarę nazywamy obojętną względem ryzyka. Zatem, **znalezienie miary martyngałowej dla danego instrumentu finansowego jest zawsze wyjściowym zadaniem narzucanym przez paradygmat istnienia rynku finansowego, czyli braku arbitrażu.**

Zauważmy jeszcze (porównaj drzewko dwumianowe na rys. 4.9 z tym na rys. 4.10), że proces stochastyczny ceny akcji S_t nie jest (w ogólności) martyngałem względem miary P i filtracji $\mathcal{F}$. Okazuje się jednak, że

Lemat 4.3.2.1 (Lemat o konstrukcji miary martyngałowej) *Można skonstru-ować taką miarę (porównaj drzewka dwumianowe na rysunkach 4.9 i 4.11) $Q = \{q = 1/2\}$ względem której proces stochastyczny S_t będzie Q -martyngałem wzglę-dem filtracji $\mathcal{F}$; co więcej widać, że jest ona w naszym przypadku jednocześnie miarą arbitrażową (patrz wzory (4.20)).*

¹⁵Proszę nie pomylić teraz tej miary z miarą arbitrażową.

Poniższa tabelka 4.7 zawiera konieczne wartości obliczone dla tego procesu (przy założeniu, że $r = 0$) - właśnie te wartości zostały dodatkowo umieszczone na drzewie dwumianowym na rys. 4.11. Porównanie otrzymanych wielkości z odpowiadającymi im umieszczonymi na drzewie przedstawionym na rys. 4.9 wskazuje na spełnienie własności (4.72) definiującej martyngał. W ogólności, znalezienie miary martyngałowej do danego instrumentu finansowego nie jest takie proste, Jednakże, dla procesu cen akcji zakładamy iż jest to możliwe - patrz *Lemat o istnieniu* 4.3.3.3.

Tabela 4.7: Przefiltrowane wartości oczekiwane dla procesu stochastycznego S_t w mierze martyngałowej Q .

$E^Q(F_T \mathcal{F}_t)$	Filtracja	Wartość $E^Q(S_T \mathcal{F}_t)$
$E^Q(S_2 \mathcal{F}_0)$	[1]	$\frac{1}{4} \cdot 140 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{1}{4} \cdot 60 = 100$
$E^Q(S_2 \mathcal{F}_1)$	[1,2]	$\frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 60 = 80$
	[1,3]	$\frac{1}{2} \cdot 140 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 120$
$E^Q(S_2 \mathcal{F}_2)$	[1,2,4]	60
	[1,2,5] $\cup$ [1,3,5]	$100 \cup 100 = 100$
	[1,3,6]	140
$E^Q(S_1 \mathcal{F}_0)$	[1]	$\frac{1}{2} \cdot 80 + \frac{1}{2} \cdot 120 = 100$
$E^Q(S_1 \mathcal{F}_1)$	[1,2]	80
	[1,3]	120
$E^Q(S_0 \mathcal{F}_0)$	[1]	100

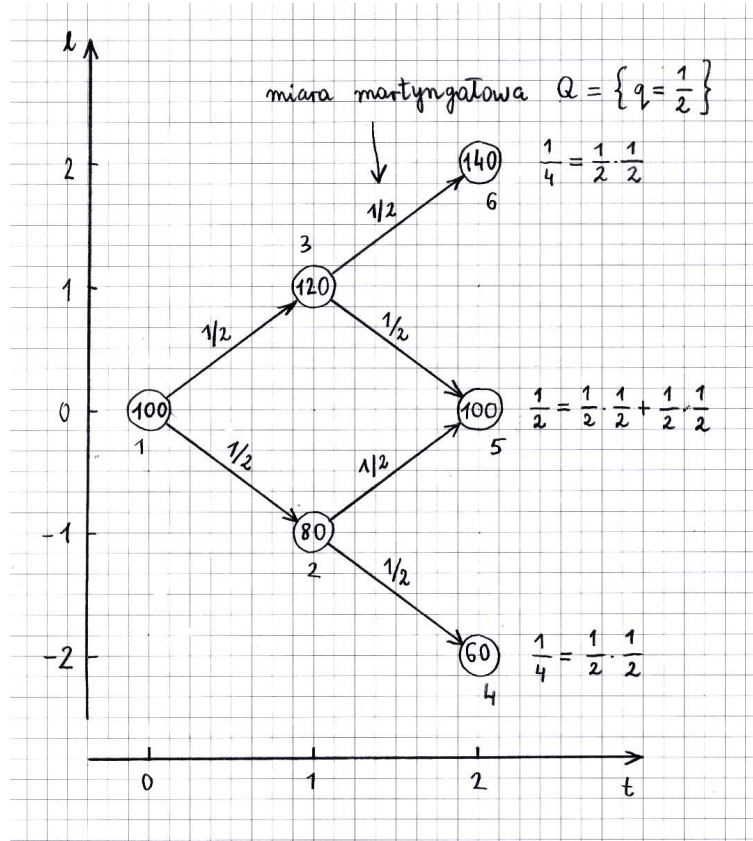
4.3.3 Reprezentacja martyngałowa procesów dyskretnych

Podamy teraz (bez dowodu) zasadnicze twierdzenie dotyczące reprezentacji martyngałowej procesów dyskretnych odgrywające wprost trudną do przecenienia rolę w finansach (np. w konstruowaniu strategii samofinansującej). Zanim jednak je sformułujemy podamy definicję procesu prognozowalnego.

Definicja 4.3.3.1 (Definicja procesu prognozowalnego) *Mówimy, że mamy do czynienia z procesem prognozowalnym ϕ_t na drzewku dwumianowym jeżeli wartość tego procesu w chwili t zależy (przynajmniej) od filtracji $\mathcal{F}_{t-1}$.*

Najprostszym przykładem takiego procesu może być proces ceny obligacji Λ_t , poruszający się jedynie po skrajnie górnej trajektorii drzewka - jest to wędrówka tylko w górę o czynnik $\exp(r\delta t)$ z prawdopodobieństwem 1. Dodajmy, że jeżeli jakiś proces jest prognozowalny to również (prawie) dowolna funkcja $f(\phi_t)$ jest procesem prognozowalnym. Mówiąc ogólnie, trudno jest podać przykład procesu nieprognozowalnego.

Twierdzenie 4.3.3.1 (Twierdzenie o reprezentacji martyngałowej) *Niech dane będą dwa procesy Q -martyngałowe M_t i N_t na drzewie dwumianowym. Istnieje*



Rysunek 4.11: Drzewko dwumianowe przedstawione dla trzech kolejnych chwil dla procesu stochastycznego S_t w mierze martyngałowej Q .

taki proces prognozowalny ϕ_t , że zachodzi następująca równość:

$$N_t = N_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \phi_k \Delta M_k, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.78)$$

przy czym $\Delta M_k = M_{k+1} - M_k$ jest przyrostem procesu M_k od chwili k do $k+1$, natomiast proces prognozowalny ϕ_k wyraża się (dodatkowo) wzorem

$$\phi_k = \frac{N_{k+1}^+ - N_{k+1}^-}{M_{k+1}^+ - M_{k+1}^-} = \frac{\delta N_{k+1}}{\delta M_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.79)$$

gdzie $N_{k+1}^\pm$ oraz $M_{k+1}^\pm$ to wartości jakie mogą przyjmować odpowiednio proces N_t i M_t w węzłach (widetkach) drzewa dwumianowego w chwili $k+1$ sąsiadujących bezpośrednio z wyjściowym w chwili k .

Zauważmy, że wyrażenie (4.79) można traktować jako formalne rozszerzenie (z miary arbitrażowej na martyngałową) pierwszego wzoru w (4.18) na liczbę udziałów

na akcje w portfelu dwuwalorowym, gdzie proces N_t można interpretować jako proces pochodnego instrumentu finansowego wystawionego na papier wartościowy M_t - papier ten nie musi być instrumentem bazowym (czyli ceną akcji) a może być także jakimś instrumentem pochodnym.

Z Twierdzenia 4.3.3.1 wynika wielce użyteczny dla zastosowań

Lemat 4.3.3.1 (Lemat o rekurencji) *Ze wzoru (4.78) wynika bezpośrednio następująca, rekurencyjna formuła*

$$N_t = N_{t-1} + \phi_{t-1} \Delta M_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.80)$$

lub jej postać równoważna

$$\phi_{t-1} = \frac{\Delta N_{t-1}}{\Delta M_{t-1}}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (4.81)$$

Aby wyprowadzić formułę (4.80) wystarczy we wzorze (4.78) przedstawić sumowanie w postaci dwóch części a mianowicie, sumowania krótszego o jeden składnik, czyli do $t-2$ oraz ostatniego składnika, czyli $\phi_{t-1} \Delta M_{t-1}$. Ta krótsza suma to nic innego jak proces N_{t-1} , co kończy wywód.

Co więcej, wykażemy, że z Lematu 4.3.3.1 wynika już postać procesu prognozowanego (4.79). W tym celu zapiszmy równość (4.80) dla wartości procesów w postaci:

$$\begin{aligned} N_{t+1}^+ &= N_t + \phi_t M_{t+1}^+ - \phi_t M_t, \\ N_{t+1}^- &= N_t + \phi_t M_{t+1}^- - \phi_t M_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (4.82)$$

skąd, odejmując stronami obie równości i dzieląc je przez różnicę $M_{t+1}^+ - M_{t+1}^-$, otrzymujemy poszukiwaną postać ϕ_t daną wzorem (4.81). Zauważmy, że N_t i M_t oznaczają tutaj (skrótowo) wartości procesów, odpowiednio, N_t i M_t w węźle widełek. Odwrotnie, ze wzoru (4.80) można wyprowadzić (krok po kroku¹⁶) wyrażenie (4.78).

Jak widać, proces prognozowany ϕ_t można przedstawić albo jako iloraz różnicowy po węzłach drzewka dwumianowego (przy ustalej następnej chwili) obu procesów Q -martyngałowych (patrz wzór (4.79)) albo jako ich (jednokrokowy) iloraz różnicowy w czasie (patrz wzór (4.81)).

Zauważmy jeszcze, że z równości (4.80) wynika równość (4.78) poprzez kolejne podstawienia (rekurencje). Mianowicie, wyrażenie (4.80) na proces $N_{t=1}$ w chwili $t = 1$ podstawiamy do wzoru (4.80) ale na $N_{t=2}$, z kolei tą wielkość podstawiamy do $N_{t=3}$, itd, itp. Pozwala to stwierdzić, że Lemat 4.3.3.1 jest równoważny Twierdzeniu 4.3.3.1.

Dodajmy jeszcze jeden użyteczny lemat.

¹⁶Lub, po prostu, stosując indukcję matematyczną.

Lemat 4.3.3.2 (Lemat o odwrotnym procesie prognozowalnym) *Z Lematu 4.3.3.1 wynika bezpośrednio, że jeżeli ϕ_t jest procesem prognozowalnym to i proces odwrotny (co do wartości) ϕ_t^{-1} jest także procesem prognozowalnym.*

Poniżej zastosujemy wzór (4.81) do skonstruowania typowej strategii samofinansującej portfela dwuskładnikowego, należącej do grupy strategii replikujących.

Ogólne uwagi o strategii samofinansującej

Zakładamy jak zwykle, że mamy do dyspozycji stochastyczny proces akcji S_t oraz prognozowalny proces ceny obligacji Λ_t , które są zdefiniowane na drzewie dwumianowym (w dalszym ciągu bez zmniejszania ogólności rozważań można przyjąć, że $\Lambda_0 = 1$, co pozwala na dyskontowanie i kapitalizację instrumentów finansowych za pomocą ceny obligacji, która reprezentuje zmieniającą się wraz z upływem czasu wartość pieniądza); zauważmy, że również proces Λ_t^{-1} jest prognozowalny (na mocy Lematu 4.3.3.2).

Należy podkreślić, że dla dyskretnego procesu stochastycznego S_t (tutaj na drzewku dwumianowym) udowodniono następujący, bardzo ważny lemat.

Lemat 4.3.3.3 (Lemat o istnieniu) *O istnieniu jednej i tylko jednej miary Q , względem której proces stochastyczny zdyskontowanych cen akcji $\tilde{S}_t = \Lambda_t^{-1}S_t$ jest Q -martyngałem.*

Oczywiście, Q -martyngałem będzie także proces stochastyczny rozpatrywanego zdyskontowanego instrumentu finansowego F zdefiniowany jako przefiltrowana wartość oczekiwana¹⁷ (patrz wzory (4.67) i (4.73)):

$$E_t = E^Q(\Lambda_T^{-1}F_T \mid \mathcal{F}_t), \quad t \leq T, \quad (4.83)$$

przy czym, oczywiście, $E_T = \Lambda_T^{-1}F_T$. W ten sposób definiujemy

- 1) dwa procesy Q -martyngałowe, $\tilde{S}_t$ oraz E_t , względem (tej samej) filtracji $\mathcal{F}$ oraz
- 2) dwa procesy prognozowalne (Λ_t oraz ϕ_t);

pozwoli to porównać procesy wymienione w p.1), korzystając właśnie z Twierdzenia 4.3.3.1 o reprezentacji martyngałowej, i zbudować samofinansującą strategię zabezpieczającą.

Gdyby tak się zdarzyło, iż zdyskontowany instrument finansowy

$$\Lambda_t^{-1}F_t = E_t \quad (4.84)$$

wówczas on sam byłby, co widać w oparciu o wzór (4.83), Q -martyngałem w filtracji $\mathcal{F}$ (a nie tylko jego przefiltrowana wartość oczekiwana) przy czym, otrzymane wzory byłyby dodatkowo wzorami omawianej wcześniej strategii arbitrażowej. Oczywiście, niniejsze podejście bazujące na równości (4.83), jest znacznie ogólniejsze (np. zbudowana strategia nie jest w ogólności arbitrażowa).

¹⁷Proszę nie mylić oznaczenia E^Q z E_t . To pierwsze (przypomnijmy) oznacza wartość oczekiwaną w mierze Q , natomiast to drugie proces stochastyczny w chwili t .

Strategia samofinansująca - praktyczna realizacja

Na wstępie, przyjmujemy, że

$$\begin{aligned} N_t &\equiv E_t, \\ M_t &\equiv \tilde{S}_t. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Następnie, zdefiniujemy dla każdej chwili t liczbę udziałów w portfelu na akcje

$$\phi_t^A = \phi_t, \quad (4.86)$$

gdzie ϕ_t jest zdefiniowanym wcześniej w Twierdzeniu 4.3.3.1 o reprezentacji martyn-gałowej procesem prognozowalnym, czyli na mocy Lematu 4.3.3.1,

$$\phi_{t-1} = \frac{\Delta E_{t-1}}{\Delta \tilde{S}_{t-1}} = \frac{E_t - E_{t-1}}{\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}}. \quad (4.87)$$

To właśnie do wielkości udziałów na akcje dobierane są odpowiednio udziały na obligacje. Odpowiedni dobór był także i w poprzednich strategiach. W obecnej, liczba obligacji w portfelu dana jest wzorem:

$$\psi_t^O = E_t - \phi_t^A \tilde{S}_t. \quad (4.88)$$

Teraz już możemy określić wartość portfela $\pi_t = (\phi_t^A, \psi_t^O)$ w chwili t a mianowicie,

$$\begin{aligned} V_t(\pi_t) &= \phi_t^A S_t + \psi_t^O \Lambda_t \\ &= \phi_t^A S_t + (E_t - \phi_t^A \tilde{S}_t) \Lambda_t = \Lambda_t E_t. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Wartość ta jest równa (dzięki wyrażeniu (4.83) przefiltrowanej wartości oczekiwanej zdyskontowanego instrumentu finansowego $\Lambda_{T-t}^{-1} F_T$. Oznacza to, że portfel nie jest replikujący (w sensie definicji (4.16) i (4.17)).

W dalszym ciągu wykazemy, że wartość portfela $\pi_{t-1} = (\phi_{t-1}^A, \psi_{t-1}^O)$ w chwili t wynosi

$$V_t(\pi_{t-1}) = V_t(\pi_t). \quad (4.90)$$

Właśnie ta równość definiuje portfel samofinansujący (strategię samo-finansującą), gdyż umożliwia sprzedaż portfela π_{t-1} i jednocześnie kupno portfela π_t w ramach (specyficznej) operacji typu *no profit*. Innymi słowy, definicja liczby obligacji dana wzorem (4.88) oraz (jak wykazujemy poniżej) Twierdzenie 4.3.3.1 o reprezentacji martyn-gałowej, umożliwiającą właśnie zbudowanie tego typu portfela.

Oczywiście, powyżej przeprowadzona operacja typu *no profit* nie oznacza tutaj braku chwilowego zysku - jest on po prostu różnicą

$$ZYSK_t = V_t(\pi_t) - V_{t-1}(\pi_{t-1}). \quad (4.91)$$

Udowodnimy teraz kluczową równość (4.90), przekształcając jej lewą stronę:

$$\begin{aligned}
V_t(\pi_{t-1}) &= \phi_{t-1}^A S_t + \psi_{t-1}^O \Lambda_t \\
&= \phi_{t-1}^A S_t + (E_{t-1} - \phi_{t-1}^A \tilde{S}_{t-1}) \Lambda_t \\
&= \Lambda_t [E_{t-1} + \phi_{t-1}^A (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1})] \\
&= \Lambda_t (E_{t-1} + \phi_{t-1}^A \Delta \tilde{S}_{t-1}) = \Lambda_t E_t = V_t(\pi_t),
\end{aligned} \tag{4.92}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy (kolejno) ze wzorów (4.88), (4.87) i (4.89).

Ponadto, zauważmy, że w chwili $t = T$ wartość portfela π_{T-1} wynosi

$$V_T(\pi_{T-1}) = \Lambda_T E_T = \Lambda_T E^Q(\Lambda_T^{-1} F_T \mid \mathcal{F}_T) = \Lambda_T \Lambda_T^{-1} F_T = F_T, \tag{4.93}$$

co oznacza, że strategia samofinansująca jest replikująca w słabym sensie, gdyż odtwarza cenę (czyli wartość wypłaty) instrumentu finansowego F jedynie w chwili jego realizacji T . Poprawną (sprawiedliwą) jest taka wartość portfela π w każdej chwili $0 \leq t \leq T$, którą zdefiniowano za pomocą udziałów danych wzorami (4.87) i (4.88). Każda inna cena byłaby arbitrażową w takim sensie, że mogłaby prowadzić do dodatkowych (a więc nieuzasadnionych czyli niesprawiedliwych) zysków.

Na zakończenie tego paragrafu zauważmy jeszcze, iż może się zdarzyć, że (w jakimś przedziale czasu) równość (4.90) jest tautologią, co ma miejsce wtedy gdy portfel (w tym przedziale) nie uległ zmianie, tzn. gdy $\pi_t = \pi_{t-1}$. Wtedy strategia samofinansująca staje się strategią pasywną.

4.4 Opcje jako zasadniczy instrument stymulujący rynek finansowy

4.4.1 Kontrakty terminowe

Można powiedzieć, że kontrakty terminowe i ich "łagodniejsze" odmiany w postaci opcji, stanowią zasadnicze instrumenty pochodne obecne na rynkach, znacznie zmniejszające ryzyko inwestycyjne. Kontrakt terminowy jest instrumentem finansowym zobowiązującym¹⁸ obie zawierające go strony do realizacji w przyszłości transakcji na warunkach określonych w kontrakcie. Wystawiający kontrakt, czyli przyjmujący (otwierający) tzw. pozycję krótką (ang. 'short position'), przyjmuje na siebie zobowiązanie wystawienia do sprzedaży przedmiotu kontraktu w ustalonym terminie (tzw. terminie realizacji) po ustalonej cenie (czyli cenie umownej). Nabywca kontraktu określany jako przyjmujący (otwierający) pozycję długą (ang. 'long position') zobowiązuje się do zapłacenia ceny umownej po dostarczeniu przedmiotu kontraktu.

¹⁸Tutaj tkwi istotna różnica pomiędzy kontraktem terminowym a opcją o czym powiemy szczegółowo w następnym rozdziale.

Podkreślmy, że przedmiot kontraktu odgrywa rolę instrumentu pierwotnego (czyli bazowego).

Bieżąca cena instrumentu bazowego, na który opiewa kontrakt zmienia się w czasie zatem, jego rynkowa cena w terminie realizacji różni się na ogół od ceny umownej. Płatność z racji zawarcia takiego kontraktu jest albo dodatnia albo ujemna: zawsze to co jedna strona zyskuje to druga traci¹⁹. Dwa zasadnicze rodzaje kontraktów to:

1) kontrakty *forward* oraz

2) kontrakty *futures*,

omawiamy je poniżej.

Kontrakty forward

Kontrakt *forward* jest podstawowym typem kontraktu terminowego, który zobowiązuje obie umawiające się strony kontraktu do przeprowadzenia danej transakcji w określonej przyszłości. Transakcja ta jest typu sprzedaż-kupno instrumentu bazowego (podstawowego). Oznacza to, że jedna ze stron dostarcza drugiej w określonym terminie T (zwanym terminem wygaśnięcia kontraktu) przedmiot transakcji po ustalonej cenie K (zwanej ceną dostawy lub rozliczenia). Jak widać, kontrakt *forward* nie dopuszcza żadnych przepływów pieniężnych, towarowych lub innych w chwili $t < T$, czyli przed wygaśnięciem kontraktu. Wycena tego kontraktu polega na wyznaczeniu sprawiedliwej ceny rozliczenia.

Kontrakty futures

Istota i struktura kontraktów *futures* jest taka sama jak kontraktów *forward*, przy czym różnica pomiędzy nimi ma charakter instytucjonalny ze względu na to, że te pierwsze (w przeciwieństwie do tych drugich) zostały dopuszczone do obrotu rynkowego (giełdowego). Ponieważ kontrakty *futures* są przedmiotem obrotu rynkowego zatem, ich aktualna cena jest kształtowana poprzez popyt i podaż, co stanowi zasadniczą różnicę w stosunku do kontraktów *forward*. Ważną konsekwencją dopuszczenia kontraktów *futures* do obrotu giełdowego jest przejęcie przez nią roli pośrednika pomiędzy stronami kontraktu. Do roli tej należy dbanie o to aby każda ze stron wywiązała się ze swoich zobowiązań. W tym celu giełdy wyposażone są w odpowiednie instrumenty ekonomiczne, np. w system depozytów (zabezpieczających oraz podtrzymujących) oraz codziennych rozliczeń (ang. *making to market*). Zauważmy, że najczęściej kontrakty te kończą się (są realizowane) przed upływem terminu ich wygaśnięcia, co jest właśnie konsekwencją dopuszczenia ich do obrotu giełdowego.

¹⁹Sytuacje remisowe czyli zrównania się ceny realnej z ceną umowną są bardzo rzadkie.

4.5 Ciągła w czasie wycena opcji - model Blacka-Scholesa a przewodnictwo cieplne

Z chwilą dopuszczenia do obrotu opcjami (ang. *options*) na rynkach finansowych czyli do obrotu pochodnymi (wtórnymi, ang. *derivatives*) instrumentami finansowymi, które stanowią łagodniejszą formę kontraktów terminowych gdyż dają prawo, ale nie zobowiązują ich posiadacza, do zakupu (ang. *call options*) lub sprzedaży (ang. *put options*) innego tzw. podstawowego (inaczej, pierwotnego czyli bazowego instrumentu finansowego, ang. *underlying instrument*), w szczególności papieru wartościowego, po ustalonej cenie umownej (inaczej, cenie wykonania, ang. *exercise price* lub *striking price*) K w ściśle określonym terminie realizacji czyli wykupu T (ang. *expiration date*, lub *maturity*; opcja europejska ang. *European option*) lub w czasie $0 \leq t \leq T$ (ang. *exercise date*; opcja amerykańska ang. *American option*), pojawiło się kluczowe zagadnienie wyceny opcji zwanej premią (ang. *option premium*) (R.N, Mantegna, H.E. Stanley: *Ekono-fizyka. Wprowadzenie*, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2001; K. Jajuga, T. Jajuga: *Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004; A. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa*, Wydanie drugie, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999).

Zauważmy, iż ma miejsce charakterystyczna asymetria pomiędzy posiadaczem (ang. *holder*) a wystawcą (ang. *writer*) opcji. Wystawca opcji jest zobowiązany do realizacji czynności umownych gdy tylko posiadacz opcji wyrazi chęć jej wykonania. Oczywiście tego typu asymetrii nie ma w przypadku kontraktów terminowych (gdzie przecież obie strony kontraktu podejmują zobowiązanie).

Najczęściej spotyka się opcje na następujące instrumenty bazowe:

- 1) opcje akcyjne (ang. *stock options*), których instrumentem pierwotnym (bazowym) są akcje,
- 2) opcje walutowe (ang. *currency options*), których instrumentem bazowym jest kurs waluty jakiegoś innego kraju,
- 3) opcje procentowe (ang. *interest rate options*), których instrumentem bazowym jest oprocentowane papiery wartościowe np. obligacje, których cena rynkowa oczywiście waha się.

Szczególnym rodzajem opcji akcyjnej jest *warrant* - jest to opcja wystawiana przez daną firmę na akcje lub obligacje tej firmy.

Ponadto, dość popularne są opcje indeksowe różniące się od powyższych, których instrumentem bazowym są różnego rodzaju indeksy giełdowe. Nie występuje tutaj bowiem fizyczna dostawa instrumentu bazowego w momencie realizacji opcji a jedynie wypłata proporcjonalna do różnicy wartości (ceny) indeksu w tym momencie a (ustaloną w chwili otwierania opcji) ceną wykonania. Oczywiście, opcja kupna zostanie zrealizowana tylko wtedy gdy różnica ta jest dodatnia; w przeciwnym razie zrealizowana zostanie opcja sprzedaży.

Uwagi wstępne dotyczące wyceny opcji

Jeżeli zależną od czasu t cenę danego instrumentu finansowego oznaczmy przez $Y(t)$ to cenę opcji można zapisać w postaci $C(Y(t), t)$, umożliwiającą analizę jej dynamiki aż do chwili $t = T$ kiedy opcja traci ważność. W tym zapisie tkwi milczące założenie, które w dalszym ciągu będzie przez nas wykorzystywane, że *obrót instrumentami finansowymi jest ciągły w czasie*. Oczywiście, szczególnie ważne dla uczestników rynków finansowych (czyli inwestorów) jest cena opcji w chwili początkowej gdy inwestor stoi przed odpowiedzią na pytania: *jaką cenę umowną K wynegocjować i ewentualnie na jaką opłatę wstępną się zgodzić*²⁰? Na pytania te jako pierwsi konstruktywnej odpowiedzi udzielili Fisher Black, Myron Scholes i Robert Merton za co dwaj ostatni w roku 1997 otrzymali nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii; Fisher Black zmarł niestety dwa lata wcześniej w związku z tym nie mógł jej otrzymać pomimo, że to właśnie model Blacka-Scholesa stanowi punkt wyjścia nowej dziedziny zwanej niekiedy matematyką finansową, czasem także inżynierią finansową a ostatnio nawet fizyką finansową.

4.5.1 Od błędzenia na drzewie dwumianowym do modelu Blacka-Scholesa

Niniejszy rozdział stanowi ukoronowanie naszych rozważań dotyczących procesów dwumianowych. Pokażemy w nim jak, dzięki wprowadzeniu miary arbitrażowej na drzewie dwumianowym, można uzyskać słynny wzór na wycenę opcji Blacka-Scholesa (BS)²¹. Podejście tego typu zostało po raz pierwszy zaproponowane przez Coxa-Rossa-Rubinsteina (J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, J. Finance Econ. **7** (1979) 229; A.N. Shiryaev: *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Sci., Singapore 1999). Obok wielkiej pogładowości, jego zaletą jest podatność na uogólnienia wychodzące poza tradycyjny model BS (patrz np. A. Jurlewicz, A. Wyłomańska and P. Żebrowski: *Financial Data Analysis by means of Coupled Continuous-Time Random Walk in Rachev-Rüschendorf Model*, Acta Phys. Pol A **114** (2008) 629-635).

Formuła określająca dynamikę stochastyczną bazowego instrumentu finansowego

Nadal przyjmujemy, że bazowy instrument finansowy błądzi przypadkowo na drzewie dwumianowym (patrz np. rys. 4.4 lub 4.9). Przyjmujemy, że (elementarny) wzrost ceny bazowego instrumentu finansowego zachodzi (w pojedynczym kroku czasowym)

²⁰Odpowiedź na drugą część pytania wybiega poza rozważany kanoniczny model Blacka-Scholesa dla rynku idealnego. Pomimo to udzielimy tutaj przybliżonej odpowiedzi będącej wnioskiem z tego modelu.

²¹Niniejsze rozważania są inspirowane w znacznej mierze książką A. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.

z prawdopodobieństwem p zatem, jej zmniejszenie zachodzi z prawdopodobieństwem $1-p$. Niech cena instrumentu bazowego po pierwszym kroku czasowym ($1 \delta t$) wynosi:

$$S_1 = S_0 \exp(\mu \delta t) \cdot \begin{cases} \exp(\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{jeśli cena bazowego instrumentu rośnie} \\ \exp(-\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{jeśli cena tego instrumentu maleje,} \end{cases} \quad (4.94)$$

gdzie dryf μ jest stopą wzrostu (ang. *growth rate*) - proszę nie mylić dryfu z wolną od ryzyka (pozagiełdową) krótkoterminową stopą procentową r ; σ jest miarą zmienności tej ceny (będzie jeszcze o tym mowa poniżej).

Analogicznie, dla drugiego kroku czasowego ($2 \delta t$) możemy zapisać, że

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 \exp(\mu \delta t) \cdot \begin{cases} \exp(\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{jeśli cena bazowego instrumentu rośnie} \\ \exp(-\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{jeśli jego cena maleje,} \end{cases} \\ &= S_0 \exp(2\mu \delta t) \cdot \begin{cases} \exp(2\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{dla wierzchołka 6} \\ 1, & \text{dla wierzchołka 5} \\ \exp(-2\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{dla wierzchołka 4.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Powyższe wzory dają się łatwo uogólnić na przypadek n -tego kroku czasowego ($n = t/\delta t = 1, 2, 3, \dots$, gdzie t jest czasem). Mianowicie,

$$S_{t+\delta t} = S_t \exp(\mu \delta t) \cdot \begin{cases} \exp(\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{jeśli cena bazowego instrumentu rośnie} \\ \exp(-\sigma \sqrt{\delta t}), & \text{jeśli jego cena maleje,} \end{cases} \quad (4.96)$$

a stąd otrzymujemy wyrażenie stanowiące punkt wyjścia naszych dalszych rozważań

$$S_t = S_0 \exp(\mu n \delta t) \cdot \exp(\Delta X_n \sigma \sqrt{\delta t}) = S_0 \exp(\mu t) \cdot \exp\left(\frac{\Delta X_n}{\sqrt{n}} \sigma \sqrt{t}\right), \quad (4.97)$$

gdzie $\Delta X_n \stackrel{\text{def.}}{=} X_n^+ - X_n^-$, tutaj $X_n^\pm$ jest zmienną losową mówiącą o sumarycznym przemieszczeniu bazowego waloru po n krokach czasowych, odpowiednio w kierunku jego wzrostu (+) oraz zmniejszenia (-). Oczywiście, $X_n^+ + X_n^- = n$, stąd $\Delta X_n = 2 X_n^+ - n$.

Ze wzoru (4.96) wynika natychmiast, że wartość oczekiwana logarytmicznej stopy zwrotu wynosi:

$$\left\langle \ln \left(\frac{S_{t+\delta t}}{S_t} \right) \right\rangle = \mu \delta t + (2p - 1) \sigma \sqrt{\delta t} \quad (4.98)$$

natomiast,

$$\left\langle \ln^2 \left(\frac{S_{t+\delta t}}{S_t} \right) \right\rangle - \left\langle \ln \left(\frac{S_{t+\delta t}}{S_t} \right) \right\rangle^2 = 4p(1-p) \sigma^2 \delta t \quad (4.99)$$

jest jej wariancją. W dalszym ciągu będziemy się starali wyrazić logarytmiczną stopę zwrotu z instrumentu bazowego za pomocą wygodniejszej, standaryzowanej zmiennej losowej.

Jak wynika ze wzoru (4.96) na chwilową wartość instrumentu bazowego $S_{t+\delta t}$, składowa losowa logarytmicznej stopy zwrotu podlega rozkładowi dychotomicznemu (dwupunktowemu) postaci:

$$\rho(x) = p \delta(x - \sigma \sqrt{\delta t}) + (1 - p) \delta(x + \sigma \sqrt{\delta t}) \quad (4.100)$$

a co za tym idzie zmienna losowa X_n^+ podlega rozkładowi dwumianowemu:

$$\mathcal{P}_n(X_n^+) = \frac{n!}{X_n^+! X_n^-!} p^{X_n^+} (1 - p)^{X_n^-} \quad (4.101)$$

co oznacza, że wartość oczekiwana i wariancja zmiennej X_n^+ wynoszą, odpowiednio

$$\begin{aligned} \langle X_n^+ \rangle &= n p, \\ \sigma_{X_n^+}^2 &= n p (1 - p). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Stąd natychmiast wynika, że zmienna losowa $Y_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Delta X_n}{\sqrt{n}}$ posiada wartość oczekiwaną równą $\langle Y_n \rangle = \sqrt{n} (2p - 1)$ i wariancję równą $\sigma_Y^2 = 4p(1 - p)$. Pozwala to na zapisanie chwilowej wartości bazowego instrumentu finansowego w postaci

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \sigma \sqrt{t} \langle Y_n \rangle + \sigma_Y \sigma \sqrt{t} Z_n \right), \quad (4.103)$$

gdzie zmienna losowa $Z_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Y_n - \langle Y_n \rangle}{\sigma_Y}$ jest już standaryzowana, tzn. posiada wartość oczekiwaną równą 0 i wariancję równą 1, dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Na mocy Centralnego Twierdzenia Granicznego (patrz Część II) zmienna Z_n dąży do podlegania rozkładowi normalnemu $N(0, 1)$, gdy $n \rightarrow \infty$ albo równoważnie, gdy $\delta t \rightarrow 0$. Czyli, zmienna losowa postaci $\ln(S_t/S_0)$ posiada rozkład normalny $N(\mu t + \sigma \sqrt{t} \langle Y_n \rangle, \sigma_Y^2 \sigma^2 t)$. Jest on niestety niewygodny w operowaniu (nawet dla symetrycznego błędzenia instrumentu bazowego na drzewie dwumianowym, tzn. dla $p = 1/2$), gdyż wartość oczekiwana zmiennej losowej $\ln(S_t/S_0)$ względem tego rozkładu nie znika. Oznacza to, że ta zmienna losowa nie jest wycentrowana. Dlatego, zamiast operować wyjściową miarą $\mathcal{P}$ **przejdziemy do znacznie wygodniejszej miary, czyli miary arbitrażowej $\mathcal{Q}$. Stanowi to kluczowy krok techniczny niniejszego podejścia pozwalający na skorzystanie z ogólnej formuły wyceny pochodnego instrumentu finansowego (4.25)** - dla miary $\mathcal{P}$ tego typu ogólna formuła nie jest znana. Przy okazji zaznaczymy, że przejście od wzoru (4.97) do (4.103) także związane było ze zmianą miary z dwumianowej na gaussowską, gdyż $n \rightarrow \infty$.

4.5.2 Arbitrażowe drzewo dwumianowe i wycena opcji

Korzystając ze wzoru (4.96), łączącego wartości bazowego instrumentu finansowego w kolejnych chwilach, można wyrażenie (4.20), definiujące elementarne prawdopodobieństwo arbitrażowe przemieszczenia tego instrumentu w górę na drzewie

dwumianowym, przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} q &\stackrel{\text{ozn.}}{=} q_{t,t+\delta t}^{l,l+1} = \frac{\exp((r-\mu)\delta t) - \exp(-\sigma\sqrt{\delta t})}{\exp(\sigma\sqrt{\delta t}) - \exp(-\sigma\sqrt{\delta t})} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\delta t} \frac{\mu - r + \sigma^2/2}{\sigma} \right), \\ 1 - q &= q_{t,t+\delta t}^{l,l-1} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\delta t} \frac{\mu - r + \sigma^2/2}{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (4.104)$$

przy czym obie (przybliżone) równości zachodzą dla przypadku $\delta t \rightarrow 0$. Aby je otrzymać wystarczyło uwzględnić: 1) trzy pierwsze wyrazy w obu funkcjach wykładniczych w mianowniku i w drugiej funkcji w liczniku oraz 2) dwa pierwsze wyrazy w pierwszej funkcji wykładniczej w liczniku²². Wtedy obliczenia prowadzone są z dokładnością rzędu $\sqrt{\delta t}$, jak to jest wymagane.

Zauważmy, że niezależnie od stosowanej miary $\mathcal{P}$ na drzewie dwumianowym, ciąg $\{X_n^+, n = 1, 2, 3, \dots\}$ jest nadal opisany rozkładem dwumianowym ale teraz o parametrach (wartości oczekiwanej i wariancji) wyrażonych już za pomocą arbitrażowej miary $\mathcal{Q}$. Mianowicie, wartość oczekiwana i wariancja dane są wzorami analogicznymi do (4.102)

$$\begin{aligned} \langle X_n^+ \rangle &= n q, \\ \sigma_{X^+}^2 &= n q (1 - q). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Podobnie rzecz się ma ze zmienną Z_n , przy czym teraz

$$\begin{aligned} \langle Y_n \rangle &= \sqrt{n} (2q - 1) \approx -\sqrt{t} \frac{\mu - r + \sigma^2/2}{\sigma}, \\ \sigma_Y^2 &= 4 q (1 - q) \approx 1 - \delta t \left(\frac{\mu - r + \sigma^2/2}{\sigma} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.106)$$

i $\langle Y_n \rangle$ nie zależy jawnie od n (o co m.in. chodziło). Jak widać, dla $\delta t \rightarrow 0$ wariancja $\sigma_Y^2 \rightarrow 1$. Stąd oraz za mocy CTG łatwo obliczyć, że wyrażenie (4.103) na chwilową wartość bazowego instrumentu finansowego S_t przybiera w mierze arbitrażowej $\mathcal{Q}$ szczególnie dogodną do dalszych obliczeń postać:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z \right) \quad (4.107)$$

gdzie standaryzowana zmienna losowa Z podlega rozkładowi normalnemu $N(0, 1)$. Mówiąc o szczególnie prostej postaci S_t mamy na myśli fakt, że (dzięki mierze arbitrażowej danej wyrażeniami (4.104)) dryf we wzorze (4.107) już nie występuje. Innymi słowy, **graniczny (gdyż rozpatrywany w granicy dużych n) rozkład zmiennej losowej $\ln(S_t/S_0)$ względem miary arbitrażowej $\mathcal{Q}$ jest niezależny od stopy wzrostu μ** . Upraszcza to znacząco np. symulacje komputerową, gdyż nie

²²Rozwinięcie pierwszej funkcji wykładniczej w liczniku do trzeciego wyrazu prowadziłoby do konieczności uwzględnienia zbyt dużego rzędu obliczeń, mianowicie $(\sqrt{\delta t})^3$.

jest już konieczne uwzględnianie dryfu. Stanowi także dogodny punkt wyjścia dla różnorodnych rozważań dotyczących zarówno dynamiki instrumentu bazowego jak też określonego na nim instrumentu pochodnego.

Zauważmy, że przejście od miary podstawowej $\mathcal{P}$ do arbitrażowej $\mathcal{Q}$ było możliwe zarówno dzięki interpretacji zmiennych losowych X_n^+ i X_n^- jako liczby kroków, które nie ulegają przecież zmianie przy takiej transformacji, jak też dzięki temu, że rozważania w rozdz. 4.5.1 nie zależały od konkretnej postaci miary $\mathcal{P}$. To wygodne przejście jest przykładem funkcjonowania ogólnego twierdzenia Grisanowa dotyczącego istnienia miar równoważnych (patrz na przykład, A. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999). W naszym przypadku właśnie $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ to przykład miar równoważnych²³.

Teraz jesteśmy już przygotowani na dokonanie wyceny, na przykład, europejskiej opcji kupna.

4.5.3 Wycena europejskiej opcji kupna

Przypuśćmy, że $C(t)$ jest ceną europejskiej opcji kupna o terminie wygaśnięcia (zapadalności) T oraz cenie wykonania K i funkcji wypłaty $C(T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$. Wówczas jej wartość (cena) w chwili początkowej, zgodnie z wcześniejszą wyprowadzoną formułą wyceny (4.25) w mierze arbitrażowej dowolnego instrumentu pochodnego, wynosi:

$$\begin{aligned} C(t=0) &= E^Q [\exp(-rT)C(T)] \\ &= E^Q \left\{ \left[S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{T} Z - \sigma^2 T/2 \right) - K \exp(-rT) \right]^+ \right\}, \end{aligned} \quad (4.108)$$

gdzie wykorzystaliśmy wyrażenie (4.107) kładąc $t = T$.

Naszym celem jest wyprowadzenie z powyższego wyrażenia kluczowej formuły Blacka-Scholesa.

Wyprowadzenie formuły wyceny opcji Blacka-Scholesa

Należy obliczyć wartość oczekiwaną daną drugą równością w (4.108) - wartość tą można wyrazić za pomocą następującej całki:

$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_T \geq K} \left[S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{T} Z - \sigma^2 T/2 \right) - K \exp(-rT) \right] \exp(-Z^2/2) dZ, \quad (4.109)$$

²³Dwie miary określone na tym samym zbiorze zdarzeń elementarnych są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy nieznikające prawdopodobieństwo wystąpienia jakiegokolwiek zdarzenia w pierwszej mierze implikuje nieznikające prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia w drugiej mierze i odwrotnie.

gdzie warunek $S_T \geq K$ jest równoważny nierówności $-Z \leq d_-$, przy czym $d_- \stackrel{\text{def.}}{=} [\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T] / \sigma\sqrt{T}$. Wprowadzając prostą zamianę zmiennej $Z' = -Z$, można wyrażenie (4.109) sprowadzić do postaci:

$$\begin{aligned}
C(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} [S_0 \exp(-\sigma\sqrt{T}Z' - \sigma^2 T/2) - K \exp(-rT)] \exp(-Z'^2/2) dZ' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} S_0 \exp\left(-\left(Z' + \sigma\sqrt{T}\right)^2/2\right) dZ' \\
&\quad - \frac{K \exp(-rT)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} \exp(-Z'^2/2) dZ' \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_+} \exp(-Z''^2/2) dZ'' - K \exp(-rT) \Phi(d_-) \\
&= S_0 \Phi(d_+) - K \exp(-rT) \Phi(d_-),
\end{aligned} \tag{4.110}$$

gdzie tożsamość $-\sigma\sqrt{T}Z' - \sigma^2 T/2 - Z'^2/2 = -\left(Z' + \sigma\sqrt{T}\right)^2/2$ została wykorzystana w całce stojącej w drugim wierszu, natomiast w pierwszej całce w wierszu czwartym dokonano kolejnej zamiany zmiennej: $Z'' \stackrel{\text{def.}}{=} Z' + \sigma\sqrt{T}$ ponadto, wprowadzono definicję $d_+ \stackrel{\text{def.}}{=} [\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T] / \sigma\sqrt{T}$ oraz przez $\Phi(d_{\pm})$ oznaczono dystrybuantę standaryzowanego rozkładu Gaussa $N(0, 1)$ zależną od argumentu $d_{\pm}$. Jest to słynna formuła wyceny opcji Blacka-Scholesa, czyli formuła określająca jej cenę w chwili początkowej $t = 0$. **Teraz naszym celem jest uogólnienie tej formuły na dowolną chwilę $0 \leq t \leq T$.**

Uogólnienie formuły Blacka-Scholesa

Wyprowadzenie uogólnionej formuły BS bazuje na ogólniejszej postaci wzoru (4.107):

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right), \tag{4.111}$$

gdzie $B_t (= \sqrt{t}Z)$ jest ruchem Browna²⁴ (procesem Wienera), będącego rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego:

$$d \ln(S_t/S_0) = \sigma dB_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt, \tag{4.112}$$

gdzie pierwszy składnik opisuje losowość procesu a drugi jego dryf; tutaj dB_t jest tzw. różniczką stochastyczną (posiadającą inne własności niż zwykła różniczka zupełna²⁵).

²⁴Zmienna losowa B_t podlega (warunkowemu) rozkładowi normalnemu $N(0, t)$.

²⁵Równanie (4.112) wprowadza nas w świat stochastycznych równań różniczkowych - dziedziny matematyki o ogromnym znaczeniu dla zastosowań, m.in. właśnie w analizie finansowej (patrz na przykład, A. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999).

Wyprowadzenie uogólnionej formuły BS ma charakter dwuetapowy: pierwszy etap dotyczy dynamiki instrumentu bazowego a drugi wartości oczekiwanej.

W pierwszym etapie zauważmy, że wzór (4.111) można zapisać w równoważnej, niezwykle przydatnej postaci:

$$S_{t'} = S_t \exp \left(\sigma(B_{t'} - B_t) + (r - \sigma^2/2)(t' - t) \right), \quad 0 \leq t \leq t' \leq T, \quad (4.113)$$

gdzie dla prostoty (nie zmieniającej istoty rzeczy) przyjmujemy, że wyjściowo ruch Browna $B(t = 0) = 0$. Aby się przekonać o prawdziwości powyższego wyrażenia, wystarczy podstawić zamiast S_t wzór (4.111). W dalszym ciągu:

- 1) wzór (4.113) będziemy warunkować, przyjmując brownowską zmienną losową B_t jako ustaloną.
- 2) Co więcej, **wykorzystamy stacjonarność przyrostów ruchu Browna** wynikającą z faktu, że ruch ten ma miejsce w stanie równowagi prowadzącej (jak wiadomo) do jednorodności czasu, tzn. do sytuacji w której zachodzi następująca równość:

$$B_{t'} - B_t = B_{t'-t}. \quad (4.114)$$

Czyli przyrosty ruchu Browna, $B_{t'} - B_t$, podlegają, przy ustalonym B_t , uwarunkowanemu rozkładowi normalnemu $N(0, t' - t)$.

Drugi etap jest bardziej złożony, gdyż wykorzystuje wzory (4.108), (4.113) i (4.114).

Zgodnie z warunkiem (4.114), możemy chwilę t potraktować jako początkową. Pozwala to na bezpośrednie wykorzystanie wzoru (4.108), co daje

$$\begin{aligned} C(t) &= \exp(-r(T-t)) \times \\ &\times E^Q \left\{ \left[S_t \exp \left(\sigma B_{T-t} + (r - \sigma^2/2)(T-t) \right) - K \right]^+ \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_T \geq K} \left[S_t \exp \left(\sigma \sqrt{T-t} Z - (T-t) \sigma^2/2 \right) - K \exp(-r(T-t)) \right] \\ &\times \exp(-Z^2/2) dZ, \end{aligned} \quad (4.115)$$

gdzie przyjęliśmy chwilę t jako początek liczenia czasu oraz położyliśmy $t' = T$; tak jak dla wyceny opcji, zmienna Z jest standaryzowaną zmienną gaussowską (czyli podlegającą rozkładowi normalnemu $N(0, 1)$). Jak widać, ostatnie wyrażenie w (4.115) jest identyczne z (4.109), jeżeli T w tym ostatnim zastąpimy przez $T-t$, S_0 przez S_t a $C(0)$ przez $C(t)$ (proszę pamiętać, że B_t a więc i S_t są ustalone). Zatem, przeprowadzając rachunek identyczny jak w (4.110) otrzymujemy:

$$C(t) = S_t \Phi(d_+) - K \exp(-r(T-t)) \Phi(d_-), \quad (4.116)$$

co stanowi poszukiwaną, uogólnioną formułę BS; tutaj

$$d_{\pm} \stackrel{\text{def.}}{=} \left[\ln(S_t/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t) \right] / \sigma \sqrt{T-t}, \quad (4.117)$$

stanowi uogólnienie wcześniej użytych analogicznych wyrażeń (patrz opis wzorów (4.109) i (4.110)) o takich samych oznaczeniach.

Zauważmy, że jedną z najważniejszych konsekwencji wzoru (4.115) dotyczącego wyceny opcji europejskiej w dowolnej, pośredniej chwili $0 \leq t \leq T$, jest możliwość zapisania go w następującej postaci

$$\Lambda_t^{-1} C(t) = E^Q \left(\Lambda_T^{-1} (S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.118)$$

gdzie oczywiście $\Lambda_T^{-1} C(T) = \Lambda_T^{-1} (S_T - K)^+$. Wynika to bezpośrednio ze stacjonarności ruchu Browna i pokazuje, że **miara arbitrażowa $\mathcal{Q}$ jest jednocześnie miarą martyngałową dla opcji europejskiej.**

Uogólniona formuła BS (4.116) pozwala łatwo wyznaczyć liczbę udziałów na akcje w portfelu dwuwalorowym dla omawianych przez nas w podrozdz. 4.2 i 4.3 trzech²⁶ kanonicznych strategii inwestycyjnych:

$$\phi_t = \frac{\partial C(t)}{\partial S_t} = \Phi(d_+), \quad (4.119)$$

gdzie pochodna cząstkowa jest tutaj pochodną "przestrzenną"²⁷. Powyższe wyrażenie jest kontynuacją w przestrzeni postacią pierwszego wyrażenia we wzorze (4.18) nadającą dodatkowy sens dystrybucie $\Phi(d_+)$.

Przykładowo obliczymy teraz liczbę udziałów na obligacje, ψ_t , dla portfela dwuwalorowego inwestującego według strategii arbitrażowej. Zgodnie z definicją tej strategii (patrz podrozdz. 4.2.3 wzór (4.17)) oraz korzystając ze wzoru (4.116),

$$\psi_t = \Lambda_t^{-1} [C(t) - \phi_t S_t] = -K \exp(-rT) \Phi(d_-), \quad (4.120)$$

co analogicznie jak poprzednio, nadaje głębszy sens dystrybucie $\Phi(d_-)$. Wykorzystaliśmy tutaj fakt, że chwilowa cena opcji to nic innego jak chwilowa wartość portfela w ramach strategii arbitrażowej (patrz podrozdz. 4.2.2 i 4.2.3), czego należało się spodziewać, gdyż jak widać mamy tutaj do czynienia z portfelem replikującym.

Parytet kupno-sprzedaż

Aby wyznaczyć cenę opcji sprzedaży (ang. *put option*), czyli instrumentu finansowego dającego prawo jego posiadaczowi sprzedaży akcji po cenie umownej K wtedy gdy

²⁶Udziały na akcje są we wszystkich tych strategiach identyczne i dane pierwszym wyrażeniem we wzorze (4.18) - udziały na obligacje są do nich odpowiednio dopasowywane.

²⁷Ścisłej rzecz biorąc, opcja $C(t)$ powinna być zapisana w postaci $C(S_t, t)$, gdyż jest określona na bazowym instrumencie S_t . Tego typu bardziej złożoną notację wprowadzamy w następnych rozdziałach.

jej cena jest nie większa od tej ceny umownej²⁸ wygodnie jest skorzystać z *parytetu kupno-sprzedaż* (ang. *call-put parity*).

Parytet ten można prosto objaśnić budując portfel trójwalorowy składający się z:

- instrumentu bazowego S_t ,
- opcji sprzedaży $P(t)$ oraz
- sprzedanej opcji kupna $C(t)$ (obie opcje o tej samej cenie umownej K i wspólnym terminie wygaśnięcia T).

Można łatwo sprawdzić, że niezależnie od ceny bazowego instrumentu w chwili T wartość portfela w chwili realizacji kontraktów równa jest cenie umownej K . Stąd (zdyskontowana), wartość portfela w chwili t wynosi $K \exp(-r(T-t))$; a zatem

$$S_t + P(t) - C(t) = K \exp(-r(T-t)), \quad (4.121)$$

co stanowi właśnie poszukiwany parytet kupno-sprzedaż.

Korzystając ze wzoru (4.121) otrzymujemy, wzór Blacka-Scholesa na cenę opcji sprzedaży:

$$\begin{aligned} P(t) &= C(t) - S_t + K \exp(-r(T-t)) \\ &= -S(t) (1 - \Phi(d_+)) + K \exp(-r(T-t)) (1 - \Phi(d_-)) \\ &= -S(t)\Phi(-d_+) + K \exp(-r(T-t))\Phi(-d_-), \end{aligned} \quad (4.122)$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z warunku normalizacyjnego rozkładu Gaussa $\Phi(-d_{\pm}) = 1 - \Phi(d_{\pm})$ oraz jego parzystości.

Ogólnie, można powiedzieć, że formuły Blacka-Scholesa (a także Mertona uwzględniająca dywidendę) racjonalizują decyzje inwestycyjne na giełdzie.

4.5.4 Od dynamiki stochastycznej do formuły Blacka-Scholesa

Proces stochastyczny Itô

Wyjściowym elementem modelu Blacka-Scholesa (BS) jest założenie mówiące, że cena papieru wartościowego podlega procesowi stochastycznemu Itô czyli spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dY(t) = a(Y(t), t)dt + b(Y(t), t)dW, \quad (4.123)$$

²⁸Można to zapisać w następujący sposób: cena opcji sprzedaży $P(t) = (S_T - K)^- \stackrel{\text{def.}}{=} \min(S_t - K, 0) = (K - S_T)^+$.

gdzie $a(Y(t), t)$ i $b(Y(t), t)$ są współczynnikami równania zapisanymi w najogólniejszej postaci natomiast dW jest procesem stochastycznym Wienera tzn. zmienna dW podlega rozkładowi Gaussa

$$G(dW) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} \exp\left(-\frac{(dW)^2}{2\sigma^2 dt}\right); \quad (4.124)$$

często proces Itô nazywa się także procesem Wienera z dryfem lub procesem ruchu Browna. Korzystając z (4.124) można łatwo sprawdzić, że dla tego procesu

$$\langle (dW)^2 \rangle = \sigma^2 dt, \quad (4.125)$$

gdzie dyspersja σ procesu stochastycznego opisującego dynamikę waloru Y nosi także nazwę zmienności (ang. *volatility*). Relacja (4.125) oznacza, że bez szkody dla jego dynamiki można przyjąć, iż typowa zależność zmiennej dW od czasu jest pierwiastkowa czyli z dobrym przybliżeniem

$$dW = \pm\sigma\sqrt{dt}. \quad (4.126)$$

Alternatywnym punktem widzenia (eksploatowanym²⁹ w rozdz. 4.5.3) jest przyjęcie, że zmienna dW (a dokładniej rzecz biorąc jej znak) jest szumem dychotomicznym, czyli przyjmującym wartość $+$ albo $-$ z prawdopodobieństwem $1/2$. Zależność (4.126) umożliwia wyprowadzenie wyjściowego równania modelu BS na infinitezymalną zmianę ceny opcji³⁰.

4.5.5 Dynamika infinitezymalnej zmiany ceny opcji

Możemy teraz wyprowadzić wzór na różniczkę zupełną ceny opcji wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora ceny opcji $C(Y(t) + dY(t), t + dt)$,

$$\begin{aligned} dC(Y(t), t) &= C(Y(t) + dY(t), t + dt) - C(Y(t), t) \\ &\approx \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial t} dt + \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)} dY(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial (Y(t))^2} (dY(t))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial Y(t) \partial t} dY(t) dt \\ &\approx \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial t} dt + \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)} dY(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 [b(Y(t), t)]^2 \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial (Y(t))^2} dt, \end{aligned} \quad (4.127)$$

²⁹W rozdz. 4.5.3 używaliśmy zmiennej losowej dB_t , którą należy porównywać z przeskalowaną zmienną losową dW/σ . Inne podobieństwa obu równań dynamiki stochastycznej (4.123) i (4.112) zostaną wskazane w rozdz. 4.5.6.

³⁰Zależność (4.126) stanowi zasadnicze (mocne) założenie przedstawionego poniżej w rozdz. 4.5.5 lematu Itô.

gdzie przy uzyskaniu ostatniej równości ograniczyliśmy się jedynie do wyrazów liniowych³¹ w dt korzystając z równań (4.123) i (4.126); ta ostatnia równość jest właśnie treścią lematu Itô. Równanie (4.127) stanowi wyjściowy etap, konieczny do przeprowadzenia *analizy portfela pozbawionego ryzyka*; dzięki tej analizie m.in. pozbedziemy się wyrazu proporcjonalnego do $dY(t)$ wnoszącego ryzyko (ze względu na możliwość zmiany znaku).

4.5.6 Portfel pozbawiony ryzyka - równanie Blacka-Scholesa

Rozważmy zatem portfel $\Phi(Y(t), t)$ (a dokładniej wartość portfela w przeliczeniu na jedną opcję) zawierający pewną liczbę (czyli udział) h papierów wartościowych $Y(t)$ i opcję $C(Y(t), t)$ na ten papier

$$\begin{aligned}\Phi(Y(t), t) &= -h(Y(t), t)Y(t) + C(Y(t), t) \Rightarrow \\ \Rightarrow d'\Phi(Y(t), t) &= -h(Y(t), t)dY(t) + dC(Y(t), t),\end{aligned}\quad (4.128)$$

przy czym powyższa sekwencja znaków oznacza popularny sposób obrotu walorami polegający po prostu na pożyczaniu (lewarowaniu) walorów bazowych przez inwestora (wtedy $h > 0$) i zwrocie ich w dogodnym terminie³² $t > T$. Nie jest to jedyny sposób konstrukcji portfela. Równie dobrze inwestor mógłby zakupić h udziałów instrumentu bazowego a zaciągnąć kredyt na zakup opcji; wówczas w równaniu (4.128) mielibyśmy do czynienia z odwrotnymi znakami.

Oznaczenie d' (występujące w drugiej równości (4.128)) wyraża zmianę wartości portfela w przedziale czasu dt przy ustalonej liczbie udziałów, czyli nie jest różniczką zupełną. Jest to sposób traktowania udziałów analogiczny do tego jaki ma miejsce w modelu dwumianowym (patrz poniżej rys. 4.12 oraz rozdz. 4.2 rys. 4.3).

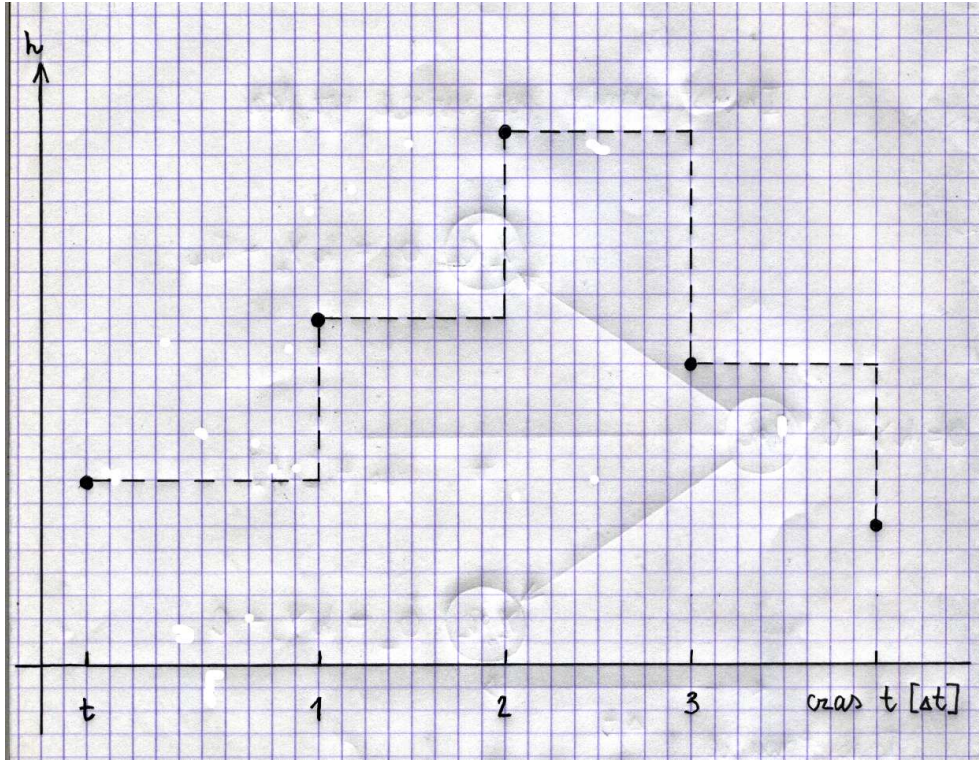
Konstrukcja portfela dana pierwszym równaniem w (4.128) oznacza, że nie ponosimy żadnych kosztów transakcyjnych (a w tym opłaty wstępnej obciążającej portfel) oraz nie uzyskujemy żadnych dywidend (zwiększających wartość portfela) przed upływem terminu ważności opcji.

Łącząc równania (4.127) i (4.128) otrzymujemy równanie na zmianę wartości portfela

$$\begin{aligned}d'\Phi(Y(t), t) &= \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial t}dt + \left[\frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)} - h(Y(t), t) \right] dY(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2[b(Y(t), t)]^2 \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial (Y(t))^2} dt.\end{aligned}\quad (4.129)$$

³¹Do wyeliminowania składnika proporcjonalnego do dY wystarczyłoby założenie o monotonicznej zależności $|dW|$ od dt .

³²Inwestor może także zastosować np. krótką sprzedaż (ang. *short sale*), która polega na pożyczaniu określonej puli h instrumentów pierwotnych, a następnie ich sprzedaży w dogodnej sytuacji rynkowej (np. właśnie w chwili realizacji opcji) i ponownym ich zakupie w tej samej wyjściowej liczbie w jakiejś chwili $t > T$, gdy stracą na wartości. Ostatecznie, inwestor zwraca pełną pulę zarabiając na niej dodatkowo. Oczywiście, tego typu aktywność nie jest już opisywana modelem BS.



Rysunek 4.12: Zależność udziału h od czasu t analogiczna do tej jaka ma miejsce w modelu dwumianowym (patrz rozdz. 4.2) Przerywana linia pokazuje schematycznie schodkową trajektorię dynamiki udziału. Czarne punkty oznaczają wartości h dane równaniem (4.130).

Zauważmy, że **portfel pozbawiony ryzyka oznacza znikanie losowej przyczyny (składowej) powodującej losowe zmniejszenie wartości portfela** (znikanie losowej niepewności). Można to zagwarantować przyjmując, że w powyższym równaniu składnik proporcjonalny do $dY(t)$ znika. Wynika stąd, że udział waloru bazowego w portfelu wyraża się wzorem analogicznym do (4.119) (podanym w rozdz. 4.5.3),

$$h(Y(t), t) = \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)}; \quad (4.130)$$

$h(Y(t), t)$ jest także nazywany współczynnikiem zabezpieczenia portfela pozbawionego ryzyka (ang. *riskless hedge ratio*, zwany również współczynnikiem delta, δ), mogącym przyjmować zarówno wartości dodatnie (dla posiadacza opcji kupna) jak i ujemne (dla wystawcy opcji kupna) o czym powiemy dokładniej w dalszej części. Stąd równania (4.128) oraz (4.129) przyjmują postacie:

$$d'\Phi(Y(t), t) = \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 [b(Y(t), t)]^2 \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial (Y(t))^2} dt. \quad (4.131)$$

oraz

$$\begin{aligned}\Phi(Y(t), t) &= -\frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)}Y(t) + C(Y(t), t) \Rightarrow \\ \Rightarrow d'\Phi(Y(t), t) &= -\frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)}dY(t) + dC(Y(t), t).\end{aligned}\quad (4.132)$$

Podkreślamy, że zależność ceny waloru $Y(t)$ oraz ceny opcji $C(Y(t), t)$ od czasu oznacza, że model BS dopuszcza obrót walorem $Y(t)$ w sposób ciągły przez uczestników rynku finansowego.

W dalszym ciągu przyjmujemy wzmacniające założenie, że wolna od ryzyka krótkoterminowa stopa procentowa lub inaczej mówiąc stopa zwrotu z portfela pozbawionego ryzyka na jednostkę czasu r (np. miesięczna stopa zwrotu) jest stała³³

$$\frac{1}{dt} \frac{d'\Phi(Y(t), t)}{\Phi(Y(t), t)} = r. \quad (4.133)$$

Wynika to z faktu, że w modelu BS nie istnieje arbitraż a więc nie ma możliwości na uzyskiwanie dochodów pozbawionych ryzyka innych niż tylko takie jakie uzyskuje się na pozagiełdowych instrumentach finansowych pozbawionych ryzyka³⁴ np. na różnego rodzaju lokatach bankowych (tutaj o stałym oprocentowaniu) lub gwarantowanych papierach dłużnych (np. obligacjach).

Podstawiając przyrost wartości portfela $d'\Phi(Y(t), t)$ wyznaczony z powyższego równania do równania (4.131) otrzymujemy poszukiwane równanie na ewolucję ceny opcji w postaci

$$rC(Y(t), t) = \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial t} + rY(t) \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2[b(Y(t), t)]^2 \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial (Y(t))^2}. \quad (4.134)$$

Jak widać, w równaniu tym brak jest wyrazów zawierających współczynnik $a(Y(t), t)$ co jest bezpośrednim wnioskiem z założenia o braku ryzyka (patrz równanie (4.129)).

W modelu BS zakłada się, że dynamikę instrumentu bazowego (papieru wartościowego) opisuje proces stochastyczny zwany geometrycznym (lub logarytmicznym) ruchem Browna tzn. przyjmuje się, że³⁵

$$\begin{aligned}a(Y(t), t) &= \mu Y(t), \\ b(Y(t), t) &= Y(t),\end{aligned}\quad (4.135)$$

³³W przypadku, gdy od akcji wypłacana jest dywidenda d stopa zwrotu powinna być o nią pomniejszona, bowiem w przeciwnym razie pojawiła by się okazja do arbitrażu; innymi słowy, w równaniu (4.133) i odpowiednio dalej zamiast r należy wtedy podstawić $r' = r - d$.

³⁴Oczywiście, można sprawdzić co by było gdyby prawa strona równania (4.133) była większa od r . Jednak, takiego zwiększonego zysku nie da się na "dłuższą metę" zagwarantować.

³⁵Przyjmując, że parametr $\mu = r - \sigma^2/2$, zmienne losowe $Y(t) \equiv S_t$ oraz $dW \equiv \sigma dB_t$ a współczynniki a, b czynią zadość warunkom (4.135) uzyskujemy równoważność równań dynamiki stochastycznej (4.112) i (4.123).

gdzie niezależny od czasu parametr μ jest zyskiem z tego waloru na jednostkę czasu czyli tzw. stopą wzrostu (ang. *growth rate*) nazywaną także dryfem (ang. *drift*) procesu stochastycznego ceny walory $Y(t)$. Podstawiając drugie równanie (4.135) do (4.134) otrzymujemy ostatecznie poszukiwane liniowe (przybliżone) równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach na wycenę opcji Blacka-Scholesa na rynku idealnym czyli pozbawionym możliwości arbitrażu i efektywnym (tzn. takim gdzie wszyscy uczestnicy mają jednakowy dostęp do informacji) a ponadto, nieopodatkowanym, pozbawionym dywidend i kosztów transakcyjnych:

$$rC(Y(t), t) = \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial t} + rY(t) \frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 [Y(t)]^2 \frac{\partial^2 C(Y(t), t)}{\partial (Y(t))^2}, \quad (4.136)$$

przy czym (na mocy (4.123) i (4.135)) **powyższe równanie dopuszcza jedynie rozwiązanie dla $Y(t) > 0$.**

Naszym celem jest znalezienie rozwiązań tego równania dla różnych warunków brzegowych w każdej chwili czasu $t \leq T$. Oczywiście, rozwiązanie typu *at-the-money*, czyli tożsamościowo równe zeru, jest trywialnym rozwiązaniem równania BS.

Zauważmy, że powyższe równanie posiada symetrię z której wynika, że jeżeli funkcja $C(Y(t), t)$ jest rozwiązaniem równania (4.136) to także funkcja "stowarzyszona" $-C(Y(t), t)$ jest jego rozwiązaniem. Na przykład, jeżeli $C(Y(t), t)$ jest ceną opcji (potencjalnym dochodem) posiadacza opcji kupna, to przy odpowiednich warunkach brzegowych $-C(Y(t), t)$ jest ceną opcji (stratą) dla wystawcy opcji kupna. Rozwiązania te, a także dotyczące opcji sprzedaży, omawiamy w dalszej części.

Rozwiązanie równania BS umożliwia badanie dynamiki cen np.:

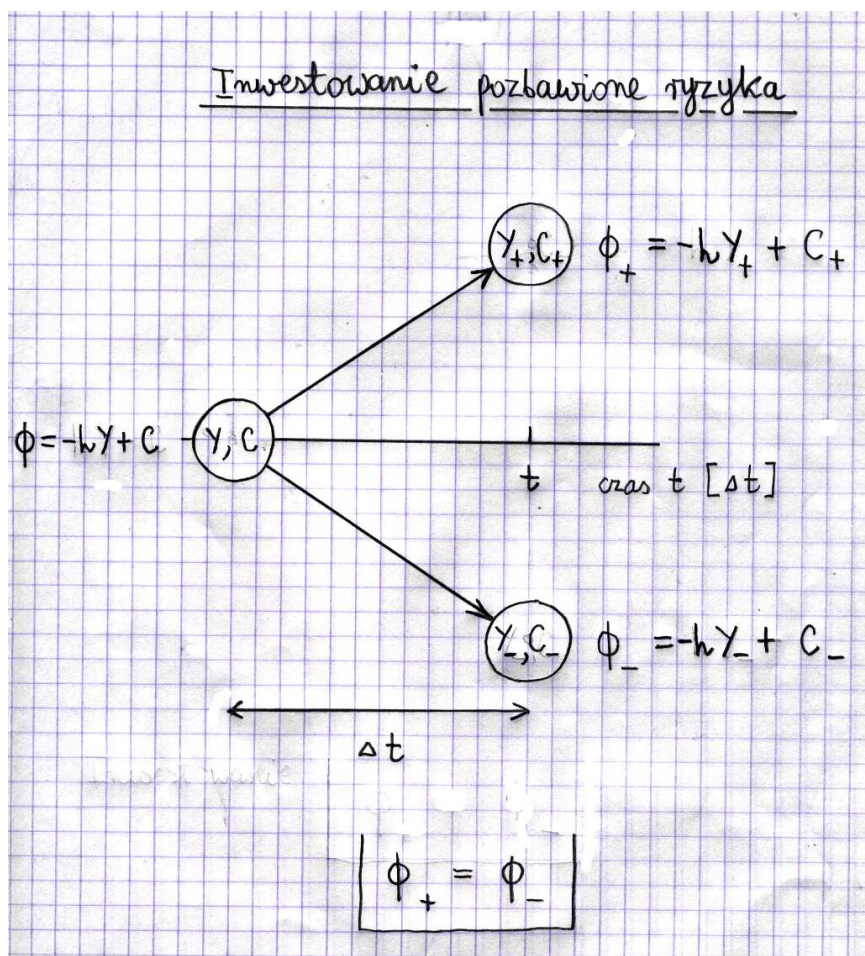
- różnych kontraktów terminowych - oprócz opcji europejskich także amerykańskie, a w tym zarówno typu kupna jak i sprzedaży (odpowiednio dla posiadacza i wystawcy opcji); ponadto,
- rozwiązanie to stanowi podstawę bardziej złożonych formuł opisujących opcje, których wycena jest zależna od ich historii takie jak np. opcje barierowe (są to szczególnie popularne opcje egzotyczne) zależne od wielkości bariery, jaką na swojej drodze napotyka błądzący instrument bazowy.

Innymi słowy, interesującym jest nie tylko posiadanie formuł określających cenę pochodnego instrumentu finansowego w dwóch charakterystycznych chwilach: $C(Y(t=0), t=0)$ oraz $C(Y(t=T), t=T)$, ale także znajomość jego ceny w chwilach pośrednich, tzn. interesującym dla inwestora jest znajomość pełnej dynamiki danego instrumentu finansowego; pozwala to na znaczne zwiększenie płynności tego instrumentu.

4.5.7 Portfel pozbawiony ryzyka w modelu BS z punktu widzenia modelu dwumianowego

Niezbędne wyrażenie modelu BS na udziały (4.130) uzyskane poprzez równanie (4.129) i założenie o istnieniu portfela pozbawionego ryzyka można otrzymać bezpośrednio w oparciu o model dwumianowy (patrz rozdz. 4.2).

Na rys. 4.13 przedstawiono pojedynczy krok czasowy w modelu (podejściu) dwumianowym. Zakładamy, że w przedziale czasu Δt jego wartość może wzrosnąć od wyjściowej wielkości Φ do Φ_+ lub zmaleć do Φ_- , gdzie zależność h od czasu jest dana linią schodkową przykładowo przedstawioną na rys. 4.12. Warunek braku ryzyka



Rysunek 4.13: Pojedynczy krok czasowy Δt w modelu dwumianowym; warunek braku ryzyka inwestycyjnego prowadzi bezpośrednio do wzoru ujętego w ramkę.

oznacza niewrażliwość portfela na tego typu zmiany tzn. musi zachodzić równość zamieszczona w ramce na tym rysunku skąd po prostym przekształceniu i przejściu $\Delta t \rightarrow \delta t$ otrzymujemy warunek (4.130). Podkreślmy, że nie wolno mylić zmiany war-

tości portfela $d'\Phi$, która związana jest z upływem czasu dt przy ustalonych udziałach, ze zmianą $\Phi_+ - \Phi_-$, która oznacza różnicę pomiędzy dwiema różnymi możliwymi wartościami portfela w ustalonej chwili, także przy ustalonych udziałach. Bowiem, pierwsza różnica dana jest równaniem (4.133) a druga po prostu znika.

W dalszej części przeprowadzimy analizę wrażliwości modelu BS w oparciu o znajomość jego rozwiązania.

4.5.8 Równanie BS jako formalne równanie dyfuzji Ficka lub przewodnictwa cieplnego Fouriera

W niniejszym rozdziale wykazujemy istnienie takich zmiennych, w których równanie (4.136) przechodzi w równanie dyfuzji Ficka lub przewodnictwa cieplnego (równanie Fouriera) o jednostkowym współczynniku dyfuzji lub przewodnictwa temperaturowego. W tym celu cenę opcji $C(Y(t), t)$ potraktujemy jako wynik zdyskontowania pewnej nowej funkcji $y(x, t')$ mianowicie,

$$C(Y(t), t) = \exp(r(t - T)) y(x, t'), \quad (4.137)$$

gdzie zmienna "przestrzenna"

$$\begin{aligned} x &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \left[\ln \left(\frac{Y(t)}{K} \right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - T) \right] \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \ln \left(\frac{Y(t)}{K} \right) + t', \end{aligned} \quad (4.138)$$

przy czym zmienna czasowa

$$t' \stackrel{\text{def.}}{=} -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 (t - T). \quad (4.139)$$

a stąd, w nowych zmiennych

$$Y(x, t') = K \exp \left((x - t') \left(\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \sigma^2/2 \right) \right)^{-1} \right). \quad (4.140)$$

Naszym zadaniem jest wykazanie, że funkcja $y(x, t')$ jest (formalnie rzecz biorąc) koncentracją lub polem temperatury spełniającym, odpowiednio, równanie Ficka lub Fouriera.

Wyznamy wszystkie pochodne występujące w równaniu (4.136) wykorzystując podstawienie (4.137). Zatem, jako pierwszą obliczmy

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC(Y, t) - \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \exp(r(t - T)) \left[\frac{\partial y(x, t')}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t')}{\partial t'} \right], \quad (4.141)$$

przy czym po drodze skorzystaliśmy z prostych zależności

$$\frac{\partial y(x(t'), t')}{\partial t} = \frac{\partial y(x(t'), t')}{\partial x(t')} \frac{dx(t')}{dt} + \frac{\partial y(x(t'), t')}{\partial t'} \frac{dt'}{dt} \quad (4.142)$$

oraz

$$\frac{dx(t')}{dt} = \frac{dt'}{dt} = -\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}}. \quad (4.143)$$

Następnie przekształcamy pierwszą pochodną "przestrzenną" do postaci

$$\frac{\partial C}{\partial Y} = \frac{1}{Y} \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \exp(r(t - T)) \frac{\partial y(x, t')}{\partial x}, \quad (4.144)$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru (na pochodną superponowaną)

$$\frac{\partial y(x(t'), t')}{\partial Y} = \frac{\partial y(x(t'), t')}{\partial x(t')} \frac{dx(t')}{dY}, \quad (4.145)$$

przy czym

$$\frac{dx(t')}{dY} = \frac{1}{Y(t)} \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\frac{\sigma^2}{2}}. \quad (4.146)$$

Stąd, otrzymujemy wyrażenie na drugą pochodną przestrzenną postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} &= \frac{\partial}{\partial Y(t)} \left(\frac{\partial C(Y(t), t)}{\partial Y(t)} \right) \\ &= \frac{1}{Y^2} \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \exp(r(t - T)) \left[-\frac{\partial y(x, t')}{\partial x} + \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial^2 y(x, t')}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Podstawiając tak wyznaczone pochodne do równania (4.136) otrzymujemy pośrednie wyrażenie

$$\begin{aligned} rC &= rC - \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \exp(r(t - T)) \frac{\partial y(x, t')}{\partial t'} \\ &\quad - \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \exp(r(t - T)) \frac{\partial y(x, t')}{\partial x} \\ &\quad + r \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \exp(r(t - T)) \frac{\partial y(x, t')}{\partial x} \\ &\quad - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \exp(r(t - T)) \frac{\partial y(x, t')}{\partial x} \\ &\quad + \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \exp(r(t - T)) \frac{\partial^2 y(x, t')}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4.148)$$

które, po (natychmiastowym) uproszczeniu wyrażeń znajdujących się w wierszu drugim, trzecim i czwartym, daje poszukiwane równanie Ficka lub Fouriera odpowiednio na koncentrację lub na pole temperatury $y(x, t')$ postaci

$$\frac{\partial y(x, t')}{\partial t'} = \frac{\partial^2 y(x, t')}{\partial x^2}. \quad (4.149)$$

Równanie (4.149) otwiera dodatkowe możliwości przed modelem BS np. interpretacyjne w języku termodynamiki nierównowagowej (termodynamiki przepływów).

4.5.9 Formuła wyceny opcji kupna Blacka-Scholesa

Aby rozwiązać równanie (4.136) należy przyjąć odpowiednie warunki brzegowe (a więc umożliwiające znalezienie rozwiązania). W tym celu będziemy w dalszym ciągu przykładowo zajmować się opcją kupna czyli wyceną opcji dla nabywcy kontraktu czyli dla tzw. strategii długiej (zwanej też pozycją długą, ang. *long call*), dla której wspomniane warunki mogą mieć np. następującą prostą postać:

$$C(Y(t = T), t = T) = \max\{Y(t = T) - K, 0\} \quad (4.150)$$

oraz

$$C(Y(t) = 0, t) = 0. \quad (4.151)$$

Pierwszy warunek mówi, że opcja jest warta tyle ile wynosi zysk na papierze na który opiewa natomiast drugi warunek stwierdza, że oczywiście nic nie jest warta opcja na papier bezwartościowy. Dodatkowo wprowadza się dość oczywiste zastrzeżenie, że współczynnik zabezpieczenia portfela przed ryzykiem $h(Y(t), t) = \partial C(Y(t), t) / \partial Y(t)$ musi być skończony.

W niniejszej części po prostu sprawdzamy, że poniższa formuła Blacka-Scholesa (BS) na opcję kupna

$$C(Y(t), t) = Y(t)\Phi(d_+) - K'(t)\Phi(d_-), \quad (4.152)$$

gdzie $K'(t) = K \exp(-r(T - t))$ oznacza zdyskontowaną cenę wykonania opcji, jest rozwiązaniem równania (4.136) spełniającym wspomniane powyżej warunki brzegowe, przy czym $\Phi(z)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0, 1)$ oraz

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = \frac{\ln\left(\frac{Y(t)}{K'(t)}\right) \pm \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \quad (4.153)$$

Zauważmy, że rozwiązanie (4.152) posiada dla $Y(t) > K'(t)$ i dowolnego czasu $0 \leq t \leq T$ asymptotę ukośną w zmiennej Y daną wzorem

$$C_{asympt}(Y(t), t) = Y(t) - K'(t), \quad (4.154)$$

która znika w punkcie $Y(t) = K'(t)$; dla $Y \leq K'$ mamy do czynienia z odcinkiem pokrywającym się z osią Y .

Na rysunkach 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 i 4.21 są to linie zaznaczone na niebiesko - obie te linie można wyrazić za pomocą jednego wzoru,

$$C_{max}(Y(t), t) = \max[Y(t) - K'(t), 0]; \quad (4.155)$$

stanowiącego odniesienie dla rozwiązania (4.152); np. dla $t = T$ (czyli w chwili zamykania kontraktu) oba wyrażenia (4.152) i (4.154) pokrywają się jak należy, co jest konsekwencją przyjętego warunku brzegowego (4.150) (z tego powodu linia czerwona na rys. 4.17 nie jest niestety widoczna).

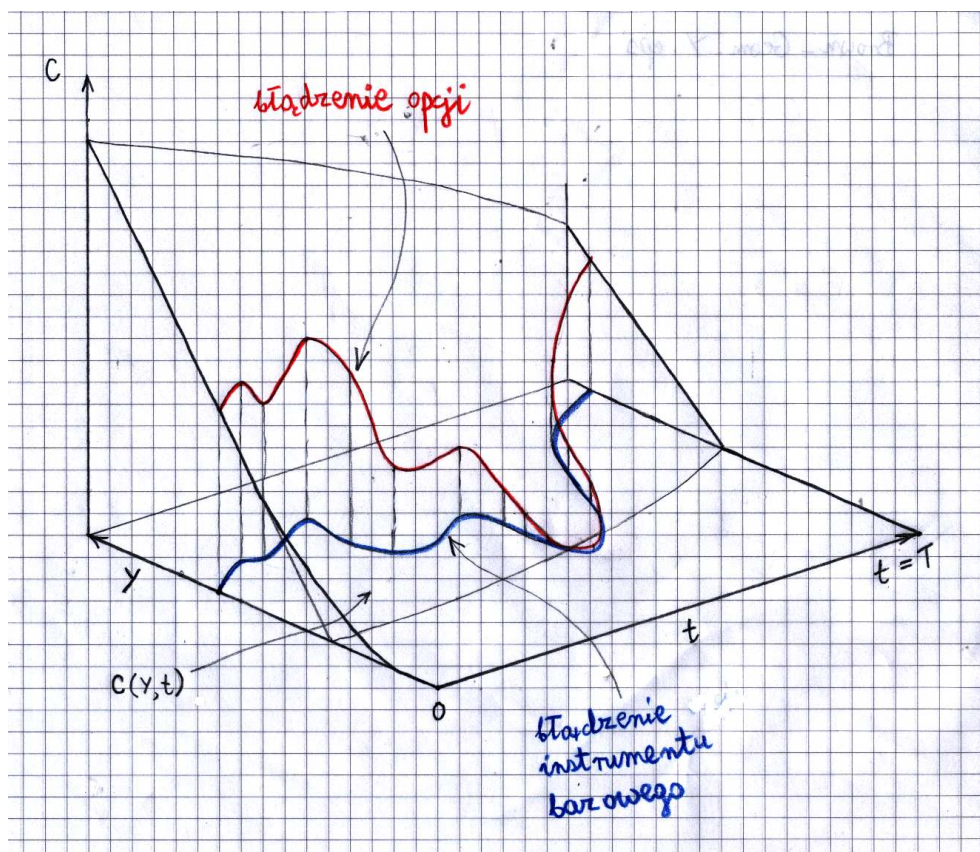
Należy podkreślić, że formuła (4.152) odpowiada na dwa **kluczowe pytania przed jakimi staje inwestor** a mianowicie:

- (1) **na jaką cenę opcji (premię, opłatę wstępną) zgodzić się w chwili zawierania kontraktu na akcje** znając jej cenę oraz akceptując cenę (umowną) po jakiej kontrakt będzie zrealizowany w ściśle określonym terminie wygaśnięcia opcji,
- (2) **jaka jest cena opcji dla czasów pośrednich $0 < t < T$** ; znajomość odpowiedzi na to pytanie pozwala inwestorowi podejmować racjonalne decyzje dotyczące obrotu opcjami, tzn. dotyczące ewentualnej sprzedaży lub dokupienia opcji.

W świetle rozwiązania (4.152) rodzi się pytanie o jego **zgodność z paradygmatem giełdy, czyli z zasadą braku arbitrażu na giełdzie; czy nie jest ona w tym przypadku naruszona?** Aby zrozumieć, że zasada ta nie jest tutaj naruszona przeanalizujmy schematyczny rys. 4.14. Wyraźnie widoczne jest tam błędzenie (jest to geometryczny ruch Browna) instrumentu bazowego Y w płaszczyźnie (Y, t) (niebieska, poplątana linia). Właśnie fakt, że jest to błędzenie oznacza, że nie umiemy podać z całą pewnością wartości instrumentu bazowego w chwili t . Ten losowy charakter trajektorii $Y(t)$ a stąd $C(Y(t), t)$ (czerwona wijąca się linia) zabezpiecza formułę Blacka-Scholesa (4.152) przed naruszeniem zasady braku arbitrażu.

Na rysunkach 4.15 i 4.16 przedstawiono trójwymiarowe wykresy zależności ceny opcji C od ceny waloru bazowego Y i od czasu t danej formułą BS dla przykładowo wybranych parametrów: ceny umownej $K = 4$ [*j.u.*], terminu realizacji opcji $T = 10$ [*mies.*] i pozagiełdowej stopy zwrotu $r = 0.1$ [*1/mies.*] oraz dwóch znacznie różniących się od siebie wartości zmienności, odpowiednio $\sigma = 0.05$ i $\sigma = 0.2$. Takie wykresy pozwalają na analizę ceny opcji $C(Y(t), t)$ dla dowolnej trajektorii $Y(t)$ w płaszczyźnie (Y, t) , na przykład dla konkretnej realizacji geometrycznego ruchu Browna (patrz rys. 4.14).

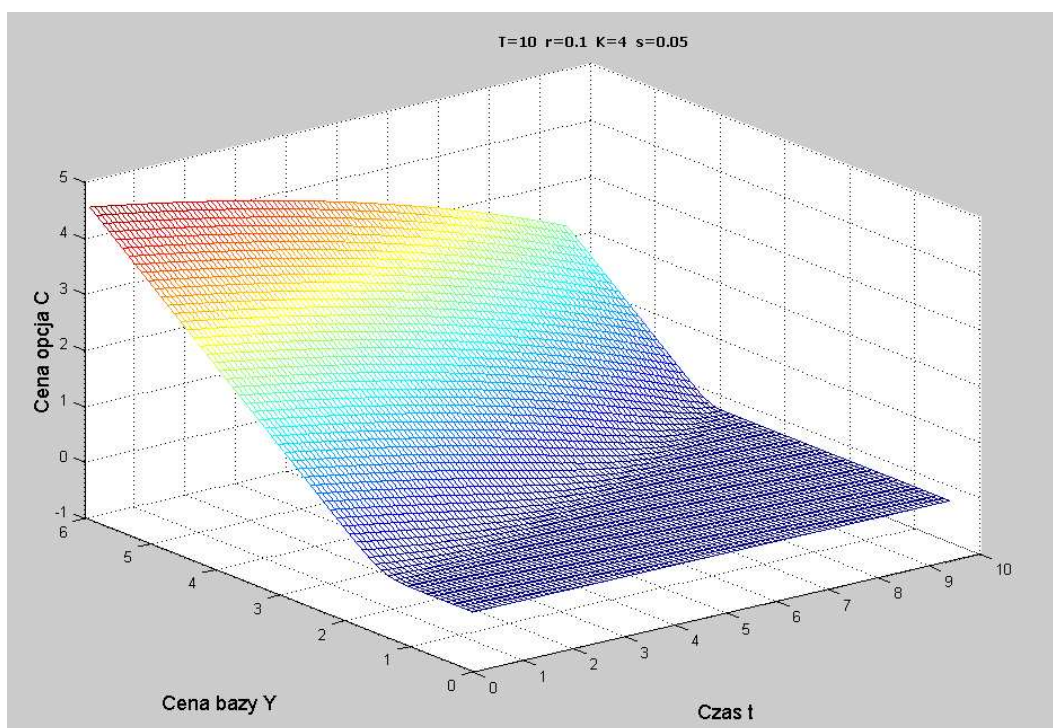
Ponadto, na dwuwymiarowych wykresach na rysunkach 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 i 4.23 zamieszczono wybrane przekroje powyższych trójwymiarowych wykresów w płaszczyznach (C, Y) i (C, t) .



Rysunek 4.14: Trójwymiarowy, schematyczny wykres powierzchni $C(Y,t)$ opisującej cenę opcji kupna w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y oraz czasu t . Dodatkowo, na płaszczyźnie (Y,t) zaznaczono przykładową realizację geometrycznego ruchu Browna waloru bazowego Y (ciągła linia niebieska) a na powierzchni $C(Y,t)$ jego obraz (ciągła linia czerwona). Jak widać, dopiero na tego typu wykresie możliwe jest przedstawienie pełnej dynamiki ceny opcji.

Porównując odpowiednio ze sobą wykresy dla obu wartości zmienności widać, że wzrost zmienności prowadzi do wzrostu odstępstw przewidywań formuły BS odpowiednio od osi poziomej i asymptotyki ukośnej (niebieskie linie na dwuwymiarowych wykresach). Innymi słowy, w miarę wzrostu zmienności wzrasta rola formuły BS, która pozwala dokładnie określić wpływ elementu losowego na cenę opcji aż do chwili jej realizacji. W rozdz. 4.5.10 kontynuujemy ten wątek przedstawiając zależność wskaźnika greckiego λ (λ , nazywa się go także wskaźnikiem vega, kappa, epsilon, eta a zdefiniowanego jako pochodna cząstkowa ceny opcji po zmienności) od zmiennych Y i t .

Na wspomnianych powyżej rysunkach przedstawiliśmy przewidywanie formuły BS w zmiennych Y i t oraz jej rzuty na płaszczyznę (Y, C) i (t, C) dla typowych wartości parametrów charakteryzujących formułę. Jak widać, rozwiązanie to pozwa-



Rysunek 4.15: Trójwymiarowy wykres ceny europejskiej opcji kupna C w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y oraz czasu t (mniejszego od T), obliczona na podstawie formuły BS (4.152) dla następujących wartości parametrów modelu: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

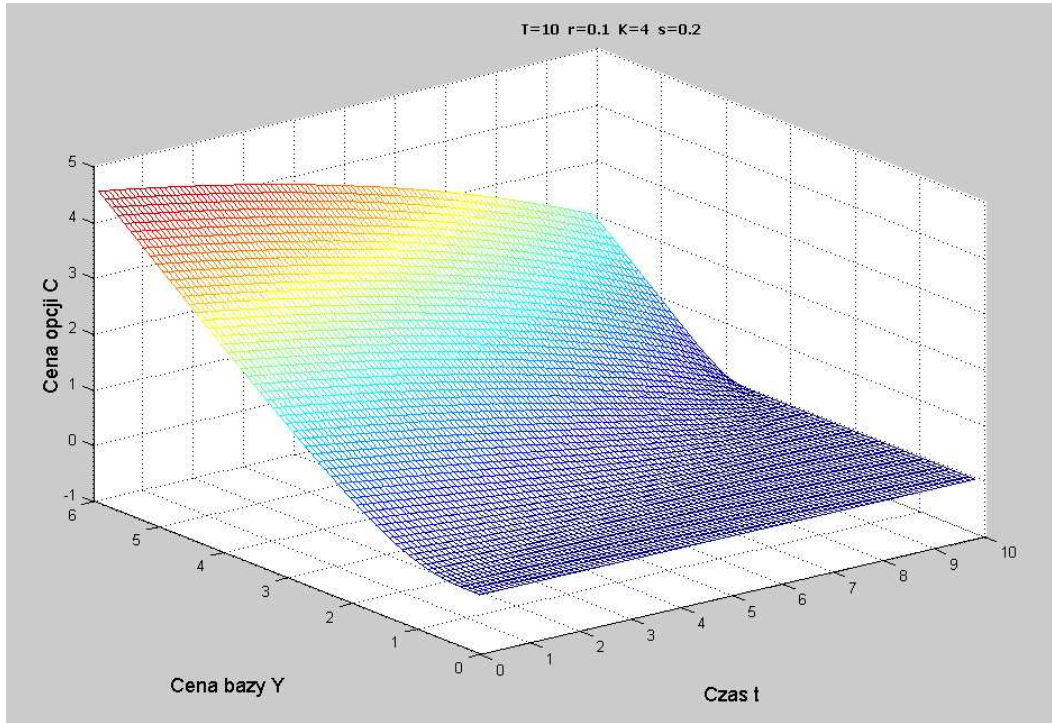
la obserwować cenę opcji C w zależności od ceny Y instrumentu bazowego dla dowolnej chwili (np. otwierania i zamykania kontraktu) oraz dla ustalonej ceny umownej co jest niezbędnym elementem zmniejszającym ryzyko podejmowanych decyzji na rynku finansowym.

4.5.10 Analiza wrażliwości modelu Blacka-Scholesa

Ważnym elementem analizy modelu BS jest badanie jego wrażliwości czyli określenie jak cena opcji zmienia się

- ze zmianę ceny instrumentu bazowego,
- z upływem czasu pozostałego do jej wygaśnięcia
- ze zmianą parametrów charakteryzujących cenę opcji.

Innymi słowy, poszukujemy odpowiedzi na pytanie dotyczące zmiany ceny opcji w zależności od zmiany czynników mających na nią wpływ.

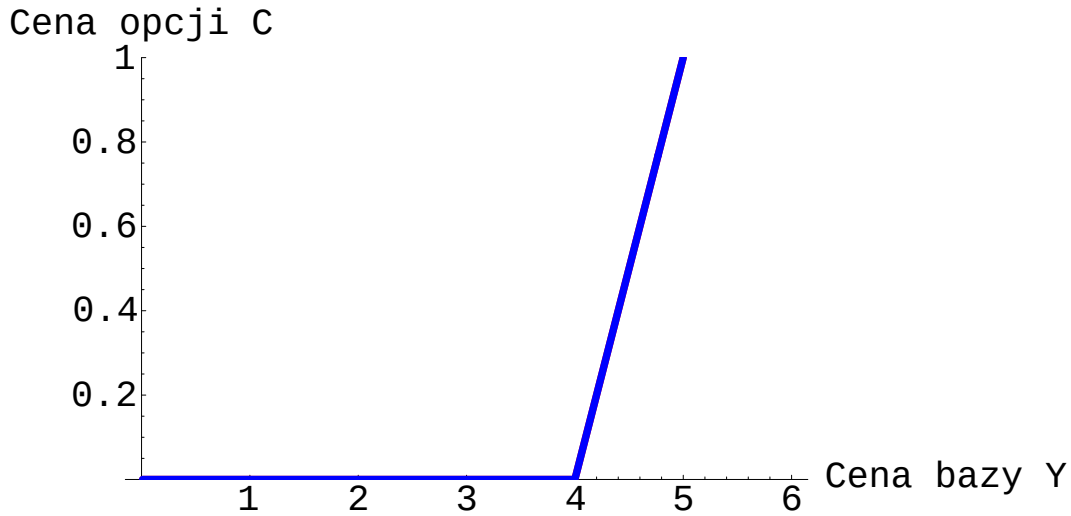


Rysunek 4.16: Trójwymiarowy wykres cena opcji kupna C w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego Y oraz czasu t (krótszego od T), obliczona na podstawie formuły BS (4.152) dla następujących wartości parametrów modelu: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$]. Jak widać, wykres ten różni się od poprzedniego tylko zwiększoną wartością zmienności σ .

W tym celu wprowadza się współczynniki (zwane także wskaźnikami greckimi), które można nazwać podatnościami lub wrażliwościami, które (za wyjątkiem wskaźnika *gamma*³⁶ (γ), o czym jest mowa w rozdz. 4.5.10) są po prostu pochodnymi cząstkowymi rzędu pierwszego ceny opcji względem wspomnianych wielkości. Najczęściej używanymi wskaźnikami, obok wspomnianego już w rozdz. 4.5.6 współczynnika zabezpieczenia portfela, $h(Y(t), t)$, są cztery zdefiniowane następująco:

- wskaźnik $\gamma(Y(t), t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial h(Y, t)}{\partial Y}$ zwany także tempem i oznaczany przez g , określający podatność (wrażliwość) udziałów (przypadających na jedną opcję) na zmianę ceny waloru bazowego,
- wskaźnik $\lambda(Y(t), t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial C(Y, t)}{\partial \sigma}$, zwany także dalej *Vega*, określający wrażliwość ceny opcji na zmianę zmienności,

³⁶Dla oznaczenia niektórych wskaźników greckich stosuje się także duże litery alfabetu greckiego.



Rysunek 4.17: Profil wypłaty (płatność równa tutaj cenie) opcji kupna C w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y obliczona na podstawie formuły BS (4.152) dla czasu realizacji opcji $t=T$ oraz następujących wartości parametrów modelu: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Jak widać rozwiązanie równania zgadza się jak trzeba z przyjętym warunkiem brzegowym (4.150).

- wskaźnik $\theta(Y(t), t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial C(Y, t)}{\partial \tau}$ (gdzie $\tau \stackrel{\text{def.}}{=} T - t$), określający wrażliwość ceny opcji na upływ czasu pozostałego do jej wygaśnięcia,
- wskaźnik $\rho(Y(t), t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial C(Y, t)}{\partial r}$, określający podatność ceny opcji na zmianę stopy procentowej,

Poniżej omawiamy każdy ze współczynników z osobna.

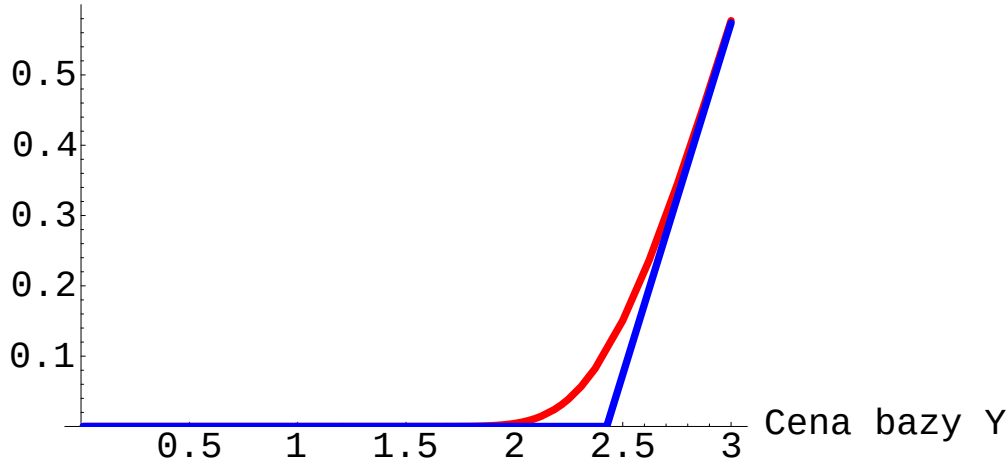
Warto zwrócić uwagę, że **współczynniki greckie wraz ze współczynnikiem zabezpieczenia portfela stanowią jedną z grup definiujących miarę ryzyka rynkowego, tzw. miarę wrażliwości**. Im większe są te współczynniki tym większe jest ryzyko jakie niesie ze sobą inwestowanie (w danej konkretnej sytuacji).

Wskaźnik zabezpieczenia portfela h

Wskaźnik zabezpieczenia portfela można łatwo wyznaczyć ze wzoru BS (4.152) oraz wspomagającego go wyrażenia (4.153) a mianowicie,

$$\begin{aligned}
 h(Y(t), t) &= \frac{\partial C(Y, t)}{\partial Y} = \Phi(d_+) + Y \frac{d\Phi(d_+)}{dd_+} \frac{\partial d_+}{\partial Y} - K' \frac{d\Phi(d_-)}{dd_-} \frac{\partial d_-}{\partial Y} \\
 &= \Phi(d_+) + \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[N(0, 1; d_+) - \frac{1}{Y} K' N(0, 1; d_-) \right], \quad (4.156)
 \end{aligned}$$

Cena opcji C



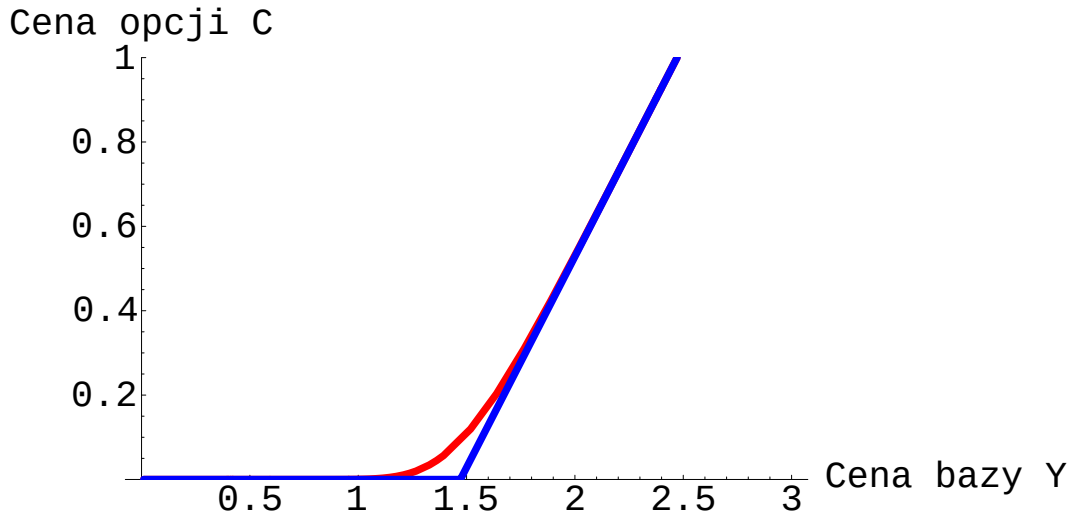
Rysunek 4.18: Cena europejskiej opcji kupna C w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y dana formułą BS (4.152) dla czasu $t=T/2$ (linia czerwona; liniami niebieskimi oznaczono odpowiednio asymptotę ukośną oraz obszar Y poniżej zdyskontowanej ceny umownej $K'=2.43$) dla wartości parametrów modelu takich jak dla rozwiązania przedstawionego na dwóch poprzednich rysunkach: $K=4$ [j.u.], $T=10$ [mies.], $r=0.1$ [1/mies.], $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Jak widać, rozwiązanie równania BS (linia czerwona) odbiega w części centralnej (czyli w pobliżu progu K') od swojej asymptoty ukośnej (linia niebieska).

gdyż

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(d_{\pm})}{dd_{\pm}} &= N(0, 1; d_{\pm}), \\ \frac{\partial d_{\pm}}{\partial Y} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{Y}, \end{aligned} \quad (4.157)$$

gdzie $N(0, 1; d_{\pm})$ jest wartością standaryzowanego rozkładu Gaussa w punkcie $d_{\pm}$.

Na rysunkach 4.24 i 4.25 przedstawiono trójwymiarowe wykresy zależności współczynnika zabezpieczenia portfela $h(Y(t), t)$ (patrz także rozdz. 4.5.6 wzór 4.130), który można uważać za najważniejszy współczynnik wrażliwości, od ceny waloru bazowego Y i od czasu t dla tych samych wartości parametrów, które zostały podane w rozdz. 4.5.9 (czyli ceny umownej $K = 4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T = 10$ [mies.] i pozagiełdowej stopy zwrotu $r = 0.1$ [1/mies.] oraz dwóch różnych wartości zmienności, odpowiednio $\sigma = 0.05$ i $\sigma = 0.2$). Takie wykresy (podobnie jak analogiczne przedstawione w rozdz. 4.5.9) pozwalają na analizę tego współczynnika dla dowolnej trajektorii $Y(t)$ w płaszczyźnie (t, Y) , na przykład dla dowolnie wybranej realizacji geometrycznego ruchu Browna. Dzięki temu wybór określonej strategii zarządzania aktywami przez inwestora jest łatwiejszy.



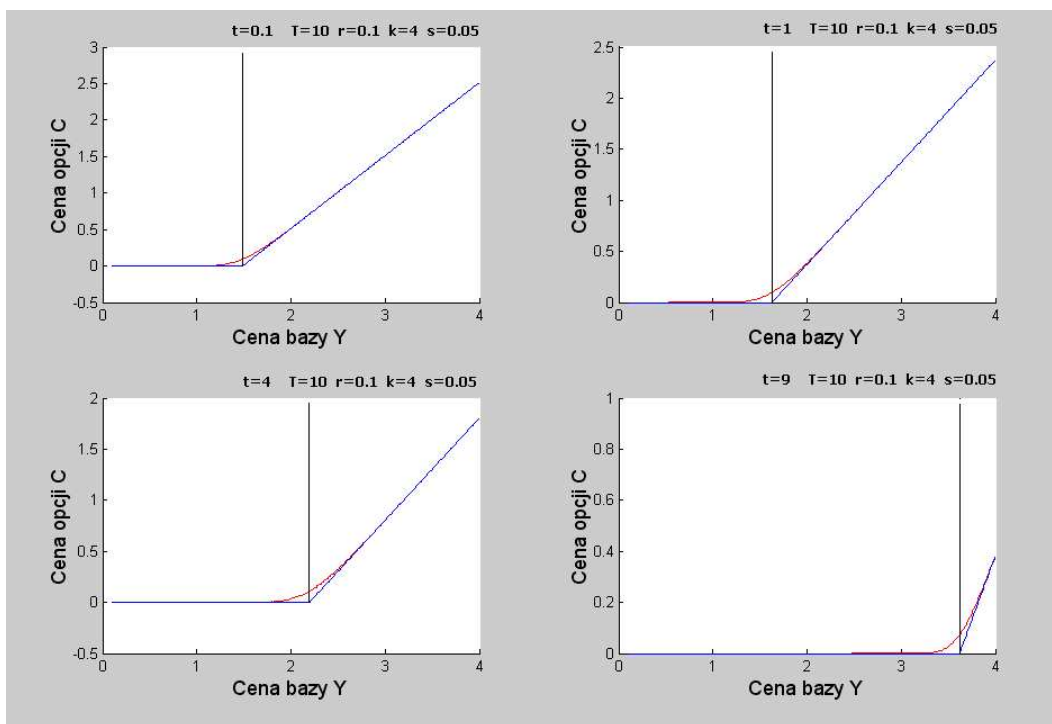
Rysunek 4.19: Profil opcji kupna C w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego Y obliczona na podstawie formuły BS (4.152) dla czasu $t=0$ (czyli dla chwili zawarcia kontraktu na tę opcję) oraz wartości parametrów modelu takich jak dla rozwiązania przedstawionego na poprzednim rysunku: $K=4$ [j.u.], $T=10$ [mies.], $r=0.1$ [1/mies], $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Podobnie jak na rys. 4.18, rozwiązanie równania BS (linia czerwona) odbiega wyraźnie w części centralnej od swojej asymptoty ukośnej (linia niebieska).

Ponadto, na dwuwymiarowych wykresach na rysunkach 4.26, 4.27, 4.17, 4.22 4.28, 4.29, 4.30 i 4.31 zamieszczono wybrane przekroje powyższych trójwymiarowych wykresów w płaszczyznach (h, Y) i (h, t) . Porównując ze sobą odpowiednio wykresy dla obu wartości zmienności widać, że wzrost zmienności prowadzi do zmniejszenia nachylenia funkcji h w otoczeniu progu K' , czyli do wzrostu odstępstwa od przebiegu wielkości majoryzującej danej poniższym wzorem (4.158) (niebieskie linie na tych wykresach; czarna pionowa linia lokalizuje położenie progu K').

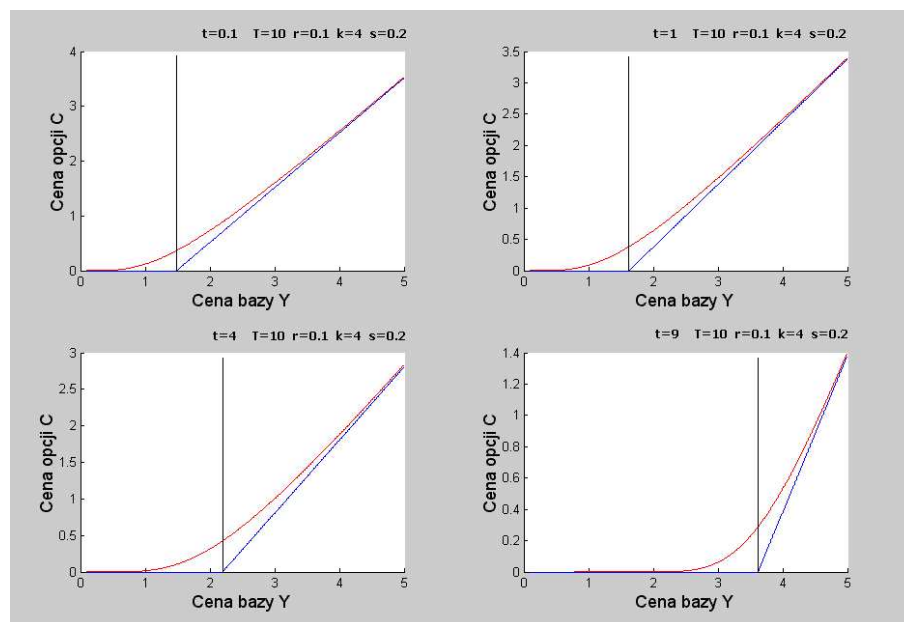
Na rysunkach 4.32, 4.33 i 4.34 porównaliśmy zależność współczynnika zabezpieczenia portfela pozbawionego ryzyka $h(Y(t), t)$ od waloru $Y(t)$ z analogiczną zależnością majoryzującą go użytecznej wielkości

$$h_{max}(Y(t), t) = \frac{\partial C_{max}(Y(t), t)}{\partial Y(t)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } Y(t) > K' \\ 0, & \text{gdy } Y(t) < K', \end{cases} \quad (4.158)$$

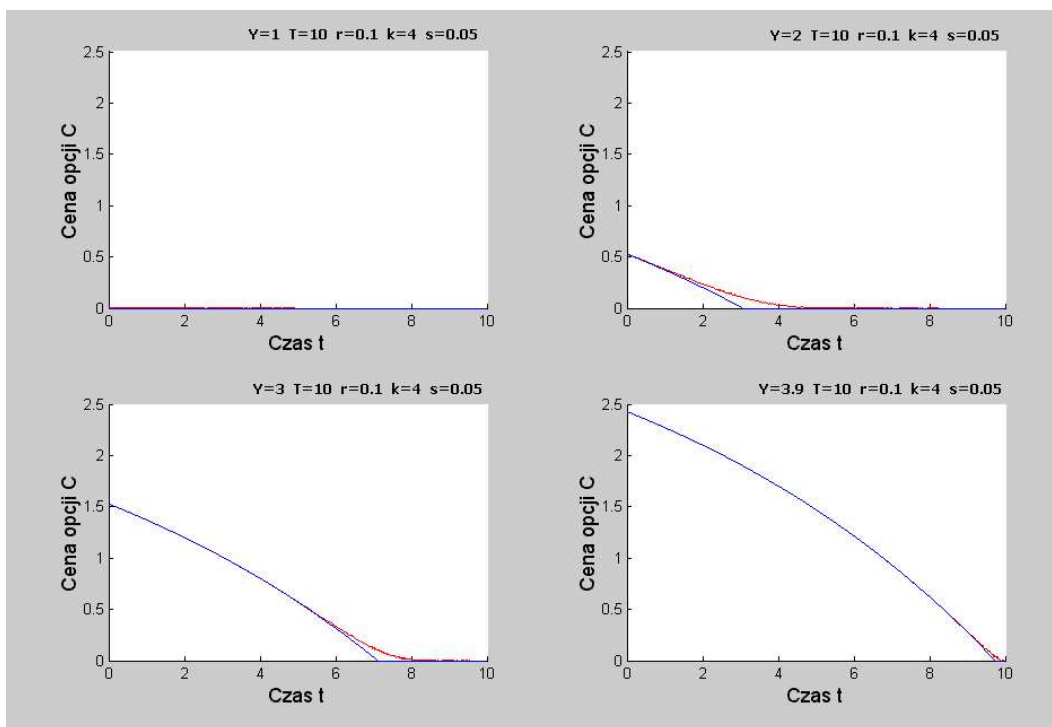
uzyskanym bezpośrednio z wyrażenia (4.155). Jak widać, udział $h(Y(t), t)$ jest przedziałami stały z dobrym przybliżeniem dla czasu $t \approx T$ czyli dla najbardziej interesującej sytuacji. Oprócz tego dla $Y \geq K \exp(-r(T-t))$ przyjmuje wartość w przybliżeniu równą 1; zakresem $Y < K \exp(-r(T-t))$ nie musimy się zajmować gdyż tam rozwiązanie $C(Y(t), t)$ znika.



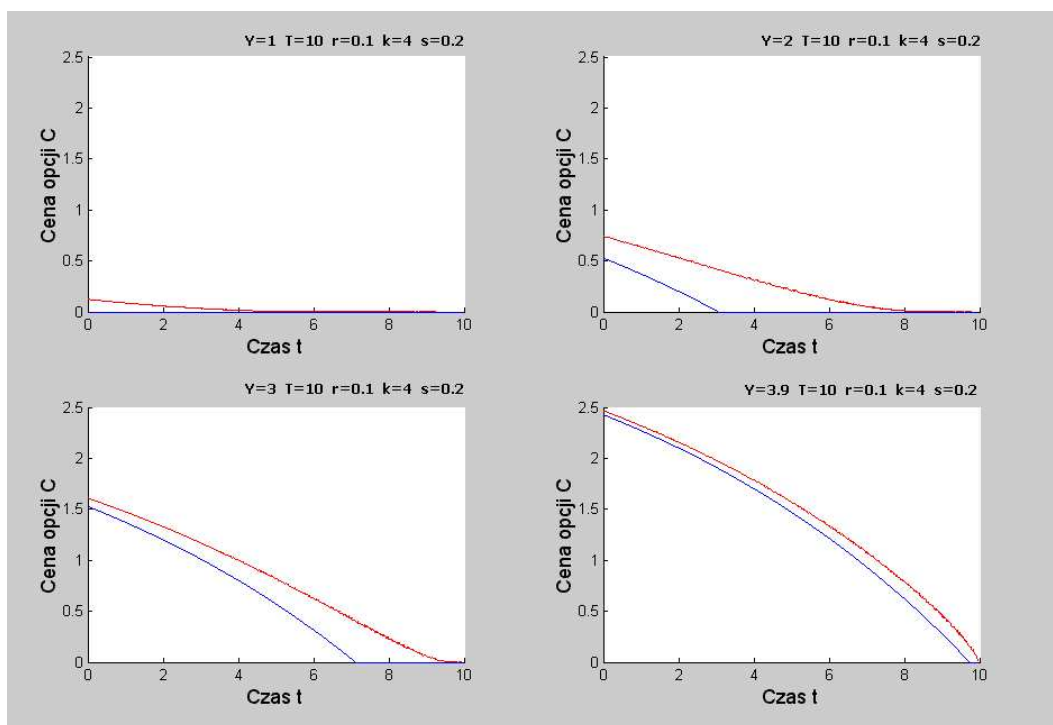
Rysunek 4.20: Zbiorczy wykres przedstawiający cenę opcji kupna C w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y obliczoną na podstawie formuły BS (4.152) dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$ oraz następujących wartości parametrów modelu: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



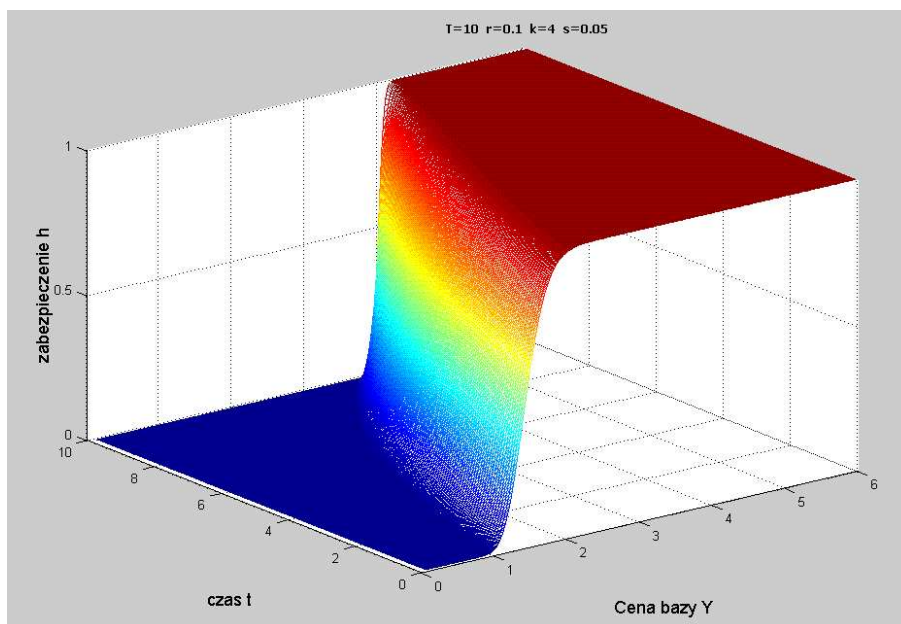
Rysunek 4.21: Zbiorczy wykres ceny opcji kupna C w zależności od ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y obliczona na podstawie formuły BS (4.152) dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$ oraz następujących wartości parametrów modelu: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



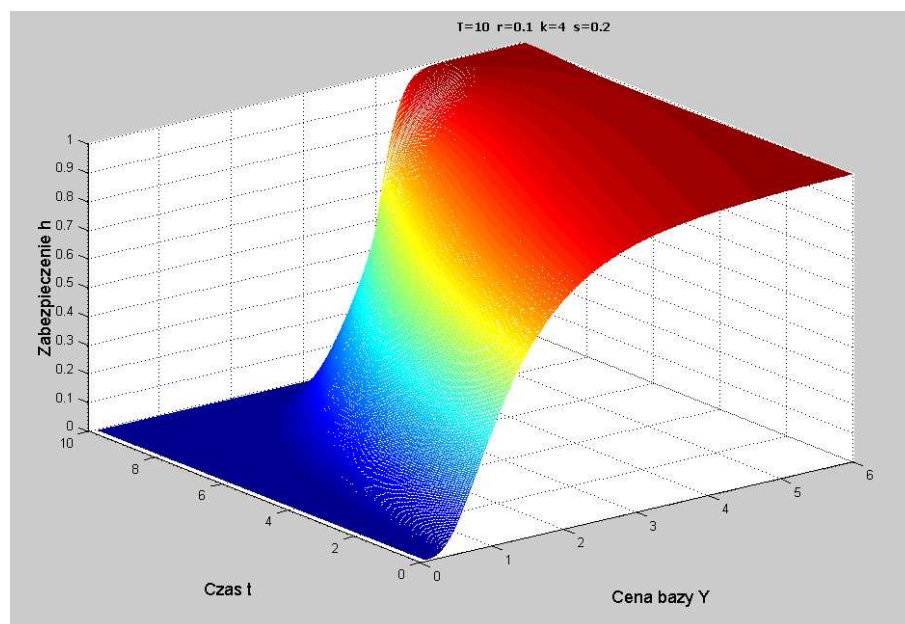
Rysunek 4.22: Profil wypłaty (płatność) czyli cena opcji kupna C dla jej posiadacza w zależności od czasu t , dla czterech wybranych wartości ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y mniejszych od ceny umownej K , obliczona na podstawie formuły BS (4.152) oraz następujących wartości parametrów modelu: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$.



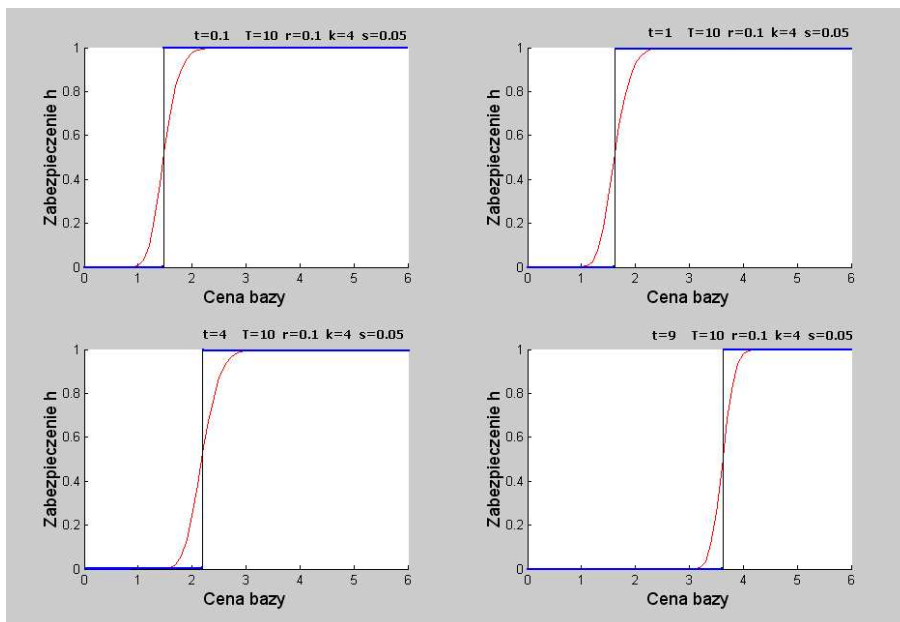
Rysunek 4.23: Profil wypłaty (płatność) czyli cena opcji kupna C dla jej posiadacza w zależności od czasu t , dla czterech wybranych wartości ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y mniejszych od ceny umownej K , obliczona na podstawie formuły BS (4.152) oraz następujących wartości parametrów modelu: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$.



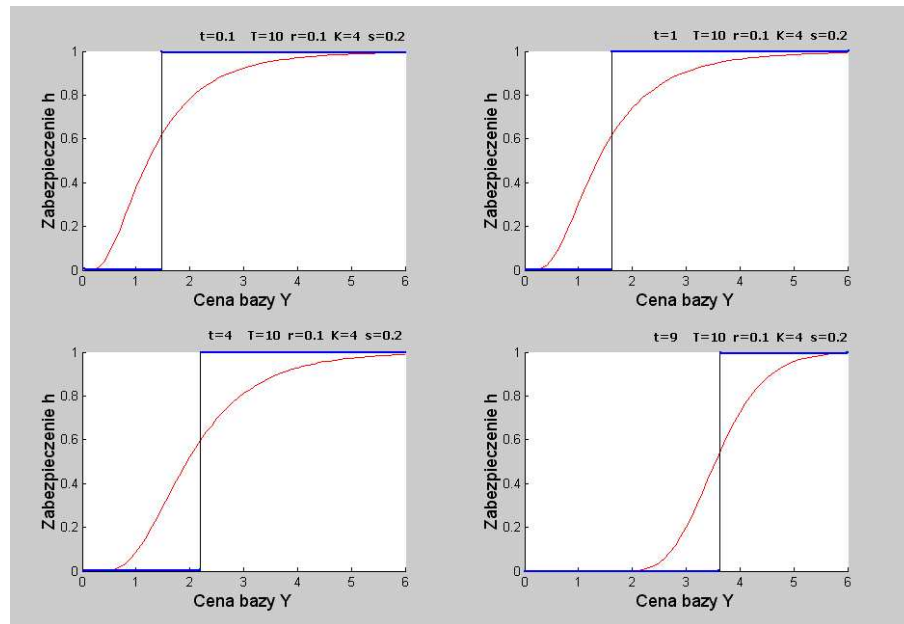
Rysunek 4.24: Trójwymiarowy wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y,t)$ od ceny bazowego instrumentu finansowego Y i czasu t dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$.



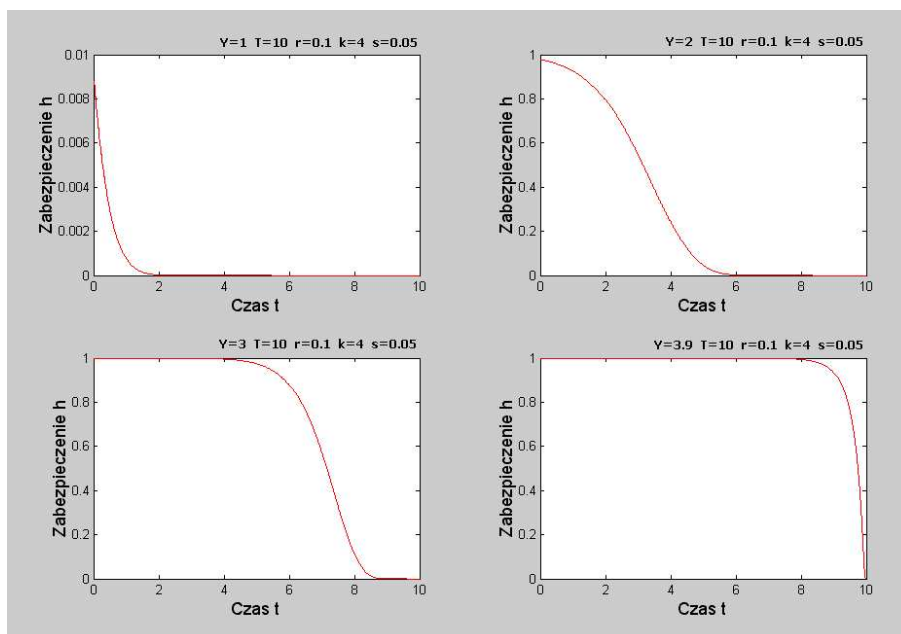
Rysunek 4.25: Trójwymiarowy wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y,t)$ od ceny bazowego instrumentu finansowego Y i czasu t dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$.



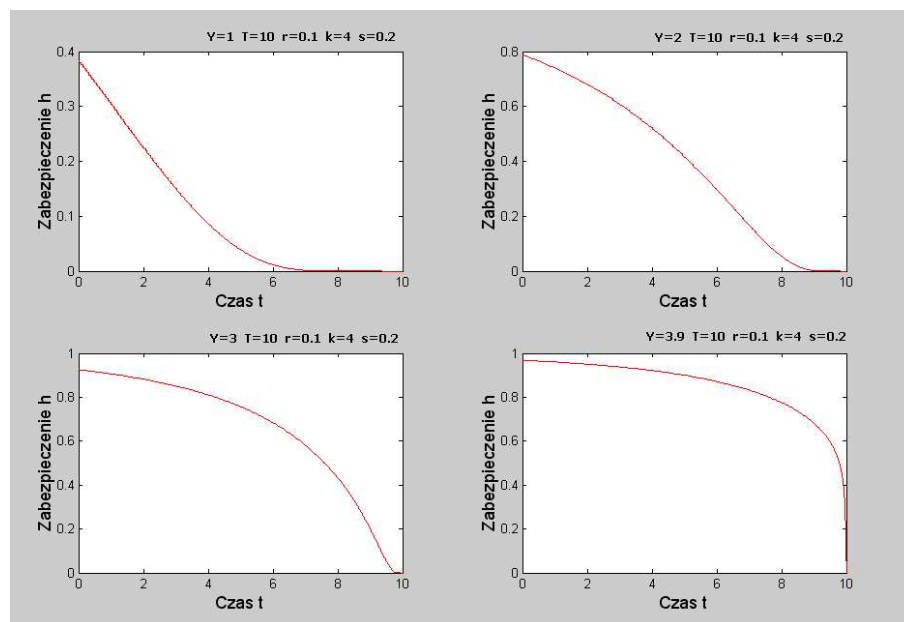
Rysunek 4.26: Wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y,t)$ od ceny bazowego instrumentu finansowego Y dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$ i dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagięldowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



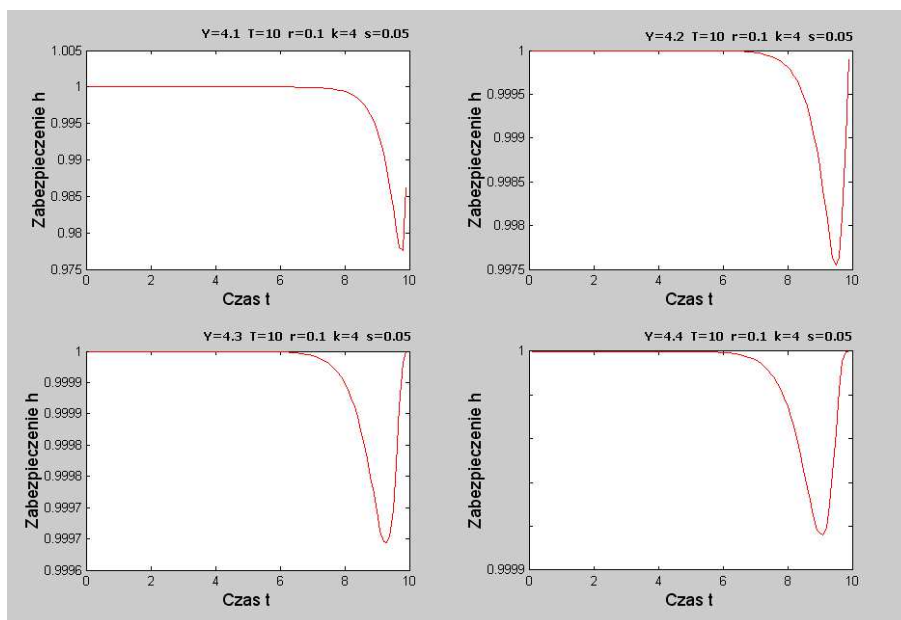
Rysunek 4.27: Wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y,t)$ od ceny bazowego instrumentu finansowego Y dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$ i dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



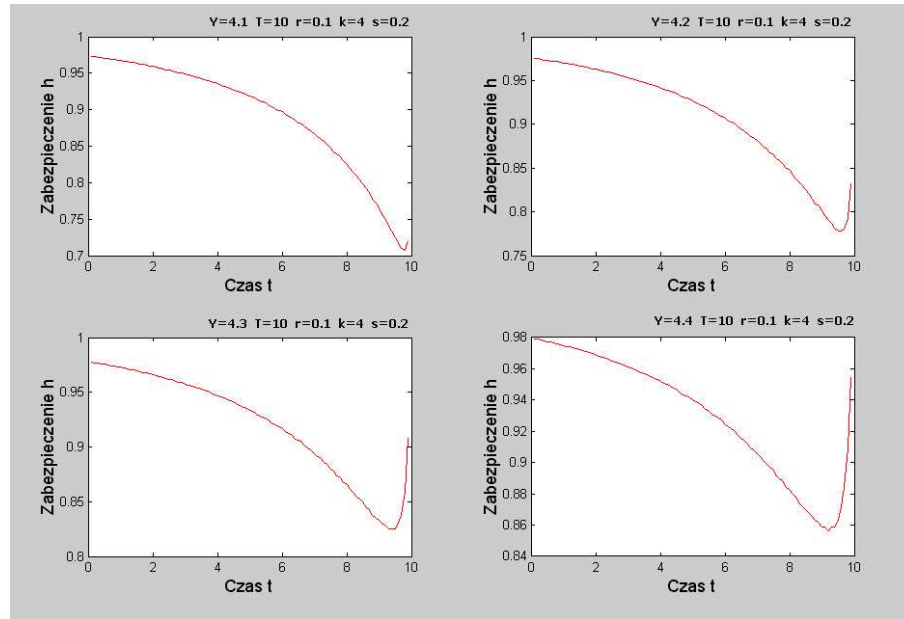
Rysunek 4.28: Wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y,t)$ od czasu t dla czterech wybranych wartości ceny bazowego instrumentu finansowego Y mniejszych od ceny umownej i dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



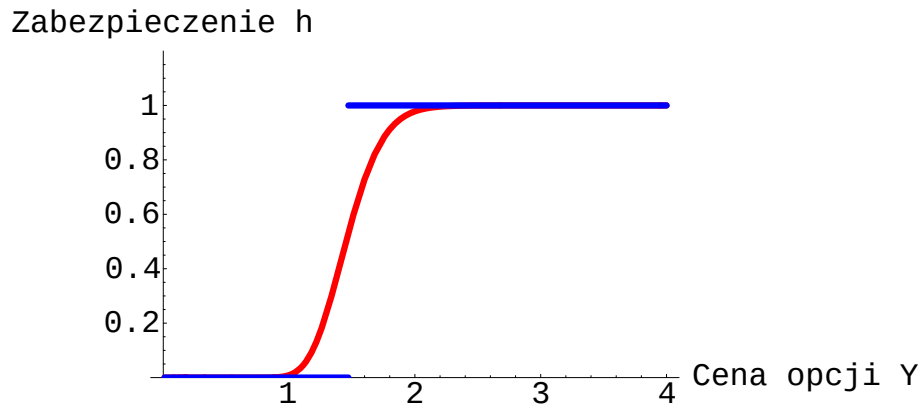
Rysunek 4.29: Wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y,t)$ od czasu t dla czterech wybranych wartości ceny bazowego instrumentu finansowego Y mniejszych od ceny umownej i dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



Rysunek 4.30: Wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y,t)$ od czasu t dla czterech wybranych wartości ceny bazowego instrumentu finansowego Y większych od ceny umownej i dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].

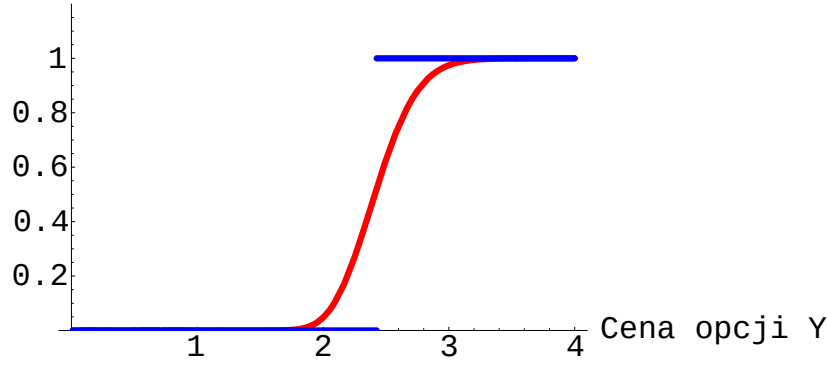


Rysunek 4.31: Wykres zależności współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y, t)$ od czasu t dla czterech wybranych wartości ceny bazowego instrumentu finansowego Y większych od ceny umownej i dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



Rysunek 4.32: Porównanie współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y(t=0), t=0)$ z majoryzującą go wielkością $h_{max}(Y(t=0), t=0)$ w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego $Y(t=0)$ otrzymane dla takiej parametryzacji jaka została przedstawiona w opisie rys. 4.19.

Zabezpieczenie h



Rysunek 4.33: Porównanie współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y(t=5), t=5)$ z majoryzującą go wielkością $h_{max}(Y(t=5), t=5)$ w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego $Y(t=5)$ otrzymane dla takiej parametryzacji jaka została przedstawiona w opisie rys. 4.18.

Innymi słowy, w miarę wzrostu zmienności wzrasta rola formuły BS, która pozwala dokładniej określić wpływ elementu losowego na cenę opcji aż do chwili jej wygaśnięcia (będzie jeszcze o tym mowa w dalszej części przy okazji analizy wskaźnika λ).

Wskaźnik grecki gamma

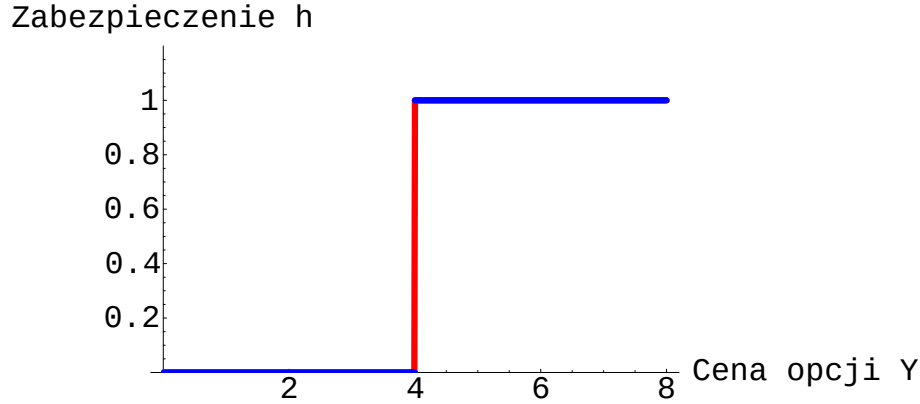
Wskaźnik gamma uzyskuje się bezpośrednio z różniczkowania wskaźnika zabezpieczenia portfela (danego wzorem (4.156)) po cenie waloru bazowego

$$\begin{aligned} \gamma(Y(t), t) = \frac{\partial h(Y(t), t)}{\partial Y(t)} &= N(0, 1; d_+) \frac{\partial d_+}{\partial Y} \\ &- \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} N(0, 1; d_+) d_+ \frac{\partial d_+}{\partial Y} \\ &+ \frac{1}{Y^2} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} K' N(0, 1; d_-) \\ &+ \frac{1}{Y} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} K' N(0, 1; d_-) d_- \frac{\partial d_-}{\partial Y}, \quad (4.159) \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} \gamma(Y(t), t) &= \frac{1}{Y} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} N(0, 1; d_+) \left[1 - \frac{d_+}{\sigma \sqrt{T-t}} \right] \\ &+ \frac{1}{Y^2} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} K' N(0, 1; d_-) \left[1 + \frac{d_-}{\sigma \sqrt{T-t}} \right]; \quad (4.160) \end{aligned}$$

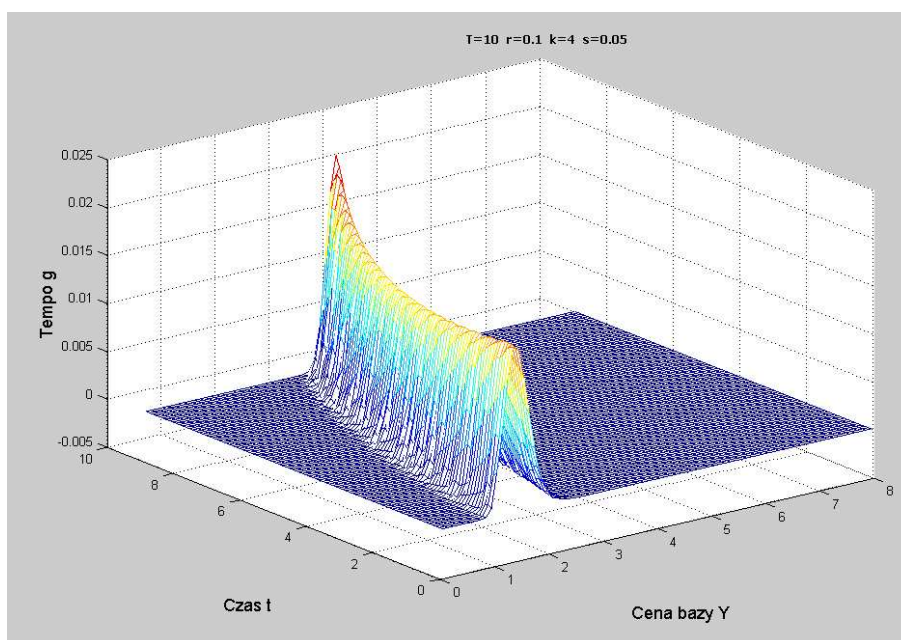
jest to wyrażenie, które (dla $t < T$) daje się łatwo obliczać na drodze numerycznej.



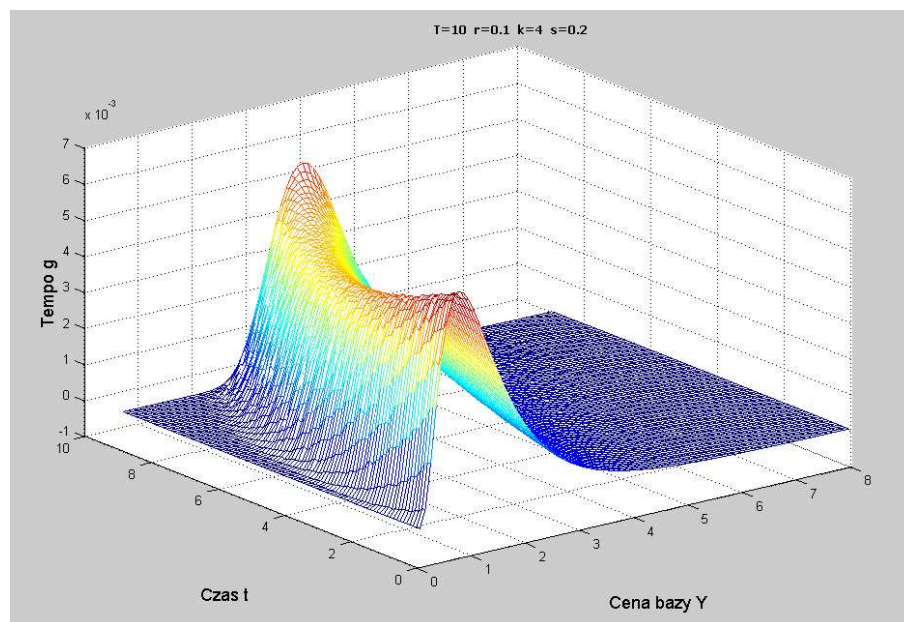
Rysunek 4.34: Porównanie współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y(t=T=10), t=T=10)$ z majoryzującą go wielkością $h_{max}(Y(t=T=10), t=T=10)$ w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego $Y(t=T=10)$ otrzymane dla takiej parametryzacji jaka została przedstawiona w opisie rys. 4.17.

Na kolejnych trójwymiarowych wykresach zamieszczonych na rysunkach 4.35 4.43, 4.44 i 4.45 i 4.36 przedstawiono, dla dwóch przykładowych wartości zmienności $\sigma = 0.05$ i $\sigma = 0.2$, współczynnik gamma $\gamma(Y(t), t) = \partial h(Y(t), t) / \partial Y(t) = \partial^2 C(Y(t), t) / \partial Y(t)^2$, czyli współczynnik pozwalający określić tempo zmiany ceny opcji względem zmiany ceny waloru podstawowego Y lub inaczej zmianę liczby udziałów h względem zmiany ceny opcji Y . Takie wykresy (podobnie jak analogiczne przedstawione w rozdz. 4.5.9 i w niniejszym rozdziale powyżej) pozwalają na analizę tego współczynnika dla dowolnej trajektorii $Y(t)$ w płaszczyźnie (t, Y) , na przykład dla dowolnie wybranej realizacji geometrycznego ruchu Browna tzn. ułatwiają inwestorowi wybór określonej strategii zarządzania aktywami. Co więcej, szerokość połówkowa zależności tego współczynnika od ceny waloru bazowego definiuje zasadniczy obszar zmienności współczynnika zabezpieczenia portfela pozbawionego ryzyka.

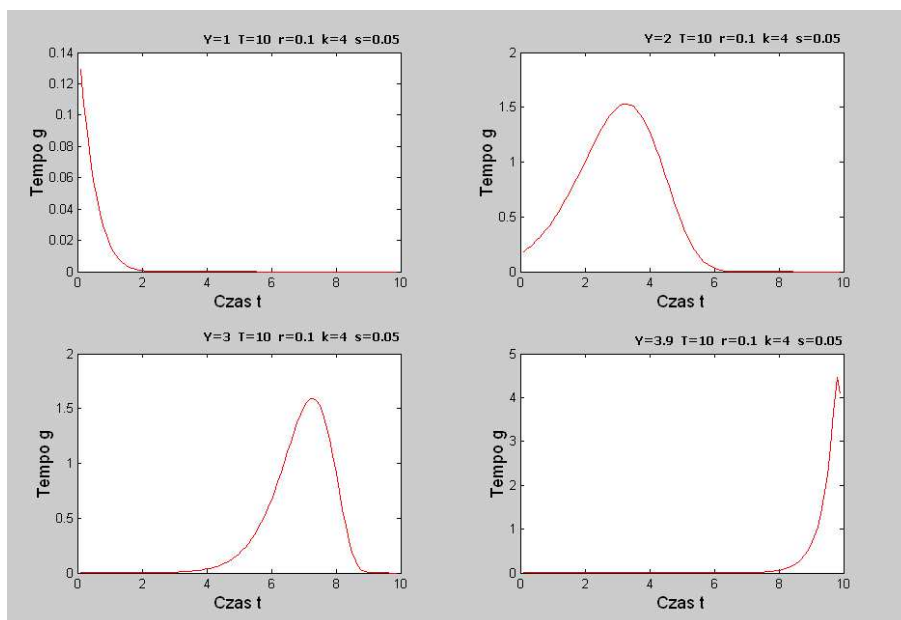
Ponadto, na rysunkach 4.37, 4.38, 4.39 i 4.40 zamieszczono wybrane przekroje powyższych trójwymiarowych wykresów w płaszczyznach (γ, Y) i (γ, t) . Porównując ze sobą odpowiednio wykresy dla obu wartości zmienności widać, że wzrost zmienności prowadzi do zmniejszenia nachylenia funkcji g w otoczeniu progu K' , czyli do wzrostu odstępstwa od przebiegu wielkości majoryzującej danej poniższym wzorem (4.158) (niebieskie linie na tych wykresach; czarna pionowa linia lokalizuje położenie progu K').



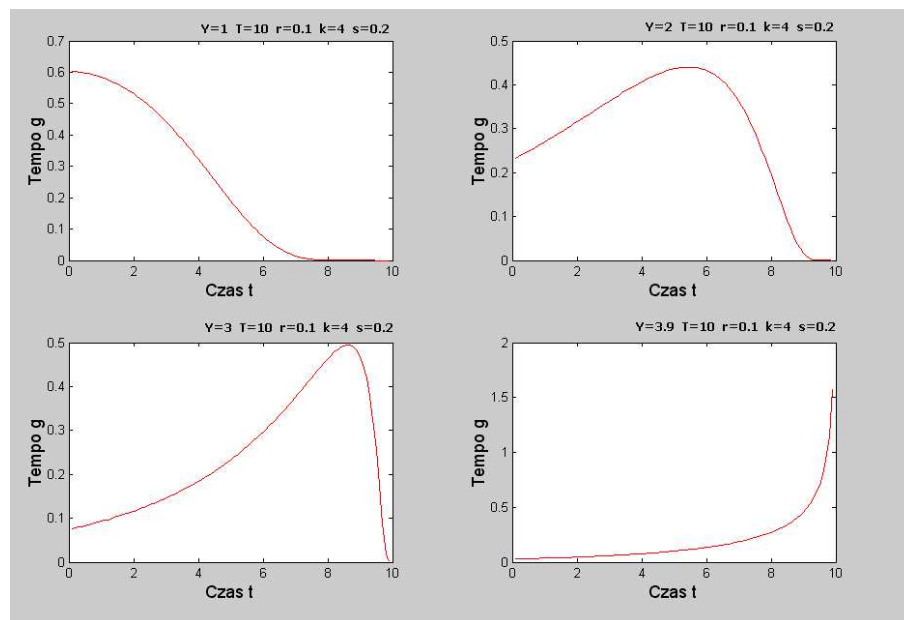
Rysunek 4.35: Trójwymiarowy wykres tempa g czyli wskaźnika gamma w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego Y dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{mies.}$].



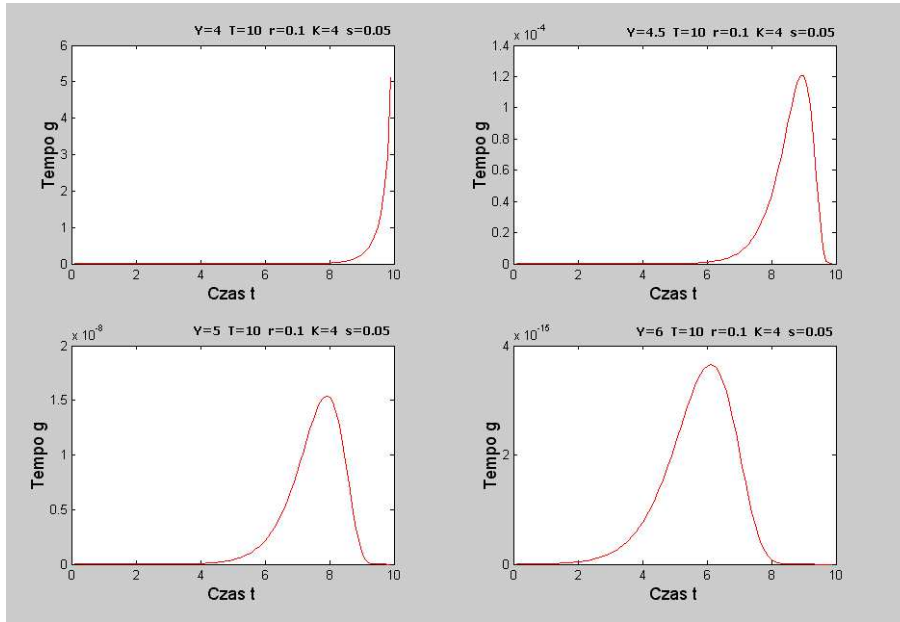
Rysunek 4.36: Trójwymiarowy wykres tempa g czyli wskaźnika gamma w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego Y dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].



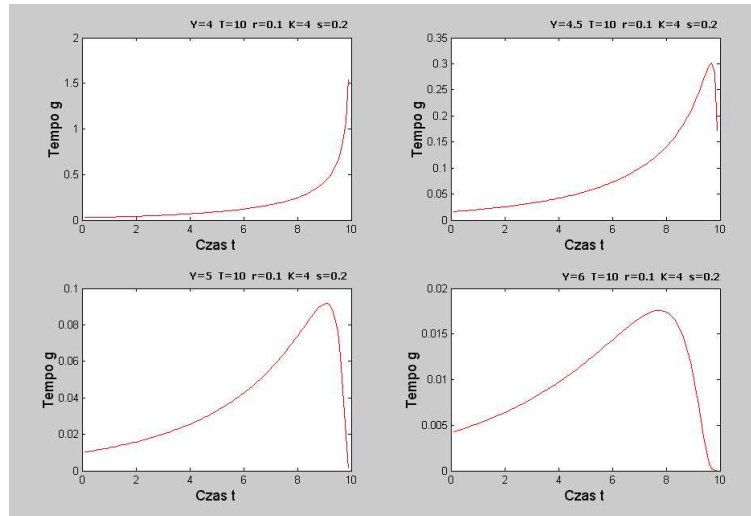
Rysunek 4.37: Przekrój tempa g czyli wskaźnika gamma w płaszczyźnie (γ, t) dla czterech przykładowo wybranych cen waloru bazowego Y dla przykładowo wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



Rysunek 4.38: Przekrój tempa g czyli wskaźnika gamma w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego Y dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

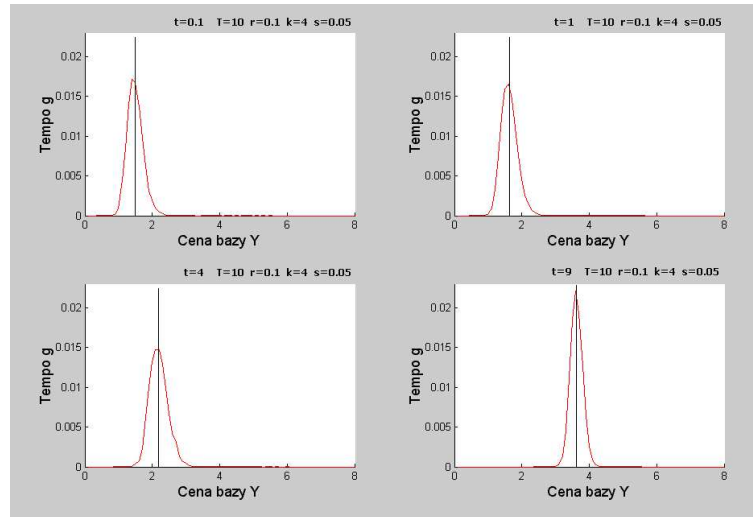


Rysunek 4.39: Przekrój tempa g czyli wskaźnika gamma w płaszczyźnie (γ, t) dla czterech przykładowo wybranych cen waloru bazowego Y , dla przykładowo wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].

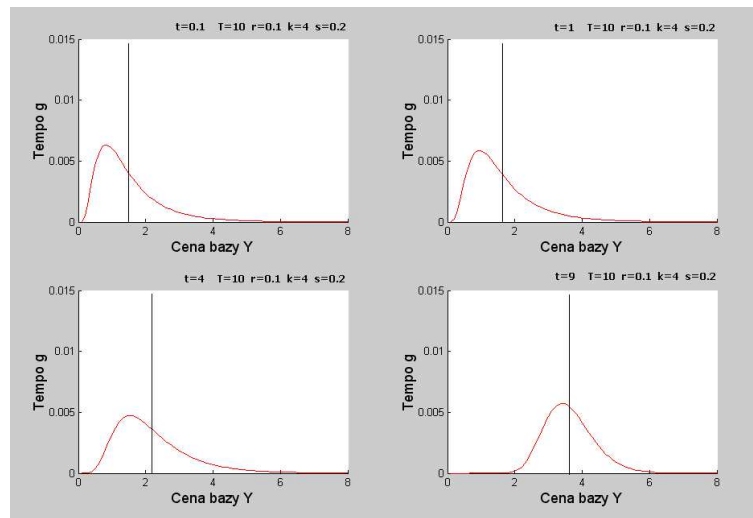


Rysunek 4.40: Przekrój tempa g czyli wskaźnika gamma w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego Y dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].

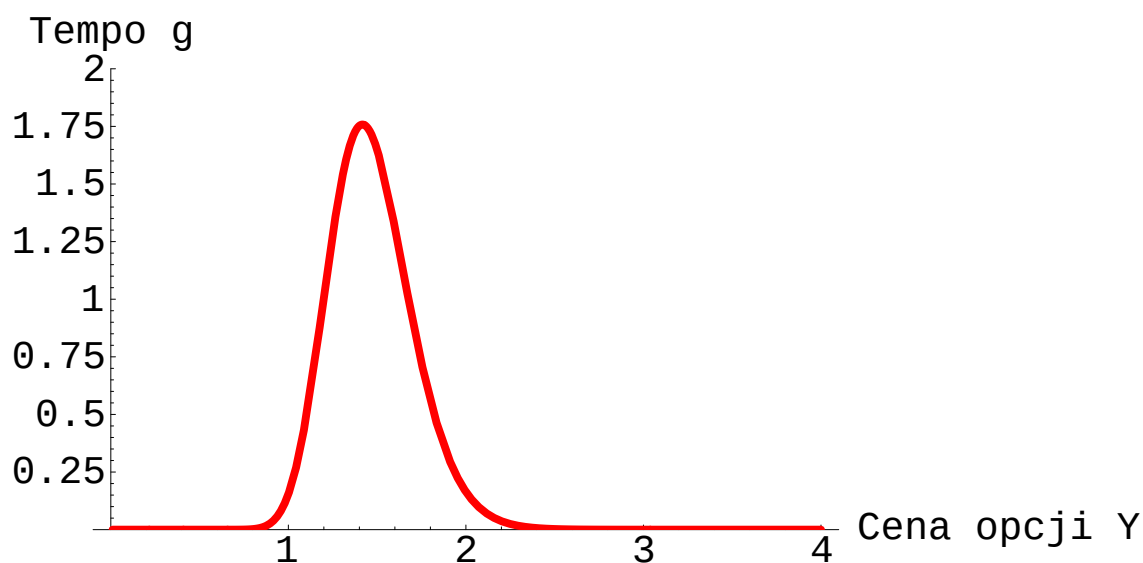
Na rysunkach 4.41 i 4.42 zamieszczono wybrane przekroje powyższych trójwymiarowych wykresów w czterech wybranych płaszczyznach (γ, Y) tzn. dla czterech różnych chwil (patrz legendy tych wykresów).



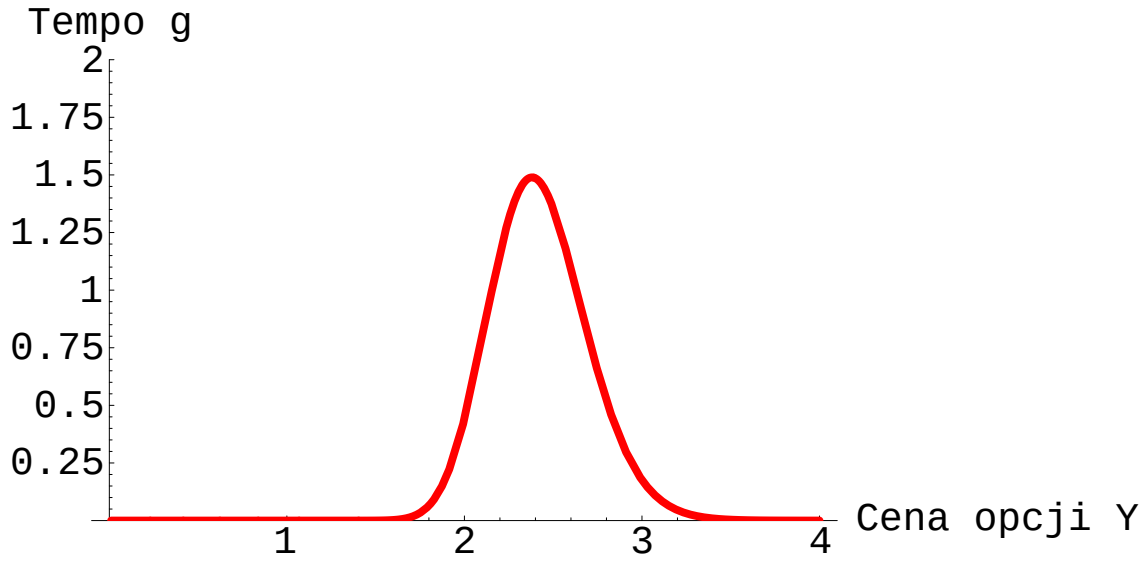
Rysunek 4.41: Wykres zależności współczynnika $\gamma(Y, t)$ od ceny bazowego instrumentu finansowego Y dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$ i dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



Rysunek 4.42: Wykres zależności współczynnika $\gamma(Y, t)$ od ceny bazowego instrumentu finansowego Y i czasu t pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].



Rysunek 4.43: Tempo g zmiany współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y(t=0), t=0)$ w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego $Y(t=0)$ otrzymane dla takiej parametryzacji jaka została przedstawiona w opisie rys. 4.19.



Rysunek 4.44: Tempo g zmiany współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y(t = T/2 = 5), t = T/2 = 5)$ w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego $Y(t = T/2 = 5)$ otrzymane dla takiej parametryzacji jaka została przedstawiona w opisie rys. 4.18.

Wskaźnik grecki lambda

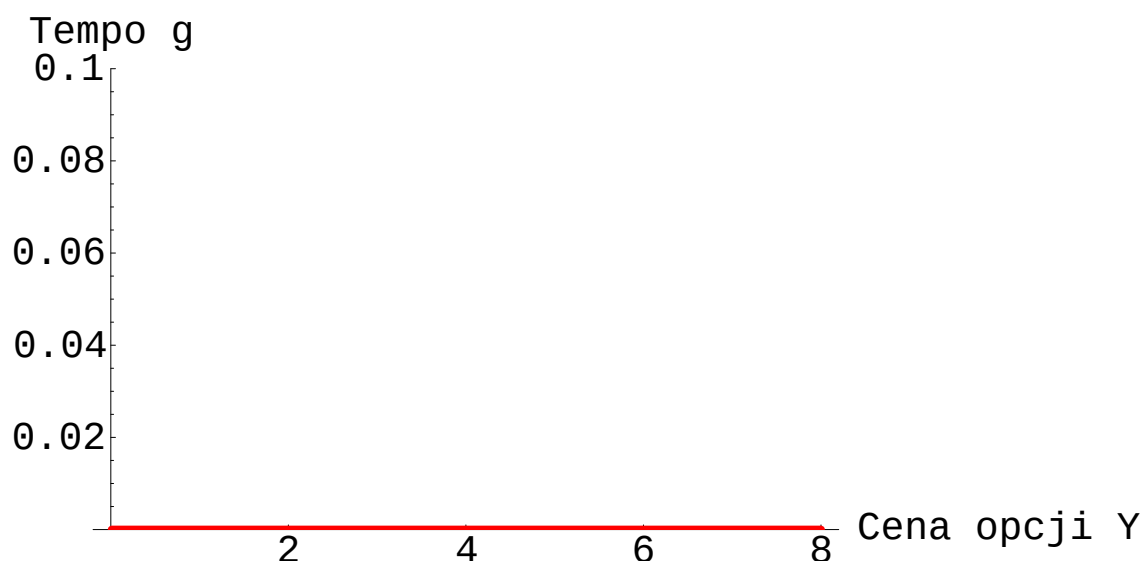
Wskaźnik ten, zwany także wskaźnikiem Vega, pozwala analizować wrażliwość (podatność) ceny opcji na zmianę zmienności instrumentu bazowego. Uzyskuje się go bezpośrednio poprzez różniczkowanie wzoru (4.152) po zmienności σ . Zatem,

$$\begin{aligned}
 \lambda(Y(t), t) &= Y N(0, 1; d_+) \frac{\partial d_+}{\partial \sigma} - K' N(0, 1; d_-) \frac{\partial d_-}{\partial \sigma} \\
 &= Y N(0, 1; d_+) \left(-\frac{1}{\sigma} d_+ + \sqrt{T-t} \right) \\
 &\quad - K' N(0, 1; d_-) \left(-\frac{1}{\sigma} d_- - \sqrt{T-t} \right),
 \end{aligned} \tag{4.161}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z wyrażenia na pochodną postaci

$$\frac{\partial d_{\pm}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} d_{\pm} \pm \sqrt{T-t}. \tag{4.162}$$

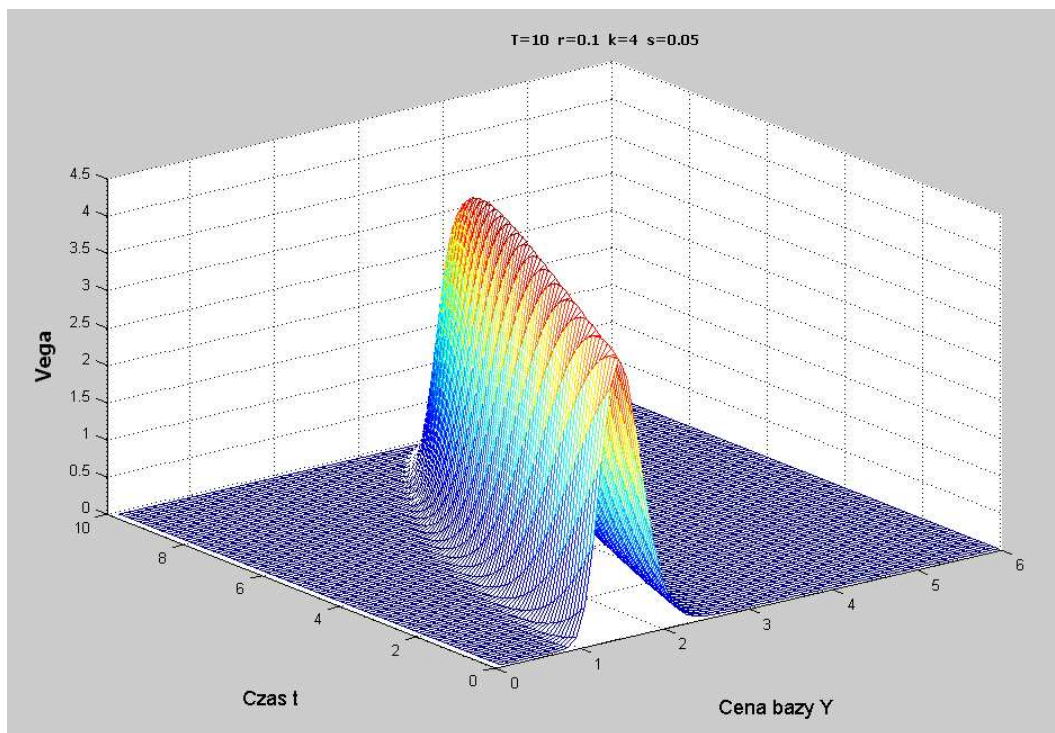
Wyrażenie to (podobnie jak analogiczne dla współczynników h i γ) można (dla $t < T$) łatwo analizować na drodze numerycznej. Tutaj, podobnie jak dla wszystkich innych współczynników, analiza jest prowadzona, przykładowo, dla dwóch istotnie różniących się wartości zmienności: $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$] oraz $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



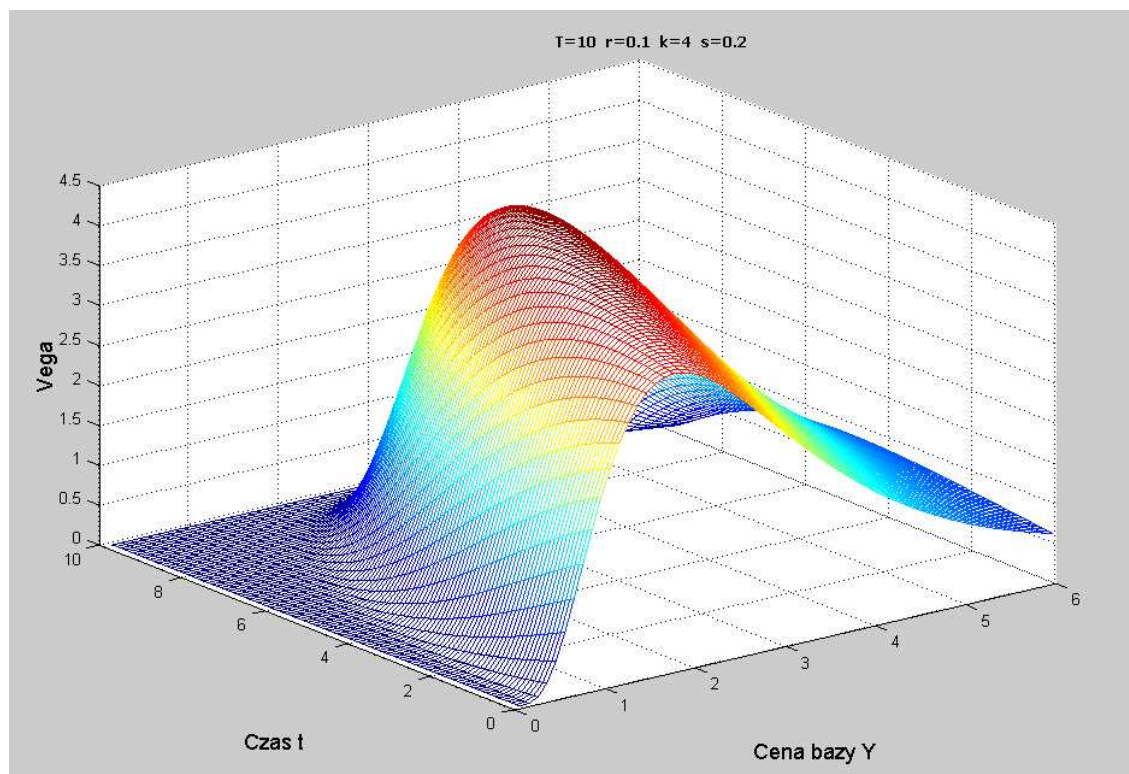
Rysunek 4.45: Tempo g zmiany współczynnika zabezpieczenia portfela wolnego od ryzyka $h(Y(t = T = 10), t = T = 10)$ w zależności od ceny bazowego instrumentu finansowego $Y(t = T = 10)$ otrzymane dla takiej parametryzacji jaka została przedstawiona w opisie rys. 4.17.

Na kolejnych trójwymiarowych wykresach zamieszczonych na rysunkach 4.46 i 4.47 przedstawiono, dla dwóch przykładowych wartości zmienności $\sigma = 0.05$ i $\sigma = 0.2$, współczynnik lambda (Vega) pozwalający określić tempo zmiany ceny opcji względem zmienności waloru podstawowego Y . Takie wykresy (podobnie jak analogiczne przedstawione w rozdz. 4.5.9 i w niniejszym rozdziale powyżej) pozwalają na analizę tego współczynnika dla dowolnej trajektorii $Y(t)$ w płaszczyźnie (t, Y) , na przykład dla dowolnie wybranej realizacji geometrycznego ruchu Browna tzn. ułatwiają inwestorowi wybór określonej strategii zarządzania aktywami.

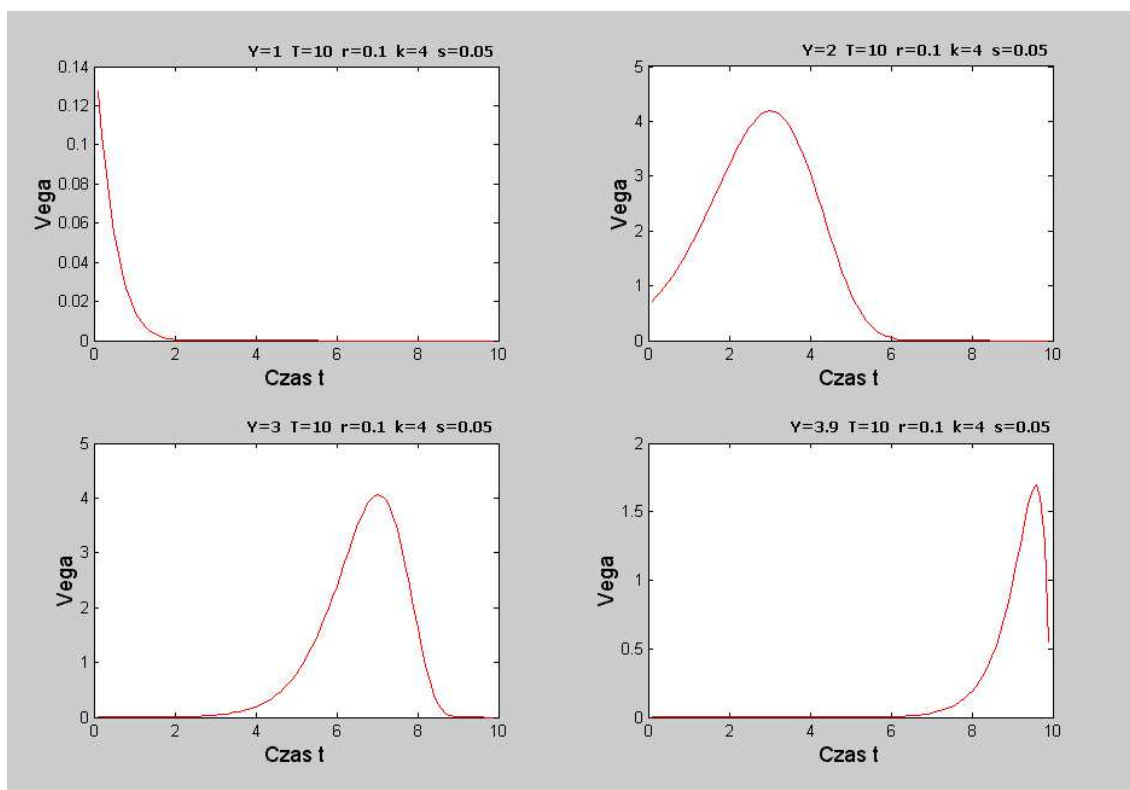
Ponadto, na rysunkach 4.48, 4.49 i 4.50 zamieszczono wybrane przekroje powyższych trójwymiarowych wykresów w płaszczyznach (λ, Y) i (λ, t) . Porównując ze sobą odpowiednio wykresy dla obu wartości zmienności widać, że wzrost zmienności prowadzi do poszerzenia wskaźnika zarówno w funkcji czasu t jak i waloru bazowego Y .



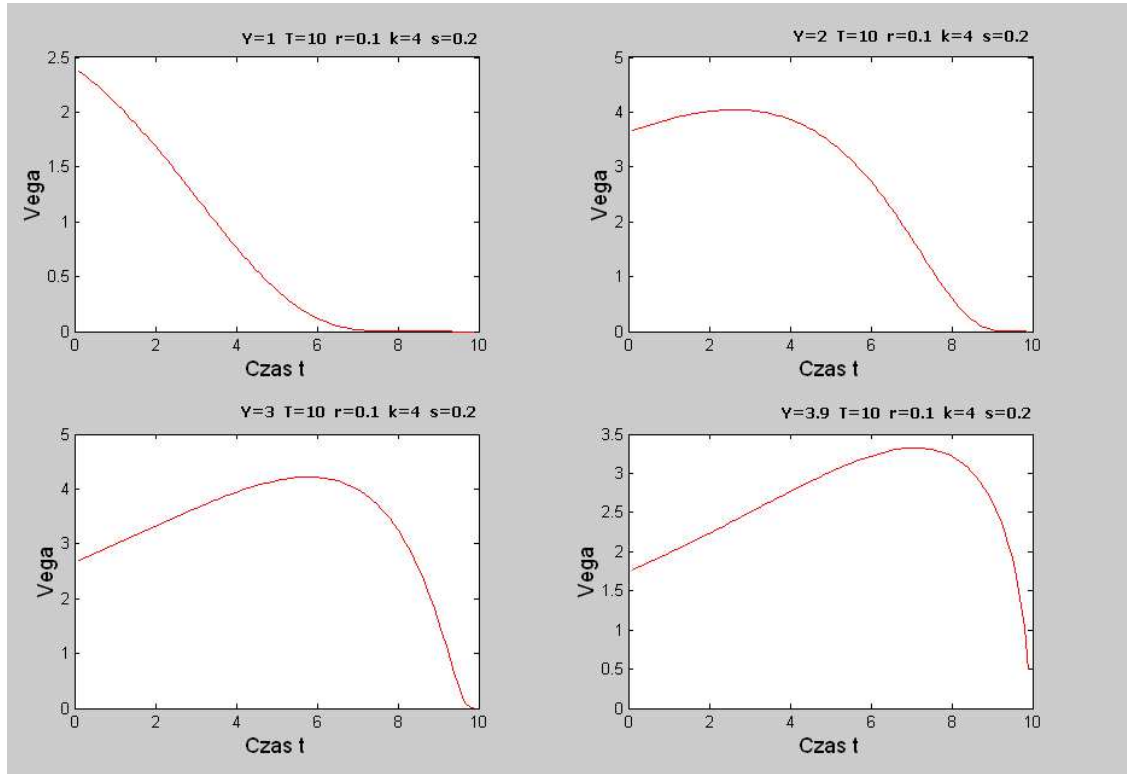
Rysunek 4.46: Trójwymiarowy wykres wskaźnika Vega (λ) w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego Y dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [$1/\sqrt{mies.}$].



Rysunek 4.47: Trójwymiarowy wykres wskaźnika Vega (λ) w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego Y dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].



Rysunek 4.48: Przekrój wskaźnika Vega (λ) w płaszczyźnie (λ, t) dla czterech przykładowo wybranych cen waloru bazowego $Y=1, 2, 3, 3.9$, dla przykładowo wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].



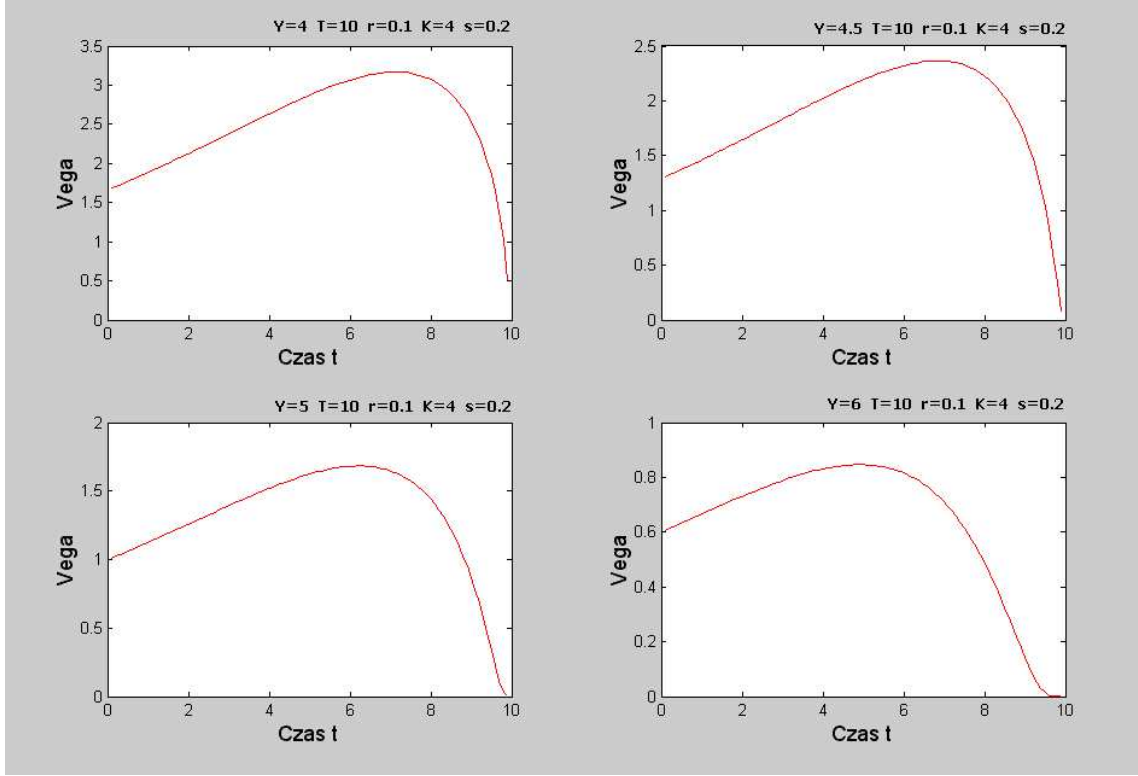
Rysunek 4.49: Przekrój wskaźnika Vega (λ) w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego $Y=1, 2, 3, 3.9$, dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

Na rysunkach 4.51 i 4.52 zamieszczono wybrane przekroje powyższych trójwymiarowych wykresów w czterech wybranych płaszczyznach (λ, Y) tzn. dla czterech różnych chwil (patrz legendy tych wykresów).

Wskaźnik grecki theta

Wskaźnik theta (θ) uzyskuje się bezpośrednio z jego definicji oraz ze wzoru BS (4.152),

$$\begin{aligned}
 \theta(Y(t), t) &= Y(t) N(0, 1; d_+) \frac{\partial d_+}{\partial \tau} - K' N(0, 1; d_-) \frac{\partial d_-}{\partial \tau} + r K' \Phi(d_-) \\
 &= Y(t) N(0, 1; d_+) \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\tau} d_+ + \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \\
 &\quad - K' N(0, 1; d_-) \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\tau} d_- + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \\
 &\quad + r K' \Phi(d_-),
 \end{aligned} \tag{4.163}$$



Rysunek 4.50: Przekrój wskaźnika Vega (λ) w zależności od czasu t i ceny waloru bazowego $Y=4, 4.5, 5, 6$, dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

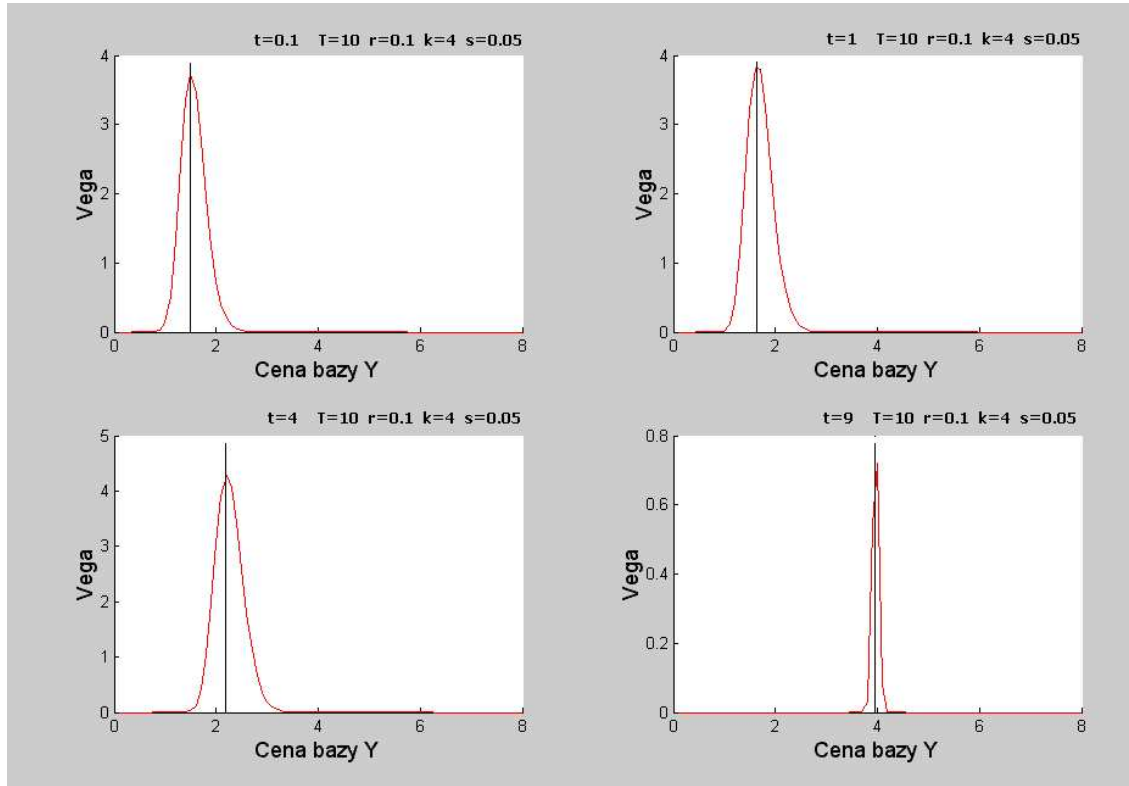
gdzie po drodze wykorzystano wyrażenie na pochodne postaci

$$\frac{\partial d_{\pm}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\tau} d_{\pm} + \frac{r \pm \sigma^2/2}{\sigma \sqrt{\tau}}. \quad (4.164)$$

Numeryczna analiza wyrażenia (4.163) nie nastęrcza (dla $t < T$) żadnych trudności.

Na rysunkach 4.53 i 4.54 przedstawiono współczynnik *theta* w zależności od ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y i od czasu t dla dwóch wyrażnie różniących się wartości zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$] oraz $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Zauważmy, że dla $t \rightarrow T$ ma miejsce rozbieżność współczynnika *theta*. Wynika to z istnienia osobliwości we wzorze (4.163) w $t = T$.

Natomiast, na rys. 4.55 przedstawiono tą zależność dla czterech przykładowo wybranych chwil.



Rysunek 4.51: Wykres zależności współczynnika Vega czyli $\lambda(Y, t)$ od ceny bazowego instrumentu finansowego Y dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$ dla wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K = 4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T = 10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r = 0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

Wskaźnik grecki rho

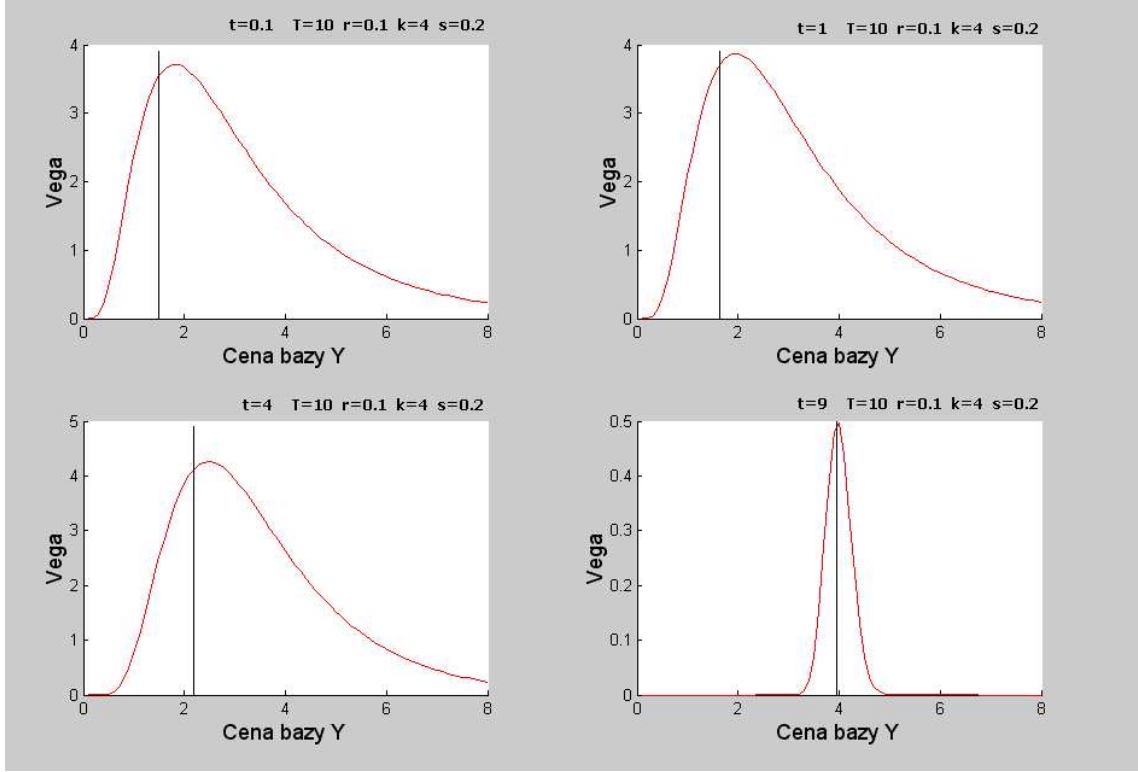
Wskaźnik rho (ρ) uzyskuje się bezpośrednio z jego definicji oraz ze wzoru BS (4.152),

$$\begin{aligned} \rho(Y(t), t) &= Y(t) N(0, 1; d_+) \frac{\partial d_+}{\partial r} - K' N(0, 1; d_-) \frac{\partial d_-}{\partial r} - (T - t) K' \Phi(d_-) \\ &= Y(t) \frac{1}{\sigma} \sqrt{T - t} (N(0, 1; d_+) - N(0, 1; d_-)) - (T - t) K' \Phi(d_-), \end{aligned} \quad (4.165)$$

gdzie po drodze wykorzystano proste wyrażenie na pochodne

$$\frac{\partial d_{\pm}}{\partial r} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{T - t}. \quad (4.166)$$

Podobnie jak dla pozostałych wskaźników, analiza numeryczna wyrażenia (4.165) nie sprawia żadnych trudności.



Rysunek 4.52: Wykres zależności współczynnika Vega ($\lambda(Y, t)$) od ceny bazowego instrumentu finansowego Y dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$, dla przykładowo wybranych wartości parametrów: ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [$1/\sqrt{\text{mies.}}$].

4.5.11 Formalne własności modelu BS: spełnienie warunku brzegowego (4.150)

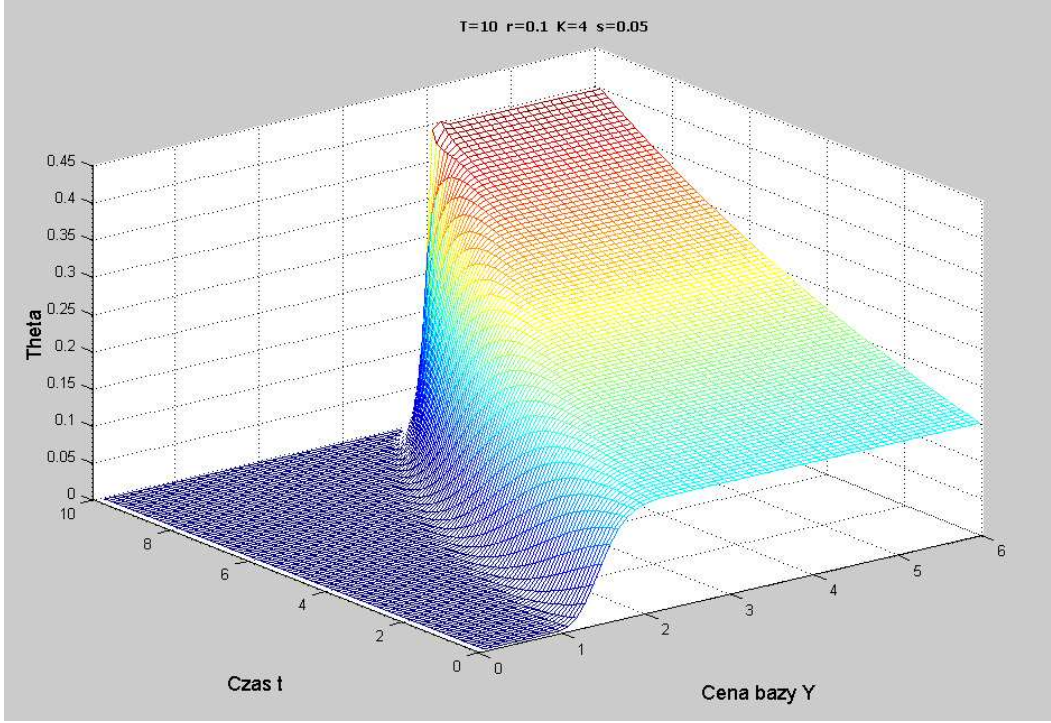
Przypuśćmy, że rozpatrujemy opcję w chwili jej wygaśnięcia $t = T$ a więc w chwili najważniejszej dla jej posiadacza. Rozważmy dwie różne sytuacje: najpierw gdy $Y(t = T) > K$. Wówczas, $d_+(t = T) = d_-(t = T) = \infty$ co daje $\Phi(d_+) = \Phi(d_-) = 1$ i w efekcie $C(Y(t = T), t = T) = Y(t = T) - K$, jak być powinno.

Odwrotnie, gdy $Y(t = T) \leq K$, wówczas $d_+(t = T) = d_-(t = T) = -\infty$, co daje $\Phi(d_+) = \Phi(d_-) = 0$ i w efekcie $C(Y(t = T), t = T) = 0$, jak trzeba.

4.5.12 Rozwiązanie równania (4.149)

Sprawdźmy teraz, że wyrażenie (w pierwszym wierszu poniżej)

$$y(x(t'), t') = \tilde{y}(x(t'), t') \Phi(d_+) - K \Phi(d_-) = \exp(r(T - t)) C(Y(t), t) = \tilde{C}(Y(t), t),$$



Rysunek 4.53: Trójwymiarowa zależność współczynnika theta od ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y i od czasu t dla ceny umownej $K = 4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T = 10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r = 0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

$$\tilde{y}(x(t'), t') = \exp(r(T - t))Y(t), \quad (4.167)$$

otrzymane z formuły wyceny opcji kupna BS (4.152) oraz podstawienia (4.137), gdzie na podstawie (4.138) i (4.139) $Y(t)$ i $T - t$ przybierają w zmiennych $x(t')$ i t' następującą postać

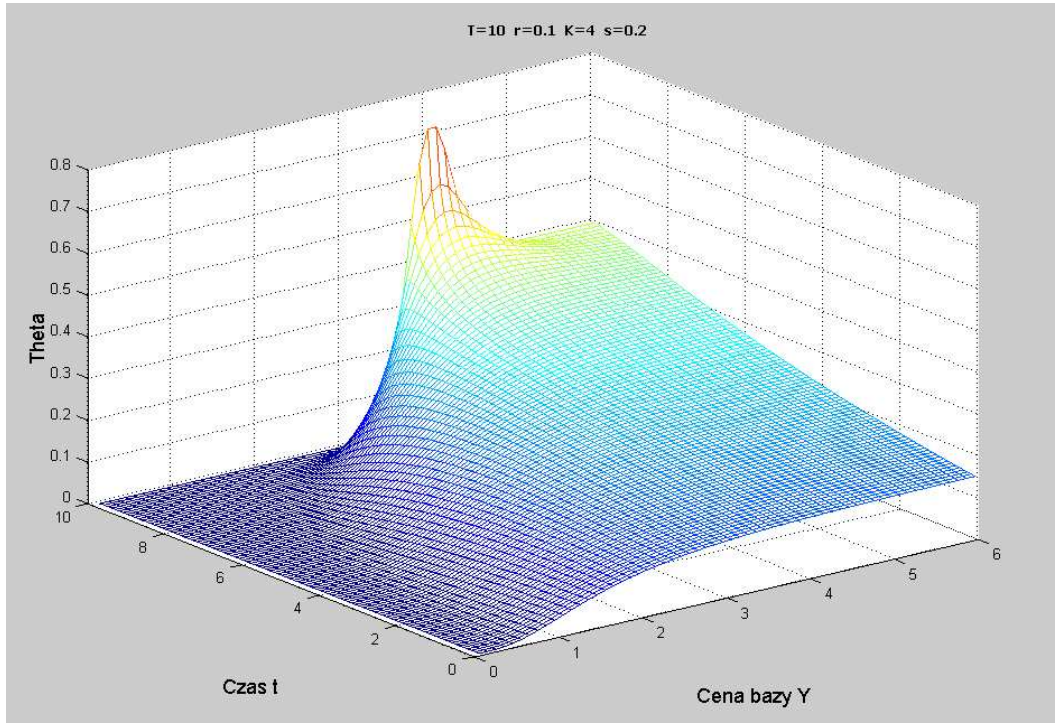
$$Y(x(t'), t') = K \exp \left((x(t') - t') \left(\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\frac{\sigma^2}{2}} \right)^{-1} \right),$$

$$T - t = t' \left(\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \right)^{-1}, \quad (4.168)$$

jest rozwiązaniem równania (4.149), przy czym

$$d_- = \frac{\ln \left(\frac{Y}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{t'}},$$

$$d_+ = d_- + \sigma \sqrt{T - t} = d_- + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}} \frac{1}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \sqrt{t'}. \quad (4.169)$$



Rysunek 4.54: Trójwymiarowa zależność współczynnika theta od ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y i od czasu t dla ceny umownej $K = 4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T = 10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r = 0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

W tym celu, przedstawmy najpierw funkcję $y(x(t'), t')$ w postaci jawnie zależnej od nowych zmiennych x i t' ; podstawiając pierwsze wyrażenie w (4.169) do (4.167) otrzymujemy,

$$y(x(t'), t') = \tilde{y}(x(t'), t')\Phi(d_+) - K\Phi(d_-), \quad (4.170)$$

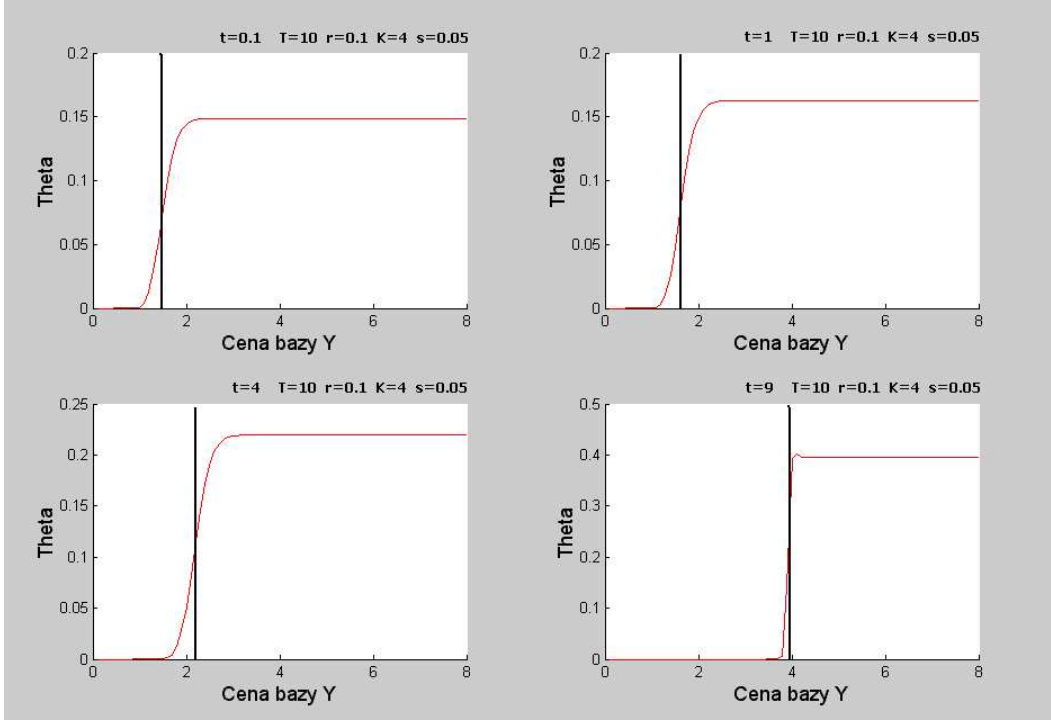
gdzie

$$\tilde{y}(x(t'), t') = K \exp\left(\frac{\sigma^2}{2\rho}\left(x(t') + \frac{\sigma^2}{2\rho}t'\right)\right), \quad (4.171)$$

przy czym $\rho \stackrel{\text{def.}}{=} r - \frac{\sigma^2}{2}$. Funkcja (4.170) stanowi podstawę kolejnych etapów obliczeń.

Wyznamy teraz pochodną pierwszego stopnia po zmiennej t'

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x(t'), t')}{\partial t'} &= \left[\left(\frac{\sigma^2}{2\rho}\right)^2 \Phi(d_+) + \frac{d\Phi(d_+)}{dd_+} \frac{\partial d_+}{\partial t'} \right] \tilde{y}(x(t'), t') - K \frac{d\Phi(d_-)}{dd_-} \frac{\partial d_-}{\partial t'} \\ &= \left[\left(\frac{\sigma^2}{2\rho}\right)^2 \Phi(d_+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_+)^2}{2}\right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{t'^{3/2}} + \frac{\sigma^2}{2\sqrt{2}\rho} \frac{1}{\sqrt{t'}}\right) \right] \end{aligned}$$



Rysunek 4.55: Zależność współczynnika theta od ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$, dla ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

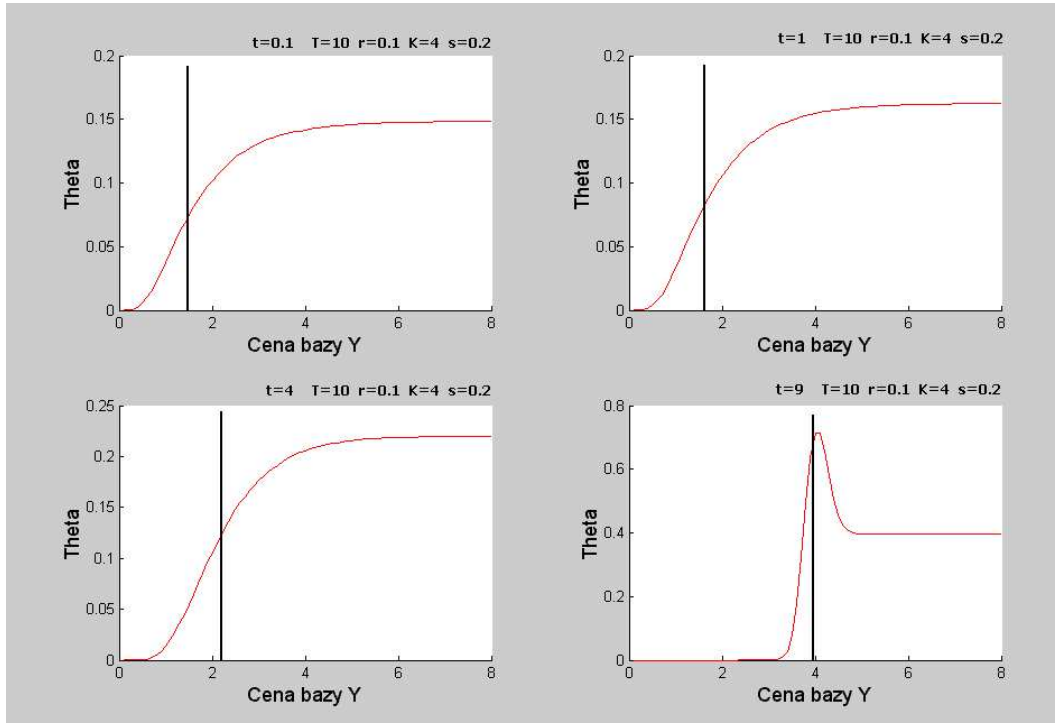
$$\begin{aligned}
& \times \tilde{y}(x(t'), t') \\
& + K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_-)^2}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{t'^{3/2}}
\end{aligned} \tag{4.172}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z zależności

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(d_{\pm})}{dd_{\pm}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_{\pm})^2}{2}\right), \\
\frac{\partial d_+}{\partial t'} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{t'^{3/2}} + \frac{\sigma^2}{2\sqrt{2}\rho} \frac{1}{\sqrt{t'}}, \\
\frac{\partial d_-}{\partial t'} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{t'^{3/2}},
\end{aligned} \tag{4.173}$$

i podobnie po zmiennej x

$$\frac{\partial y(x, t')}{\partial x} = \left[\frac{\sigma^2}{2\rho} \Phi(d_+) + \frac{d\Phi(d_+)}{dd_+} \frac{\partial d_+}{\partial x} \right] \tilde{y}(x(t'), t') - K \frac{d\Phi(d_-)}{dd_-} \frac{\partial d_-}{\partial x}$$

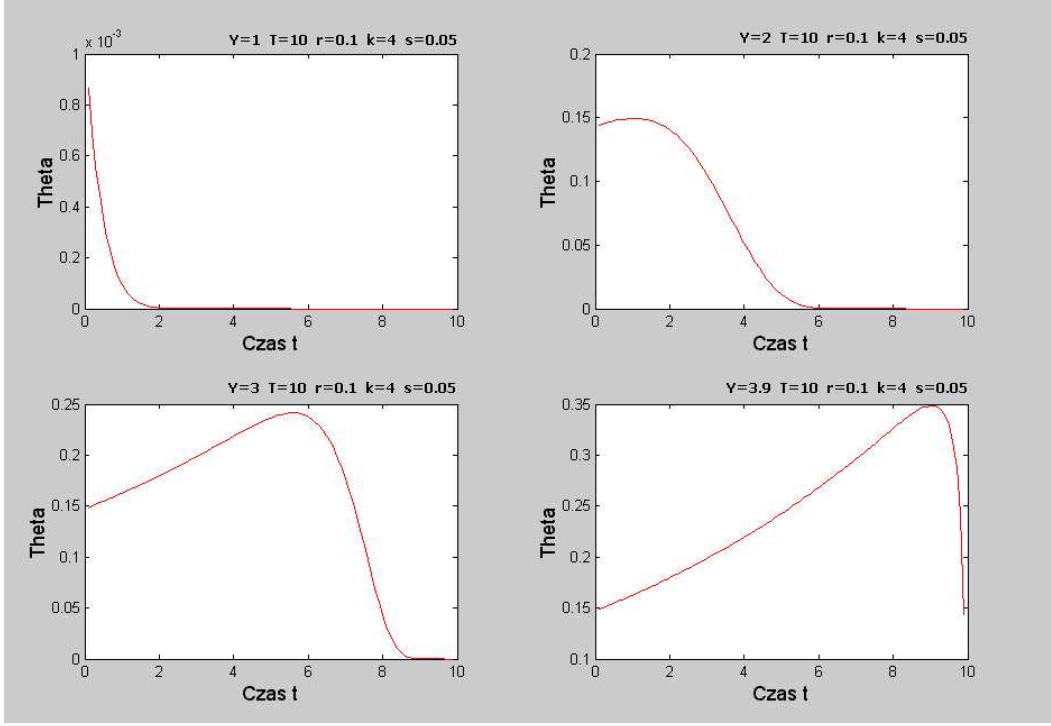


Rysunek 4.56: Zależność współczynnika theta od ceny podstawowego (bazowego) instrumentu finansowego Y dla czterech wybranych chwil $t=0.1, 1, 4, 9$, dla ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\sigma^2}{2\rho} \Phi(d_+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_+)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t'}} \right] \tilde{y}(x(t'), t') \\
&- K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_-)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t'}}
\end{aligned} \tag{4.174}$$

oraz pochodna drugiego stopnia po zmiennej x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y(x, t')}{\partial x^2} &= \left[\left(\frac{\sigma^2}{2\rho} \right)^2 \Phi(d_+) + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\rho}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_+)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{t'}} \right. \\
&- \left. \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{t'}} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\rho}} \sqrt{t'} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_+)^2}{2}\right) \frac{1}{2} \frac{1}{t'} \right] \tilde{y}(x(t'), t') \\
&+ K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_-)^2}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{t'^{3/2}} \\
&= \frac{\partial y(x, t')}{\partial t};
\end{aligned} \tag{4.175}$$

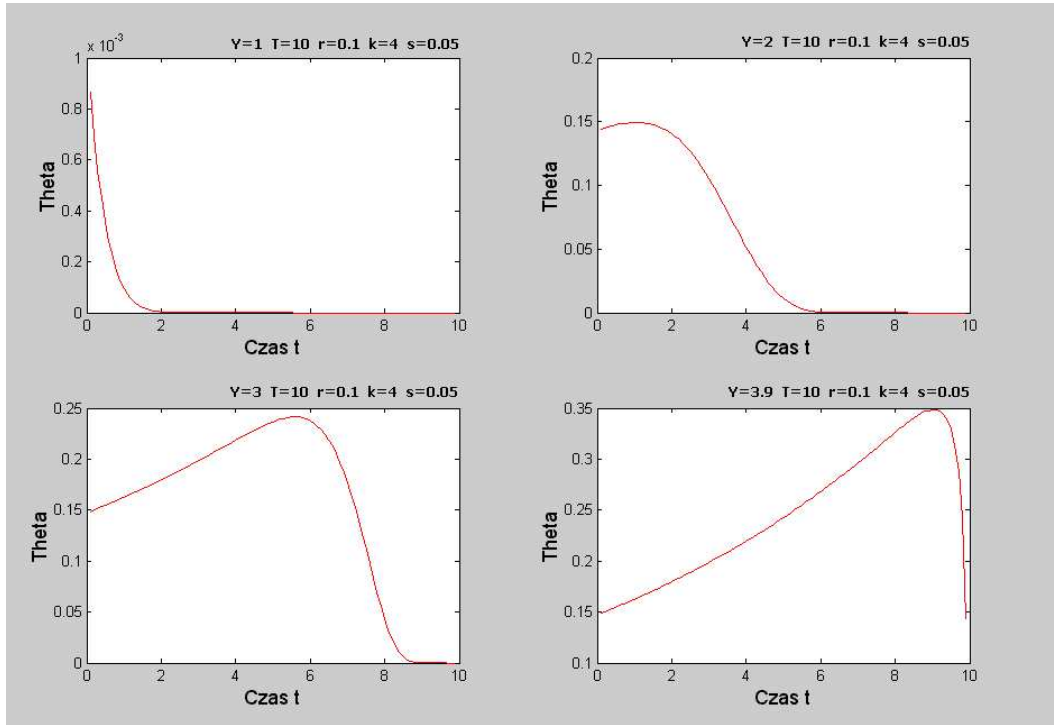


Rysunek 4.57: Zależność współczynnika theta od czasu t dla czterech wybranych wartości instrumentu bazowego $Y=1, 2, 3, 4$, dla ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

drugą równość otrzymano po uporządkowaniu wyrazów w pierwszej (czyli po dodaniu drugiego wyrazu w pierwszym wierszu do drugiego w drugim) - zauważmy, że drugi wyraz w pierwszym wierszu po prawej stronie powstał z sumy dwóch połówek tego wyrazu. Przy wyprowadzeniu (4.175) skorzystaliśmy z pomocniczych równości

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial d_{\pm}}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t'}}, \\
 d_- \frac{\partial d_-}{\partial x} &= d_- \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t'}} = \frac{x}{2t'}, \\
 d_+ \frac{\partial d_+}{\partial x} &= d_+ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t'}} = d_- \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t'}} + \frac{\sigma^2}{2\rho} = \frac{x}{2t'} + \frac{\sigma^2}{2\rho}.
 \end{aligned} \tag{4.176}$$

W ten sposób wykazaliśmy wprost co należało, czyli spełnienie równania (4.149) przez funkcję $y(x, t')$.

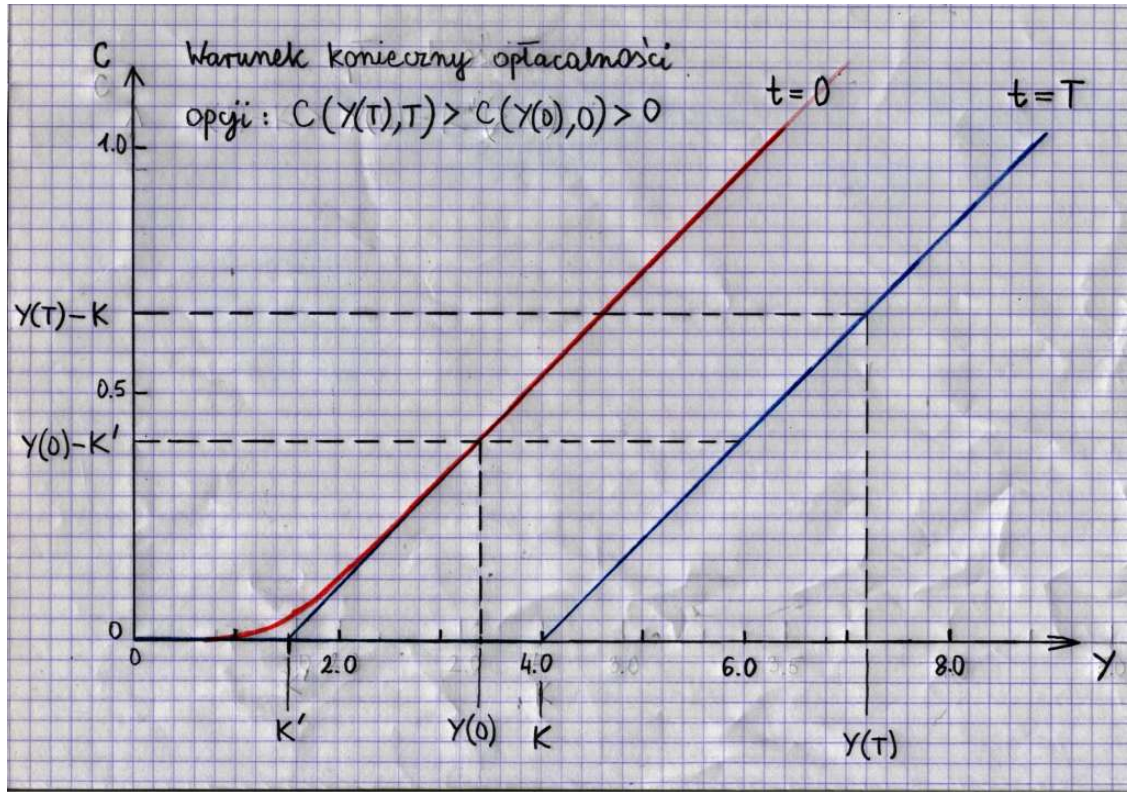


Rysunek 4.58: Zależność współczynnika theta od czasu t dla czterech wybranych wartości instrumentu bazowego $Y=1, 2, 3, 4$, dla ceny umownej $K=4$ [j.u.], terminu realizacji opcji $T=10$ [mies.], pozagiełdowej stopy zwrotu $r=0.1$ [1/mies.] oraz zmienności $\sigma = 0.2$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$].

4.5.13 Elementy rynku rzeczywistego - własności opcji kupna uwzględniające prowizję

Opłacalność opcji kupna. Na rys. 4.59 przedstawiliśmy cenę opcji dla dwóch charakterystycznych chwil: zakupu $t = 0$ i realizacji $t = T$ (porównaj także wykresy zamieszczone na rysunkach 4.19, 4.18 i 4.17). Podane na rys. 4.59 oszacowanie na opłacalność opcji wynika bezpośrednio z porównania obu przebiegów C w zależności od Y , które dostarcza racjonalnego warunku na wysokość opłaty wstępnej. Warunek ten mówi, że wysokość prowizji M powinna być równa cenie opcji $C(Y(0), 0)$ w chwili zawarcia kontraktu terminowego, gdyż w przypadku niższej prowizji pojawi się okazja do arbitrażu (zysku bez ryzyka) a na wyższą nie zgodzi się inwestor (uważając, że ryzyko jest za wysokie). Ponadto, opłacalność opcji kupna wymaga aby **cena opcji w chwili $t = 0$ była mniejsza od ceny opcji w chwili $t = T$** . Zatem,

$$\begin{aligned} C(Y(T), T) &= Y(T) - K > C(Y(0), 0) = Y(0) - K' = M \\ &\Rightarrow Y(T) > Y(0) + K[1 - \exp(-rT)], \end{aligned} \quad (4.177)$$



Rysunek 4.59: Analiza opłacalności ceny dla posiadacza opcji kupna poprzez porównanie zależności jej ceny C od ceny waloru Y dla chwili realizacji opcji $t=T$ i chwili zawierania kontraktu $t=0$.

gdzie po drodze skorzystaliśmy z relacji $K' = K \exp(-rT)$ oraz z warunku (4.150).

Nasze rozważania dotyczą takiego zakresu ceny waloru bazowego w chwili $t = 0$, w którym cena opcji osiąga już (z dobrym przybliżeniem) wartość asymptotyczną czyli zakres względnie dużych zysków na opcji (tzn. względnie wysokiej ceny opcji) a także względnie dużej prowizji. Właśnie dzięki temu prawą stronę powyższej nierówności uzyskaliśmy w tak prostej postaci; stąd, bezpośrednio wynika oszacowanie opłacalności opcji i otrzymanie warunku na opłacalną cenę bazowego instrumentu finansowego. Mianowicie widać, że warunek (4.177) jest równoważny następującemu, wyrażającemu się poprzez stopę zwrotu r_Y na instrumencie bazowym w całym okresie trwania opcji

$$\frac{Y(T) - Y(0)}{Y(0)} = r_Y > \frac{K}{Y(0)} [1 - \exp(-rT)], \quad (4.178)$$

który wykorzystamy poniżej. Należy podkreślić, że wyrażenie (4.177) (a tym samym (4.178)) mówi tylko o opłacalnej cenie instrumentu bazowego natomiast nie wskazuje jaką strategią jest bardziej opłacalna:

- A) realizacja kontraktu terminowego na opcję kupna czy, po prostu,
- B) obrót bazowym instrumentem finansowym.

Podamy teraz warunek na taką progową cenę bazowego instrumentu finansowego $Y_{prog}(T)$ powyżej której opłacalne staje się wykorzystywanie przez inwestora giełdowego strategii A). Mianowicie, opłacalność ta ma miejsce wtedy i tylko wtedy gdy stopa zwrotu r_C wynikająca z realizacji kontraktu terminowego jest większa od stopy zwrotu r_Y na instrumencie bazowym czyli:

$$r_C = \frac{Y(T) - K - M}{M} > r_Y = \frac{Y(T) - Y(0)}{Y(0)} (> 0), \quad (4.179)$$

skąd (po prostych przekształceniach wykorzystujących fakt, że wielkość prowizji $M = Y(0) - K'$) otrzymujemy, iż poszukiwana cena

$$Y(T) > Y_{prog}(T) \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(rT)Y(0), \quad (4.180)$$

czyli ma być większa od skapitalizowanej ceny instrumentu bazowego w chwili wygaśnięcia opcji, czego należało się spodziewać. Zauważmy, że dla $Y(T) = Y_{prog}(T)$ obie strategię są jednakowo opłacalne. Jak widać, opłacalności strategii A) nie niszczy nawet pobieranie przez biuro maklerskie prowizji (M dopuszczonej przez oszacowanie (4.177)).

Dodatkowo zauważmy, że warunek (4.180) jest równoważny następującemu, szacującemu od dołu stopę zwrotu z akcji:

$$\frac{Y(T) - Y(0)}{Y(0)} = r_Y > \frac{K - K'}{K'} > \frac{K - K'}{Y(0)}, \quad (4.181)$$

(gdzie przy wyprowadzaniu ostatniej nierówności skorzystaliśmy z oczywistego, wspomnianego powyżej warunku istnienia prowizji tzn. $C(Y(0), 0) = Y(0) - K' = M > 0$).

Omawiana powyżej opłacalność opcji kupna jest jednym z elementów rzeczywistego (a nie idealnego) rynku finansowego, gdyż uwzględnia opłatę wstępną M , która nie jest brana pod uwagę w kanonicznym modelu Blacka-Scholesa. Do dynamiki opcji na rynku rzeczywistym jeszcze powrócimy na końcu tego rozdziału.

Aby zilustrować powyższe rozważania przedyskutujmy następujący przykład.

Przykład

Przypuśćmy, że inwestor decyduje się na zakup jakiejś akcji, której obecna wartość wynosi $Y(0) = 100 \text{ PLN}$ wierząc, że w przyszłości, powiedzmy po kwartale ($T = 3 \text{ mies.}$), jej wartość wzrośnie do $Y(T) = 150 \text{ PLN}$. Przyjmując wielkość stopy procentowej (czyli zwrotu na instrumentach finansowych pozbawionych ryzyka)

r w tym okresie równą $0.1\%/mies.$ ³⁷, inwestor łatwo wyznaczy w oparciu o wzór (4.180) poszukiwaną cenę progową

$$Y_{prog}(T = 3 \text{ mies.}) = 134.99 \text{ PLN.} \quad (4.182)$$

Oczywiście, gdyby $Y(T) = Y_{prog}(T)$ wówczas obie strategię byłyby jednakowo opłacalne.

Porównamy teraz obie stopy zwroty r_C i r_Y korzystając z (4.179) i przyjmując, że spełniony jest warunek dyskryminujący (4.180). W związku z tym ustalamy cenę umowną na $K = 110 \text{ PLN}$ czyli na taką aby $M > 0$; zatem, z (4.177) otrzymujemy, że przewidziana $M = Y(0) - K \exp(-rT) = 18.51 \text{ PLN}$. Ostatecznie,

$$r_C = 1.161 > r_Y = 0.5. \quad (4.183)$$

Jak widać, opłacalność strategii realizacji kontraktu terminowego na opcje kupna jest w tym przykładzie ponad dwukrotnie wyższa od strategii polegającej tylko na obrocie bazowym instrumentem finansowym. Zwróćmy uwagę, że ryzyko tej bardziej opłacalnej strategii A) jest mniejsze gdyż w sytuacji niekorzystnej inwestor traci tylko prowizję (w naszym przykładzie kwotę $M = 18.51 \text{ PLN}$) podczas gdy w przypadku mniej opłacalnej strategii B) inwestor może stracić wszystko czyli kwotę $Y(0)$ (w naszym przykładzie jest to kwota $Y(0) = 100 \text{ PLN}$; oczywiście, ma to miejsce wtedy gdy posiadany instrument finansowy stracił całkowicie swoją wartość).

4.5.14 Dochód posiadacza opcji sprzedaży

Historycznie rzecz biorąc, model BS dotyczył dynamiki europejskiej opcji kupna czyli opcji 'call' zarówno dla nabywcy, czyli znajdującego się w pozycji długiej (ang. 'long call'), jak i wystawcy, czyli znajdującego się w pozycji krótkiej (ang. 'short call') - poniżej zastosujemy ten model do opisu dynamiki opcji sprzedaży czyli opcji 'put' zarówno dla nabywcy (pozycja ang. 'long put') i wystawcy (pozycja ang. 'short call').

Metoda parytetu sprzedaż-kupno (ang. 'put-call parity'). Można łatwo sprawdzić, że cena opcji sprzedaży

$$C(Y(t), t) = K \exp(-r(T - t))[1 - \Phi(d_-)] - Y(t)[1 - \Phi(d_+)], \quad (4.184)$$

spełniająca warunki brzegowe

$$\begin{aligned} C(Y(t = T), t = T) &= \max\{K - Y(t = T), 0\}, \\ C(Y(t) = 0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.185)$$

³⁷Należy przypomnieć, że stopa procentowa jest ustalana kwartalnie przez Bank Centralny, np. NBP, czyli jest związana z danym rynkiem finansowym i w tym sensie nie jest swobodnym parametrem modelu BS.

wymagane przez tego typu opcje³⁸, spełnia równanie BS (4.136).

³⁹Aby sprawdzić, że (4.184) jest rozwiązaniem równania BS należy po pierwsze zauważyć, że

$$C(Y(t), t) = C_C(Y(t), t) + C_{PC}(Y(t), t), \quad (4.186)$$

gdzie

$$C_C(Y(t), t) = Y(t)\Phi(d_+) - K \exp(-r(T - t))\Phi(d_-), \quad (4.187)$$

jest poprzednio omawianą opcją kupna dla nabywcy a więc spełniającą równanie BS, natomiast

$$C_{PC}Y(t), t) = K \exp(-r(T - t)) - Y(t) \quad (4.188)$$

jest konieczną korektą także spełniającą równanie BS o czym można się łatwo przekonać dokonując wymaganych w tym równaniu różniczkowań. Zauważmy, że

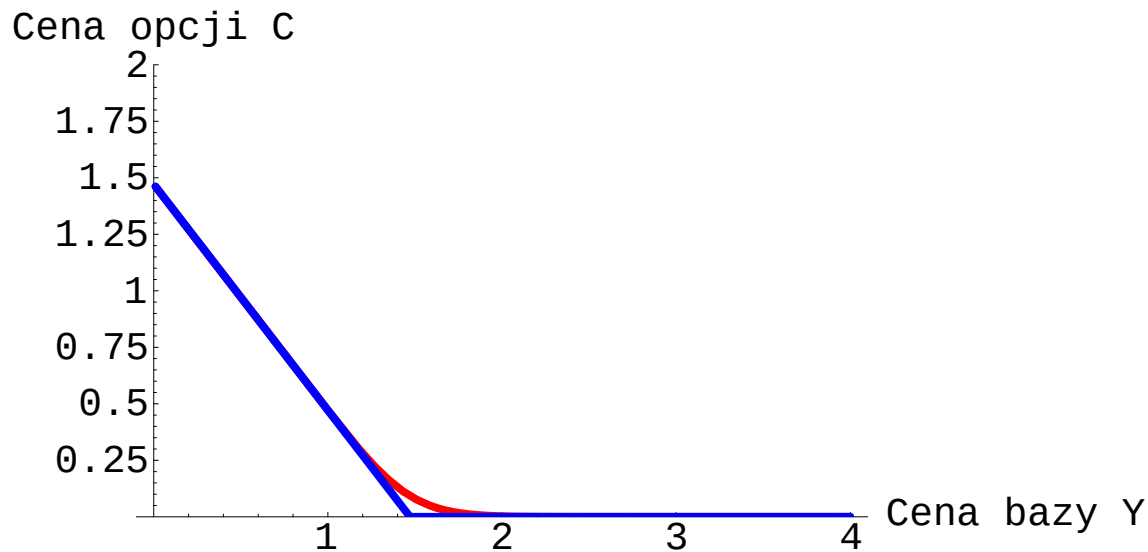
$$|C_{PC}Y(t), t)| = |K \exp(-r(T - t)) - Y(t)| \quad (4.189)$$

możnaby interpretować jako uproszczoną opcją jednoczesnego kupna i sprzedaży dla jej nabywcy.

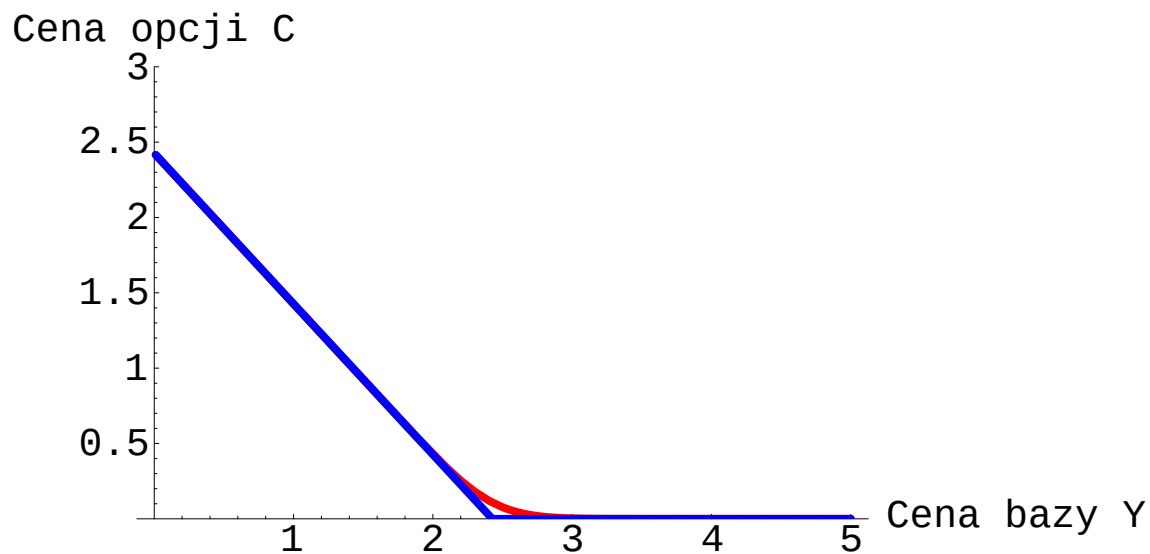
Na trzech kolejnych rysunkach 4.60, 4.61 i 4.62 przedstawiliśmy charakterystyczne przebiegi ceny opcji sprzedaży dla nabywcy; dla wystawcy są analogiczne ale z przeciwnym znakiem.

³⁸Raczej nie kontraktuje się nieliniowych warunków brzegowych.

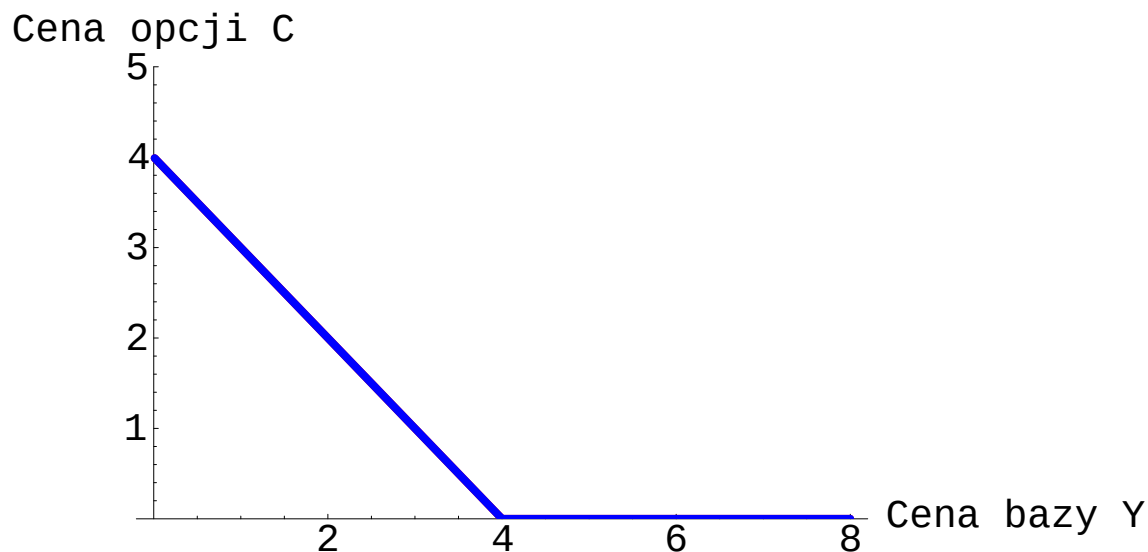
³⁹Przy pierwszym czytaniu można ten akapit opuścić.



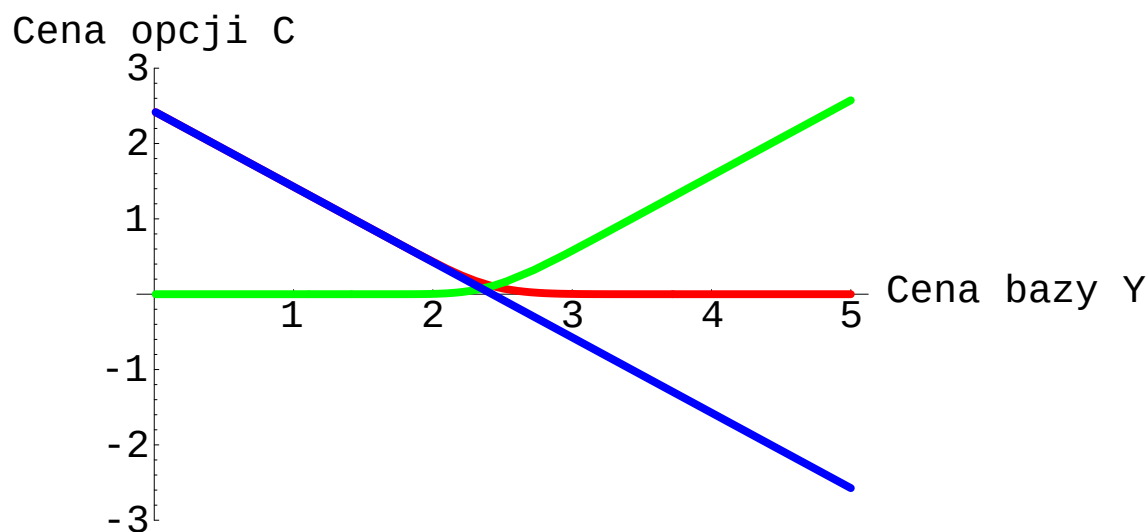
Rysunek 4.60: Dochód C posiadacza opcji sprzedaży w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y uzyskana w oparciu o formułę (4.184) dla czasu $t=0$ (czyli dla chwili pośredniej) oraz wartości parametrów modelu takich jak dla rozwiązania przedstawionego na dwóch poprzednich rysunkach: $K = 4$ [j.u.], $T = 10$ [mies.], $r = 0.1$ [1/mies.], $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Podobnie jak na rys. 4.18 rozwiązanie równania BS (linia czerwona) odbiega wyraźnie w części centralnej od swojej asymptotyki ukośnej (linia niebieska).



Rysunek 4.61: Dochód C posiadacza opcji sprzedaży w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y uzyskana w oparciu o formułę (4.184) dla czasu $t=T/2$ (czyli dla chwili pośredniej) oraz wartości parametrów modelu takich jak dla rozwiązania przedstawionego na dwóch poprzednich rysunkach: $K = 4$ [j.u.], $T = 10$ [mies.], $r = 0.1$ [1/mies.], $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Podobnie jak na rys. 4.18 rozwiązanie równania BS (linia czerwona) odbiega wyraźnie w części centralnej od swojej asymptotyki ukośnej (linia niebieska).



Rysunek 4.62: Dochód C posiadacza opcji sprzedaży w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y uzyskana w oparciu o formułę (4.184) dla czasu $t=T$ (czyli dla chwili pośredniej) oraz wartości parametrów modelu takich jak dla rozwiązania przedstawionego na dwóch poprzednich rysunkach: $K = 4$ [j.u.], $T = 10$ [mies.], $r = 0.1$ [1/mies.], $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Podobnie jak na rys.4.17 rozwiązanie równania BS (linia czerwona) pokrywa się ze swoją asymptotyką ukośną (linia niebieska).



Rysunek 4.63: Analiza dochodu $C(Y(t), t)$ posiadacza opcji sprzedaży w zależności od ceny podstawowego instrumentu finansowego Y uzyskana w oparciu o formułę BS (4.184) dla czasu $t=T/2$ (czyli dla chwili pośredniej) oraz wartości parametrów modelu takich jak dla rozwiązania przedstawionego na dwóch poprzednich rysunkach: $K = 4$ [j.u.], $T = 10$ [mies.], $r = 0.1$ [1/mies.], $\sigma = 0.05$ [1/ $\sqrt{\text{mies.}}$]. Cena opcji (linia czerwona) został zdekomponowana na dwie składowe: linię zieloną opisującą składową ceny $C_C(Y(t), t)$ oraz linię niebieską opisującą składową $C_{PC}(Y(t), t)$.

Część III

Procesy niegaussowskie

Rozdział 5

Fraktale stochastyczne

Fraktale stochastyczne to obiekty jakie powstają przez wprowadzenie szumu (czyli zaburzeń statystycznych) do deterministycznych (tradycyjnych) struktur fraktalnych takich jak np. fraktale samopodobne lub samopokrewne (inaczej samopowinowate). Innymi słowy, fraktale stochastyczne tym się różnią od deterministycznych, że zawierają element przypadku, który może modyfikować daną strukturę fraktalną - modyfikacja ta może być wieloraka. Otrzymane w ten sposób fraktale stochastyczne należą, na ogół, do klas uniwersalności różnych od tych do jakich należą ich deterministyczne pierwowzory. Oczywiście, *fraktale stochastyczne są znacznie bliższe obiektom występującym w przyrodzie*, takim jak np. materiały porowate, czy ogólniej mówiąc, układy perkolujące bądź też obszary rozgraniczenia faz, *niż fraktale deterministyczne*; te ostatnie stanowią raczej wyidealizowany punkt odniesienia, ułatwiający rozważania.

Droga jaką obraliśmy aby przedstawić fraktale stochastyczne składa się z dwóch etapów - najpierw omawiamy *fraktale przypadkowe* a następnie szerszą klasę, czyli *fraktale statystyczne*. Te pierwsze powstają poprzez prostą, przypadkową modyfikację fraktali deterministycznych (patrz rozdz. 5.2), bez naruszania wymiaru fraktalnego deterministycznych "rodziców", w przeciwieństwie do fraktali statystycznych, które w ogólności mają wymiary fraktalne różne od swoich deterministycznych pierwowzorów (patrz rozdz. 5.3). Podejście tego typu dostarcza wskazówek pozwalających na rozwiązywanie niektórych zagadnień odwrotnych, np. dotyczących makroskopowych statystycznych struktur fraktalnych¹.

5.1 Fraktale matematyczne a fraktale fizyczne

Zwykle, mówiąc o fraktalach (bez żadnych dodatkowych przymiotników) ma się na myśli matematyczne fraktale deterministyczne. Ale *fraktale matematyczne w przyrodzie nie występują*. Rodzi się zatem pytanie dlaczego fizycy się nimi zajmują? Należy

¹Zagadnienie odwrotne polega na znalezieniu wymiaru fraktalnego danej statystycznej struktury fraktalnej, dysponując jedynie pojedynczym egzemplarzem takiej struktury.

ono do tej samej kategorii co pytanie o przydatność rachunku różniczkowego i całkowego dla fizyki. Przecież w przyrodzie mamy do czynienia tylko ze skończonymi przyrostami a nie z wielkościami granicznymi, infinitezymalnie małymi. Na przykład, pomiar prędkości jest zawsze tylko pomiarem skończonego odcinka drogi przebytego przez dane ciało w skończonym czasie i nic więcej. Występujące w definicji prędkości przejście graniczne jest tylko matematyczną idealizacją - możliwość takiej idealizacji wynika z obserwacji co do wystarczająco regularnego zachownia się kolejnych coraz to mniejszych przyrostów drogi pokonywanych w odpowiednio krótszych odcinkach czasu. Mówimy o takiej procedurze, że jest zbieżna. Pozwala to zatrzymać nasze pomiary na, siłą rzeczy, skończonym poziomie ziarnistości bowiem, nie ma sensu mierzyć prędkości pędzącego samochodu poprzez pomiar milimetrowych odcinków drogi pokonywanych w milisekundowych przedziałach czasu. Podobnie rzecz się ma z obiektami samopodobnymi lub samopokrewnymi, czy mówiąc ogólniej z fraktalami bądź multifraktalami. W rzeczywistości, możemy mówić zawsze tylko o skończonej liczbie pokoleń struktury samopodobnej czy samopokrewnej lub inaczej o skończonej liczbie skal czasoprzestrzennych. Innymi słowy, *fraktale fizyczne to w istocie prefraktale czy nawet premultifraktale stochastyczne*; pomimo tego, używając analizy fraktalnej możemy (z kontrolowaną dokładnością) przewidzieć zachowanie się realnego układu w wielu interesujących nas skalach, czyli zachowaniu wieloskalowym.

5.2 Fraktale przypadkowe

Poniżej omawiamy dwa rodzaje struktur fraktalnych mianowicie ograniczone, których (całkowity) liniowy rozmiar L jest niezależny od poziomu ziarnistości (skali) oraz fraktale nieograniczone, których (całkowity) liniowy rozmiar rośnie w miarę przechodzenia do obrazu coraz bardziej gruboziarnistego (coraz większej skali). Krótko mówiąc, *fraktale ograniczone to obiekty powstające poprzez odpowiednie zdefektowanie jednorodnej struktury w głąb*, podczas gdy *fraktale nieograniczone powstają przez odpowiednio zdefektowany wzrost*. W niniejszym rozdziale omawiamy w zasadzie, jako najbardziej przydatne ze względów pragmatycznych, tylko wymiar samopodobieństwa oraz wymiar pudełkowy dla obu rodzajów struktur fraktalnych.

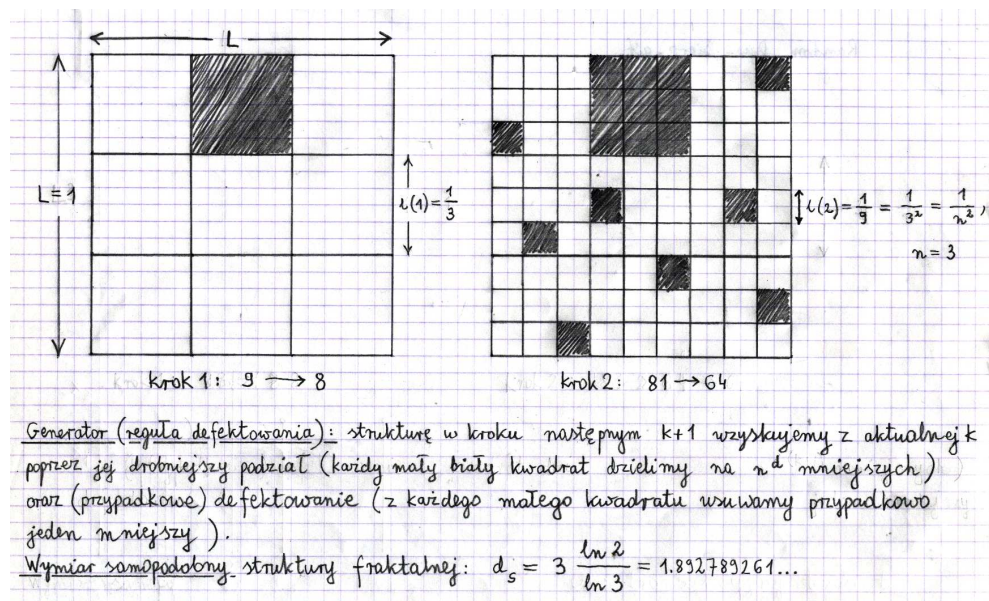
5.2.1 Ograniczone fraktale samopodobne

Nasze rozważania rozpoczynamy od analizy obiektów, które powstały przez wprowadzenie prostszego, przypadkowego zaburzenia do samopodobnych² (deterministycznych) struktur fraktalnych.

Na rys.5.1 przedstawiono dwa kolejne pokolenia przypadkowo zdefektowanego dywanu Sierpińskiego - jego odpowiednikiem w jednym wymiarze jest zbiór Cantora

²Struktury samopodobne noszą nazwę beskalowych, gdyż w każdej skali wyglądają identycznie bądź analogicznie - nie udaje się dla nich wyróżnić żadnej szczególnej skali.

a w trzech wymiarach gąbką Sierpińskiego; dla dywanu wymiar przestrzeni Euklidesowej, d , w której zanurzony jest dywan, wynosi 2, dla wspomnianego zbioru Cantora $d = 1$ a dla gąbki Sierpińskiego $d = 3$.



Rysunek 5.1: Pierwsze dwa pokolenia ograniczonego, przypadkowo zdefektowanego dywanu Sierpińskiego. Jak widać, jego wymiar d_s nie zmienił się w stosunku do deterministycznego pierwowzoru.

Na rys. 5.1 pokazano pierwsze ($k = 1$) i drugie ($k = 2$) pokolenie powstałe z kwadratu większego o długości boku L . Jak widać, bok ten został podzielony na $n = 3$ równe części; zwykle $1/n$ nosi nazwę współczynnika redukcji a m/n^d współczynnika zdefektowania, gdzie m jest liczbą mniejszych kwadratów usuwanych w danym pokoleniu z każdego kwadratu wyjściowego dla tego pokolenia. Dokładniej rzecz biorąc, wspomniane pokolenia skonstruowano przez odpowiednie usunięcie pojedynczego ($m = 1$) mniejszego kwadratu a następnie z tak powstałej struktury pojedynczych jeszcze mniejszych, niekoniecznie centralnych (jak to ma miejsce dla deterministycznego dywanu Sierpińskiego). Innymi słowy, usunięcie pojedynczego, mniejszego kwadratu ma miejsce zawsze, w każdym pokoleniu k natomiast, nie wiadomo który kwadrat zostanie usunięty, co jest właśnie dziełem przypadku.

Tym samym zdefiniowany został *generator przypadkowej struktury fraktalnej* pozwalający na zbudowanie ograniczonego fraktalnego obiektu samopodobnego w sensie probabilistycznym (statystycznym). Definicję tę można traktować jako określenie samopodobieństwa przypadkowej struktury fraktalnej. Bezpośredni wniosek jaki się nasuwa dotyczy *wymiaru samopodobnego* - w dalszym ciągu nazywamy go *fraktalnym* gdyż jest to wymiar ułamkowy a nie całkowity jak wymiar Euklidesowy (topologiczny) przestrzeni i oznaczamy przez d_s ; jest on identyczny z wymiarem

fraktalnym deterministycznego dywanu Sierpińskiego (patrz np. artykuł w czasopiśmie "Delta" 2 (1985) 1, książka H.-O. Peitgen, H. Juergens, D. Saupe, "Granice Chaosu. Fraktale", PWN, Warszawa 1997, lub książka T. Vicsek, "Fractal growth phenomena", World Scienc., Singapore 1989). Wynika to z faktu, że wymiar samopodobieństwa jest (tutaj) niewrażliwy na to który kwadrat jest usuwany, ważne aby w każdym pokoleniu jeden elementarny (najmniejszy) kwadrat został usunięty z większego, czyli tego, który był elementarny o jedno pokolenie wcześniej.

Z jednej strony, dla tego typu przypadkowo zdefektowanych struktur można napisać równanie algebraiczne słuszne dla każdego pokolenia $k (= 1, 2, \dots)$

$$N(k) = (n^d - m)^k = (9 - 1)^k = 8^k, \quad (5.1)$$

gdzie $N(k)$ jest liczbą kwadratów jaka pozostała w pokoleniu k po przeprowadzeniu (powyżej opisanej) procedury przypadkowego defektowania. Równanie (5.1) jest także słuszne dla deterministycznego dywanu Sierpińskiego.

Z drugiej strony, dzięki własności samopodobieństwa (tutaj w sensie statystycznym gdyż obarczonej dodatkowo elementem przypadkowości), można napisać kłuczową relację pomiędzy liczbą kwadratów $N(k)$ a liczbą

$$n(k) = n^k = \frac{L}{l(k)} \quad (5.2)$$

na jaką został podzielony w pokoleniu k bok wyjściowego kwadratu o długości L ($l(k) (= L/n^k)$ jest długością boku małego kwadratu w pokoleniu k); mianowicie

$$N(k) = n(k)^{d_s} = \left(\frac{l(k)}{L} \right)^{-d_s}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Jak widać, wymiar samopodobieństwa d_s jest niezależny od numeru pokolenia k co wynika z samopodobnego (tutaj dodatkowo w sensie statystycznym) charakteru struktury. Często, wyrażenie (5.3) zapisuje się w skrótowej postaci

$$N(k) \sim (l(k))^{-d_s}, \quad (5.4)$$

mówiąc, że liczba pokrywających kwadratów ("pudełek") jaka istnieje w k -tym pokoleniu skaluje się z liniowym rozmiarem pokrywającego kwadratu ("pudełka"). Tego typu zapis pozwala rozszerzyć analizę na przypadek struktur fraktalnych nie będących samopodobnymi (patrz rozdz. 5.2.5).

Z (5.1), po uwzględnieniu (5.3), otrzymujemy że

$$d_s = \frac{\ln(N(k))}{\ln(L/l(k))} = \frac{\ln(n^d - m)}{\ln(n)} = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} = 3 \frac{\ln(2)}{\ln(3)}, \quad (5.5)$$

gdzie oczywiście wykładnik

$$d_s < d \quad (5.6)$$

co wynika z faktu, że omawiana struktura jest zdefektowanym kwadratem tzn. jej *pokrycie* małymi kwadratami nie zapełnia jednolicie większego kwadratu; gdyby nasz kwadrat nie był dziurawy wtedy oczywiście $d_s = d$.

Zastanówmy się nad sensem wymiaru samopodobnego d_s który, podobnie jak omawiany poniżej tzw. wymiar pudełkowy (patrz rozdz. 5.2.5), jest szczególnym przypadkiem wymiaru Hausdorffa. W tym celu zauważmy, że $d(= 2)$ -wymiarowa objętość $V(k)$ (tutaj powierzchnia) obiektu w pokoleniu k wynosi,

$$V(k) = N(k)(l(k))^d. \quad (5.7)$$

Objętość $V(k)$ przyjmuje się za miarę danej struktury fraktalnej.

Z drugiej strony, na mocy równania (5.7) oraz (5.3) otrzymujemy, że

$$V(k) = L^{d_s}(l(k))^{d-d_s} = L^d \left(\frac{l(k)}{L} \right)^{d-d_s} \quad (5.8)$$

czyli

$$d_s = d - \frac{\ln(V(k)/L^d)}{\ln(l(k)/L)}. \quad (5.9)$$

Czasami wykładnik $\Delta_s = d - d_s = z$ jakim skaluje się objętość nazywa się wymiarem Minkowskiego albo *deficytem wymiaru samopodobnego*.

Często, wyrażenie (5.8) zapisuje się krócej

$$\frac{V(k)}{L^d} \sim (l(k))^{\Delta_s}, \quad (5.10)$$

mówiąc, że (względna) miara danej struktury fraktalnej skaluje się z liniowym rozmiarem $l(k)$ pokrywającego kwadratu ("pudełka"). Tego typu zapis pozwala rozszerzyć analizę na przypadek struktur fraktalnych, które nie są samopodobne (patrz rozdz. 5.2.5).

Łatwo zauważyć, że wyrażenia (5.5) oraz (5.9) są słuszne dla każdego pokolenia k tylko dlatego, że mamy do czynienia ze **strukturą samopodobną** (niezależnie od tego czy jest ona samopodobna w sensie deterministycznym czy też sensie probabilistycznym zdefiniowanym powyżej).

5.2.2 Paradoks graniczny - struktura prawie wszędzie pusta

W oparciu o wzory (5.7), (5.3), (5.1) oraz (5.2) można wykonać następujące przejście graniczne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V(k)}{L^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(k)[l(k)]^d}{[n(k)]^d [l(k)]^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(k)}{n(k)^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m}{n^d}\right)^k = 0. \quad (5.11)$$

Powyższy wynik jest paradoksalny gdyż, jak widać, w granicy $k \rightarrow \infty$ objętość struktury oraz liczba jej elementów (elementarnych pudełek) jest zaniedbywalnie

mała w stosunku do objętości struktury niezdefektowanej oraz liczby tworzących ją pudełek. Innymi słowy, liczba dziur dorównuje liczbie (prawie) wszystkich pudełek (kwadratów) tworzących jednorodny (niezdefektowany) obiekt. Wynik ten jest prawdziwy tylko w granicy $k \rightarrow \infty$ wskazując, że graniczna struktura samopodobna jest maksymalnie zdefektowana, czyli że wielkość obszaru dziur jest (prawie) równa wielkości całego obszaru struktury pomimo, że na każdym poziomie ziarnistości usunięto jedynie minimalną liczbę ($m = 1$) kwadratów potrzebną do zapewnienia (nietrywialnego) samopodobieństwa ograniczonego, przypadkowego dywanu Sierpińskiego.

Przy tworzeniu struktur fraktalnych, należy wziąć pod uwagę zasadnicze ograniczenie - aby struktura mogła istnieć wszystkie jej elementy muszą być ze sobą powiązane tzn. muszą się stykać. Oznacza to, że każde dwa elementy struktury można połączyć ze sobą linią należącą całkowicie do tej struktury.

5.2.3 Dolny wymiar samopodobieństwa

Wskazujemy na zależność oszacowania wielkości dolnego ograniczenia wymiaru samopodobnego od stopnia zdefektowania m/n^d fraktalnej struktury samopodobnej. W tym celu korzystamy z wyrażenia (5.5) pozwalającego zanalizować np. nierówność postaci

$$d - j < d_s = \frac{\ln(N(k))}{\ln(L/l(k))} = \frac{\ln(n^d - m)}{\ln(n)} = d - \Delta_s (< d), \quad j = 1, 2, \dots, d, \quad (5.12)$$

gdzie deficyt wymiaru

$$\Delta_s = \frac{\ln(1 - \frac{m}{n^d})}{\ln(1/n)} > 0 \quad (5.13)$$

wyraża się za pomocą współczynnika zdefektowania oraz współczynnika redukcji; z powyższych dwóch zależności otrzymujemy bezpośredni warunek na współczynnik zdefektowania

$$\frac{m}{n^d} < 1 - \frac{1}{n^j}, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (5.14)$$

Postępując analogicznie w pozostałych przypadkach, czyli gdy $d_s < d - j$ oraz $d_s = d - j$, $j = 1, 2, \dots, d - 1$, otrzymujemy następujące zbiorcze wyrażenie

$$d_s \begin{cases} > d - j, & \text{dla } m/n^d < 1 - 1/n^j, \quad j = 1, 2, \dots, d \\ = d - j, & \text{dla } m/n^d = 1 - 1/n^j, \quad j = 1, 2, \dots, d - 1 \\ < d - j, & \text{dla } m/n^d > 1 - 1/n^j, \quad j = 1, 2, \dots, d - 1. \end{cases}$$

Jak widać, wyrażenie $1 - 1/n^j$ określa marginalne wartości współczynnika zdefektowania, dla których wymiar samopodobny jest liczbą naturalną. Z powyższego wynika, że możliwe jest "rośnięcie" w przestrzeni d wymiarowej struktur $d - 1$ wymiarowych (gdy $m/n^d = 1 - 1/n$), $d - 2$ wymiarowych (gdy $m/n^d = 1 - 1/n^2$), itd., wreszcie struktur jednowymiarowych (gdy $m/n^d = 1 - 1/n^{d-1}$) a nawet subliniowych (o wymiarze mniejszym od 1 gdy $m/n^d > 1 - 1/n^{d-1}$).

5.2.4 Gęstość struktury

Zauważmy, że gęstość liczbowa struktury $\rho(k)$ skaluje się w tych warunkach identycznie jak struktura niezdefektowa mianowicie,

$$\rho(k) = \frac{N(k)}{V(k)} = [l(k)]^{-d}, \quad (5.15)$$

czyli jest niewrażliwa na operację defektowania układu. Zatem, gęstość liczbowa $\rho(k)$ jest jej niezmiennikiem i nie nadaje się do opisu struktur fraktalnych.

5.2.5 Wymiar pudełkowy ograniczonych struktur fraktalnych

Wymiar samopodobny jest tylko szczególnym przypadkiem wymiaru fraktalnego Hausdorffa. Dla struktur, które nie są samopodobne wyrażenia (5.5) oraz (5.9) należy zapisać w postaci ogólniejszej, mianowicie

$$d_b = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(k))}{\ln(L/l(k))} \quad (5.16)$$

lub

$$d_b = d - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(V(k)/L^d)}{\ln(l(k)/L)}. \quad (5.17)$$

Wzory (5.16) oraz (5.17) uzyskano w wyniku pokrycia danej struktury fraktalnej takimi pudełkami (patrz rys.2(5.2.1), których liniowy rozmiar $l(k)$ maleje potęgowo z wykładnikiem k , analogicznie jak dla struktur samopodobnych (czyli $l(k) = L/n^k$). Uzyskana w ten sposób wielkość d_b nosi nazwę wymiaru pudełkowego.

Ogólnie mówiąc, z wymiarem pudełkowym mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy, gdy dla znikającej ziarnistości l (czyli liniowego rozmiaru pudełka, który w ogólności jest zmienną niezależną),

$$d_b = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(N(l))}{\ln(L/l)} \quad (5.18)$$

lub

$$d_b = d - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(V(l)/L^d)}{\ln(l/L)}. \quad (5.19)$$

Jak widać minimalna objętość $V(l)$, w której daje się zamknąć daną strukturę fraktalną skaluje się (ze znikającą ziarnistością l) jak

$$V(l) \sim (l)^{d-d_b} \quad (5.20)$$

natomiast minimalna liczba pudełek $N(l)$ skaluje się jak

$$N(l) \sim (l)^{-d_b}. \quad (5.21)$$

Zauważmy, że często jest wygodniej operować wielkościami bezwymiarowymi - w tym celu wprowadźmy ziarnistość bezwymiarową zdefiniowaną jako ułamek

$$\epsilon = \frac{l}{L}. \quad (5.22)$$

Korzystając z definicji (5.22) można wyrażenia (5.3) oraz (5.8) przedstawić w postaci

$$N(\epsilon) = \epsilon^{-d_b} \quad (5.23)$$

oraz

$$\frac{V(\epsilon)}{L^d} = \epsilon^{d-d_b}. \quad (5.24)$$

Stąd, wymiar pudełkowy d_b można zapisać następująco

$$d_b = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \quad (5.25)$$

lub

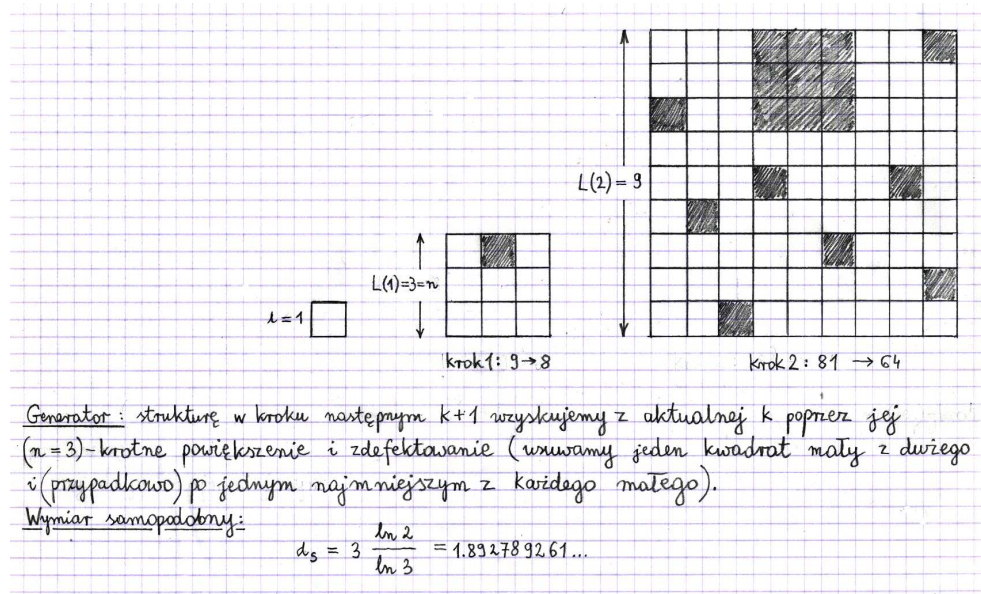
$$d_b = d - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(V(\epsilon)/L^d)}{\ln(\epsilon)}, \quad (5.26)$$

co ułatwia dalsze uogólnienia (np. na pokrycia inne od pudełkowego), pozwalające na wprowadzenie pojęcia wymiaru Hausdorffa. Należy podkreślić, że wymiar samopodobny d_s oraz wymiar pudełkowy d_b dla struktur samopodobnych nie są tożsame; można to zrozumieć na przykładzie obiektów zanurzonych w przestrzeni dwuwymiarowej gdyż wtedy wymiar pudełkowy nigdy nie jest większy od dwóch, w przeciwieństwie do wymiaru samopodobnego. W przypadku tego ostatniego, można podać przykłady struktur, których poszczególne elementy zachodzą na siebie, co prowadzi do wymiaru samopodobnego większego od dwóch.

5.2.6 Nieograniczone fraktale samopodobne

Analogicznie jak w rozdz. 5.2.1, rozważamy samopodobny fraktal przypadkowy czyli strukturę samopodobną w sensie statystycznym, powstającą przez odpowiednie powielanie obiektu wyjściowego (tak jak to przedstawiono na rys. 5.2).

Pomimo że istnieje wiele rzucających się w oczy analogii pomiędzy oboma typami struktur, zdecydowaliśmy się na ich systematyczne, oddzielne omówienie ze względu na fakt, iż wykład jest przeznaczony przede wszystkim dla początkujących studentów. Ponadto takie podejście pozwala, w zasadzie, na niezależne zapoznanie się z wybranymi fragmentami tekstu.



Rysunek 5.2: Pierwsze dwa pokolenia nieograniczonego, przypadkowo zdefektowanego dywanu Sierpińskiego.

Przedstawiona na rys. 5.2 struktura jest to nieograniczenie rosnący, przypadkowy (indeterministyczny) dywan Sierpińskiego zbudowany z elementarnych kwadratów o długości boku $l(=1)$. Bezwymiarowy współczynnik (liniowego) powiększenia dywanu wynosi przykładowo $n = L/l = 3$ (często używa się zamiennie współczynnika ziarnistości $\epsilon = 1/n$), a każdy większy kwadrat jest zbudowany z $(n^d - m)^k$ mniejszych, gdzie $d(=2)$ jest wymiarem przestrzeni Euklidesowej, w której jest zanurzony konstruowany dywan Sierpińskiego, $m(=1)$ jest liczbą usuniętych mniejszych kwadratów z każdego powielonego kwadratu pobranego z poprzedniego pokolenia, natomiast k jest numerem aktualnego pokolenia (skali lub poziomowi ziarnistości struktury) w jakim prowadzi się obliczenia. Jak widać, na każdym poziomie ziarnistości defektowanie może wyglądać inaczej tzn. z kwadratu na poziomie ziarnistości k usuwany jest jeden z powielonych, (większych) kwadratów oraz przypadkowo, z dowolnego miejsca tych powielonych dużych kwadratów, kwadrat elementarny w poprzedzającej skali $k-1$.

Możemy teraz postawić inicjujące pytanie: jaka jest liczba $N(k)$ podstawowych kwadratów (o długości boku l) zawartych w dużym kwadracie w k -tym pokoleniu (lub inaczej mówiąc, na k -tym poziomie ziarnistości)? Z jednej strony, z przedstawionej na rys.1(5.2.6) konstrukcji wynika poprzez bezpośrednie zliczanie, że poszukiwana liczba wyraża się prostym wzorem

$$N(k) = (n^d - m)^k = (3^2 - 1)^k = 8^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.27)$$

czyli jest taka sama jak dla ograniczonego, przypadkowego dywanu Sierpińskiego

(patrz równanie(5.1)); co więcej jest ona równa analogicznym liczbom dla deterministycznych (ograniczonych i nieograniczonych) dywanów Sierpińskiego.

Z drugiej strony, analogicznie jak w przypadku ograniczonego dywanu Sierpińskiego, stawiamy pytanie o istnienie takiej liczby d_s niezależnej od numeru pokolenia k , która spełnia kluczową relację

$$N(k) = n(k)^{d_s} = \epsilon(k)^{-d_s} = \left(\frac{L(k)}{l} \right)^{d_s}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.28)$$

gdzie wprowadziliśmy wielkość,

$$L(k) = n(k)l, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.29)$$

będącą liniowym rozmiarem kwadratu w k -tym pokoleniu, gdzie identycznie jak dla struktur ograniczonych

$$n(k) = n^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.30)$$

a ponadto

$$\epsilon(k) = \epsilon^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

Zależność (5.28) zapisuje się często w postaci,

$$N(k) \sim (L(k))^{d_s}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.32)$$

mówiąc, że "masa" $N(k)$ struktury widoczna na k -tym poziomie ziarnistości skaluje się potęgowo z jej rozmiarem liniowym $L(k)$; występujący w równaniu (5.32) wykładnik nosi nazwę wymiaru samopodobnego - w dalszej części zobaczymy, że jest on szczególnym przypadkiem wymiaru fraktalnego (a dokładniej, fraktalnego wymiaru Hausdorffa).

Ponadto, w oparciu o nierówność

$$n^{d_s} < n^d \quad (5.33)$$

(wynikającą z konstrukcji dywanu) otrzymujemy, że

$$d_s < d. \quad (5.34)$$

Oczywiście, gdyby struktura była jednorodna (czyli nie pozbawiano by jej w każdym pokoleniu niektórych elementów) wówczas mielibyśmy, po prostu, $d_s = d$. Fakt, że udało się znaleźć wspólny dla wszystkich pokoleń wykładnik d_s jest kluczowy dla niniejszych rozważań i wynika z samopodobnej natury konstruowanych obiektów przy czym nie jest tutaj ważne czy samopodobieństwo to ma statystyczny czy deterministyczny charakter.

Ze wzoru (5.28) wynika, że

$$d_s = \frac{\ln(N(k))}{\ln(n(k))} = \frac{\ln(N(k))}{\ln(L(k)/l)} = \frac{\ln(n^d - m)}{\ln(n)} = d_s - \Delta_s, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.35)$$

gdzie, podobnie jak dla fraktali ograniczonych, deficyt wymiaru samopodobnego Δ_s dany jest wzorem

$$\Delta_s = \frac{\ln(1 - \frac{m}{n^d})}{\epsilon}, \quad (5.36)$$

i tak jak trzeba nie zależy od numeru pokolenia k .

Różnica pomiędzy oboma rodzajami struktur (ograniczoną i nieograniczoną) jest widoczna dopiero we wzorach na objętość, która w pierwszym przypadku maleje zgodnie ze wzorem (5.8) w miarę przechodzenia do coraz starszych pokoleń a w drugim rośnie. Mianowicie, wynosi ona

$$V(k) = l^d N(k) = l^d n(k)^{d_s} = l^d \left(\frac{L(k)}{l} \right)^{d_s}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.37)$$

co często zapisuje się w postaci

$$V(k) \sim (L(k))^{d_s}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.38)$$

mówiąc, że objętość $V(k)$ rosnącej struktury samopodobnej skaluje się potęgowo z jej rozmiarem liniowym $L(k)$. Ponadto,

$$d_s = \frac{\ln(V(k)/l^d)}{\ln(L(k)/l)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

i nie zależy od k , jak być powinno.

W oparciu o (5.37) widzimy, że gęstość liczbowa

$$\rho = \frac{N(k)}{V(k)} = \frac{1}{l^d}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.40)$$

czyli nie ulega zmianie przy przechodzeniu od struktury regularnej do fraktalnej podobnie jak to ma miejsce dla struktur ograniczonych.

Widać na podstawie (5.27), (5.29) oraz (5.37), że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V(k)}{\{L(k)\}^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l^d N(k)}{l^d n(k)^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m}{n^d} \right)^k = 0, \quad (5.41)$$

lub inaczej, w oparciu o (5.28), (5.29) oraz (5.37)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V(k)}{(L(k))^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l^d N(k)}{l^d n(k)^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(k)^{d_s}}{n(k)^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k(d-d_s)}} = 0. \quad (5.42)$$

Powyższy wynik jest prawdziwy tylko w granicy $k \rightarrow \infty$ pokazując, że graniczna struktura samopodobna jest maksymalnie zdefektowana gdyż obszar dziur dorównuje wielkością całemu obszarowi struktury pomimo, że na każdym poziomie ziarnistości usunięto jedynie minimalną liczbę ($m = 1$) kwadratów potrzebną do zapewnienia (nietrywialnego) samopodobieństwa nieograniczonego statystycznego dywanu Sierpińskiego.

Aby lepiej zrozumieć wynik (5.41) obliczamy w granicy $k \rightarrow \infty$ liczbę $N(k)$ elementarnych kwadratów oraz dziur $M(k)$. Zgodnie z (5.27)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(k)}{n(k)^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m}{n^d}\right)^k = 0 \quad (5.43)$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(k)}{n(k)^d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{n^d}\right)^k\right) = 1. \quad (5.44)$$

Powyższy wynik jest paradoksalny gdyż, jak widać, w granicy $k \rightarrow \infty$ liczba dziur dorównuje liczbie wszystkich pudełek (kwadratów) tworzących jednorodny obiekt.

Wyznaczamy teraz dolne oszacowanie wymiaru samopodobnego d_s dla nieograniczonego (deterministycznego bądź przypadkowego) dywanu Sierpińskiego. Rozważamy w tym celu wyrażenia

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V(k)}{(L(k))^{d-1}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l^d N(k)}{l^{d-1} n(k)^{d-1}} = l \lim_{k \rightarrow \infty} n^{k(1+d_s-d)} = l \lim_{k \rightarrow \infty} \left(n - \frac{m}{n^{d-1}}\right)^k \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{dla } m < n^{d-1}(n-1) \\ l, & \text{dla } m = n^{d-1}(n-1) \\ 0, & \text{dla } m > n^{d-1}(n-1), \end{cases} \end{aligned}$$

z których wynika, że

$$d_f \begin{cases} > d-1, & \text{dla } m < n^{d-1}(n-1) \\ = d-1, & \text{dla } m = n^{d-1}(n-1) \\ < d-1, & \text{dla } m > n^{d-1}(n-1). \end{cases}$$

W naszym przypadku, przyjęliśmy na wstępie dla prostoty, że $m = 1$ (oraz $n = 3$ i $d = 2$) co prowadzi do tego, że $d-1 < d_s$. Jednakże moglibyśmy, równie dobrze, rozważać przypadki dla których $1 \leq m < n$. Z powyższego wynika, że np. kryształ rosnący w trzech wymiarach może być faktycznie dwuwymiarowy co odpowiadałoby (dla $n = 3$ oraz $d = 3$) czynnikowi zdefektowania $m = 18 (< n^d = 27)$. Oczywiście, do pomyślenia są także kryształy jednowymiarowe (wtedy $m > 18$).

Ponadto, gdybyśmy rozważali analogiczne struktury, które powstają przez odpowiednie dodawanie elementów na każdym poziomie ziarnistości k (dobrym przykładem może być krzywa Kocha) wówczas mielibyśmy, zamiast równości (5.27), analogiczne wyrażenie

$$N(k) = (n^d + m)^k = (3^2 + 1)^k = 10^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.45)$$

prowadzące, w oparciu o (5.28) oraz zachodzącą w tym przypadku nierówność

$$n(k)^{d_s} > n(k)^d, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.46)$$

do wymiaru fraktalnego

$$d_s > d, \quad (5.47)$$

przewyższającego wymiar przestrzeni Euklidesowej, w której jest zanurzony wyjściowy, niezdefektowany obiekt.

Oszacujemy górne ograniczenie wymiaru samopodobnego d_s . W tym celu rozważamy wyrażenia

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V(k)}{(L(k))^{d+1}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l^d N(k)}{l^{d+1} n(k)^{d+1}} = \frac{1}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} n^{k(d_s-d-1)} = \frac{1}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{m}{n^{d+1}} \right)^k \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{dla } m > n^d(n-1) \\ \frac{1}{l}, & \text{dla } m = n^d(n-1) \\ 0, & \text{dla } m < n^d(n-1), \end{cases} \end{aligned}$$

z których wynika, że

$$d_s \begin{cases} > d+1, & \text{dla } m > n^d(n-1) \\ = d+1, & \text{dla } m = n^d(n-1) \\ < d+1, & \text{dla } m < n^d(n-1). \end{cases}$$

Na przykład, wspomniana powyżej krzywa Kocha ($d = 1$, $n = 3$, $m = 1$) posiada, zgodnie z powyższymi wzorami wymiar samopodobieństwa $d < d_s (= \ln(4)/\ln(3)) < d+1$.

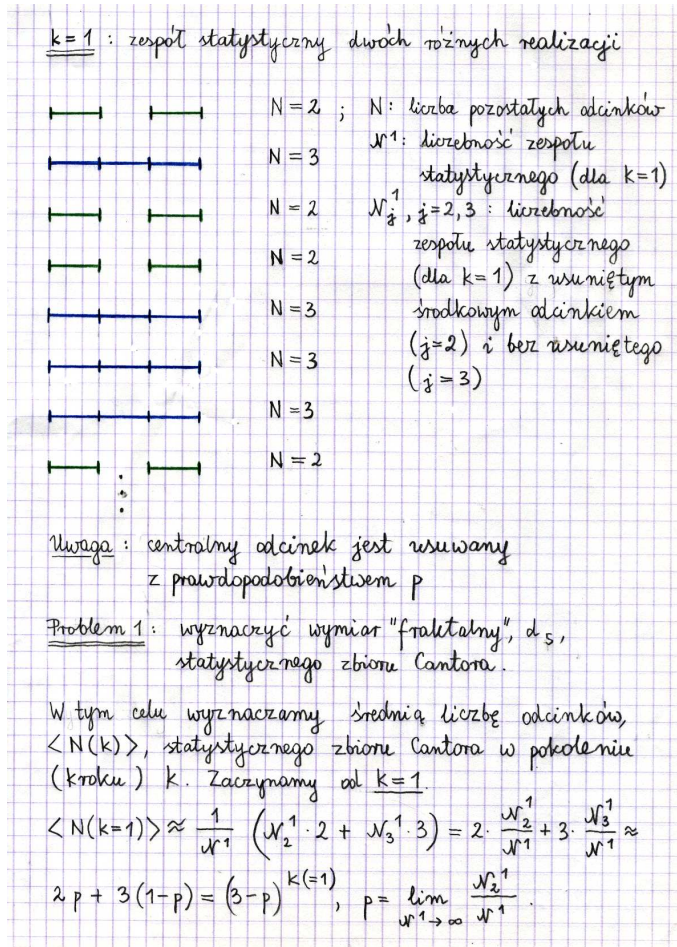
5.3 Fraktale statystyczne

W niniejszym rozdziale omawiamy statystyczne struktury ograniczone i nieograniczone zwane *fraktalami statystycznymi* na przykładzie statystycznego zbioru Cantora (omówienie deterministycznego zbioru Cantora można znaleźć np. w książce H.-O. Peitgen, H. Juergens, D. Saupe, "Granice Chaosu. Fraktale", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997).

5.3.1 Ograniczone fraktale statystyczne

Na rys. 5.3 przedstawiono zespół statystyczny złożony z $\mathcal{N}_{k(=1)}$ odcinków podzielonych na trzy równe części; jak widać, niektóre odcinki centralne zostały usunięte - zakładamy, że nastąpiło to z prawdopodobieństwem p .

Można teraz postawić pytanie dotyczące nieusuniętych odcinków a mianowicie, jaka jest ich średnia liczba ($\langle N(k(=1)) \rangle$) w danym pokoleniu k (tutaj pierwszym



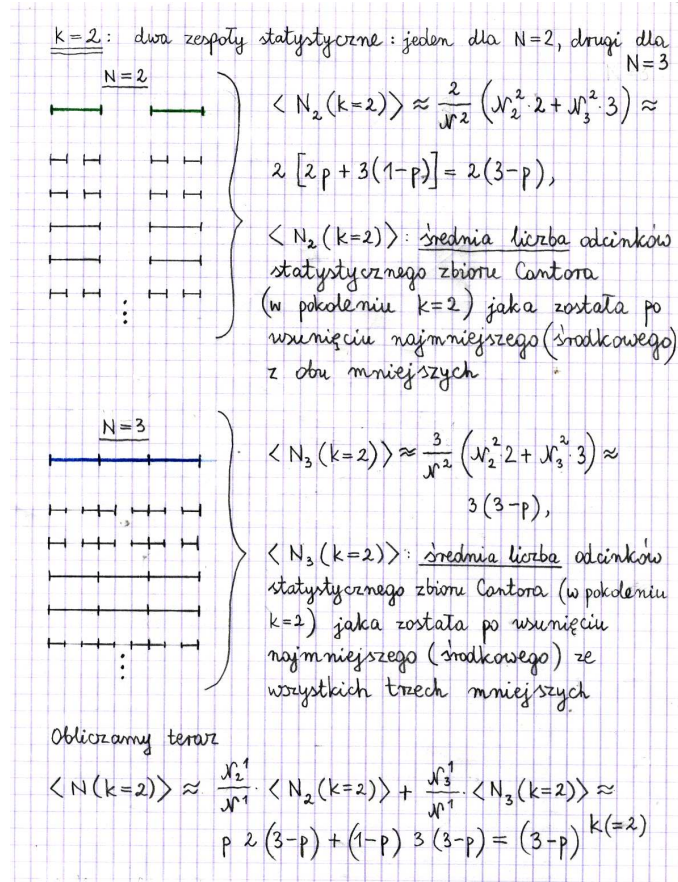
Rysunek 5.3: Zespół statystyczny dla pierwszego pokolenia, przypadkowo zdefektowanego zbioru Cantora.

gdz $k = 1$)? Odpowiedź jest natychmiastowa - jest to granica następującej średniej ważonej nazywanej także *średnią po zespole statystycznym*,

$$\begin{aligned} \langle N(k(=1)) \rangle &= \lim_{\mathcal{N}^{k(=1)} \rightarrow \infty} \left(2 \frac{\mathcal{N}_2^{k(=1)}}{\mathcal{N}^{k(=1)}} + 3 \frac{\mathcal{N}_3^{k(=1)}}{\mathcal{N}^{k(=1)}} \right) = 2p + 3(1-p) \\ &= 3 - p, \end{aligned} \quad (5.48)$$

gdzie $\mathcal{N}_2^{k(=1)}$ oznacza całkowitą liczbę odcinków pozbawionych części centralnej, a $\mathcal{N}_3^{k(=1)}$ odcinków, które ją posiadają.

W następnym pokoleniu ($k = 2$), z każdym odcinkiem zdefektowanym, składającym się z *dwóch* odsuniętych od siebie krótszych, bądź niezdefektowanym zbudowanym z *trzech* odcinków krótszych, wiążemy osobny zespół statystyczny (rys. 5.4). Analogicznie jak dla pokolenia pierwszego, każdy z krótszych odcinków jest



Rysunek 5.4: Zespół statystyczny dla drugiego pokolenia, przypadkowo zdefektowanego zbioru Cantora.

także defektowany statystycznie. W celu łatwiejszego przedstawienia istoty rzeczy, wprowadzamy synchronizację polegającą na tym, że np. zdarzenie defektowania zachodzi jednocześnie dla wszystkich krótszych odcinków danego pokolenia (o numerze k), składających się na jeden odcinek dłuższy poprzedniego pokolenia (o numerze $k-1$). Wyznaczamy teraz średnią liczbę $\langle N(k(=2)) \rangle$ odcinków jaka pozostała po przeprowadzeniu procedury defektowania w drugim pokoleniu,

$$\begin{aligned} \langle N(k(=2)) \rangle &= \lim_{N^{k(=1)} \rightarrow \infty} \lim_{N^{k(=2)} \rightarrow \infty} \left(2 \frac{N_2^{k(=1)}}{N^{k(=1)}} \times \left(2 \frac{N_2^{k(=2)}}{N^{k(=2)}} + 3 \frac{N_3^{k(=2)}}{N^{k(=2)}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{N_3^{k(=2)}}{N^{k(=2)}} \times \left(2 \frac{N_2^{k(=2)}}{N^{k(=2)}} + 3 \frac{N_3^{k(=2)}}{N^{k(=2)}} \right) \right) \\ &= (2p + 3(1-p))^{k(=2)} = (3-p)^{k(=2)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Postępując analogicznie dla następnych pokoleń, uzyskujemy ogólne, proste wyrażenie na średnią liczbę odcinków jaka pozostała po przeprowadzeniu k -pokoleniowej

statystycznej procedury defektowania

$$\langle N(k) \rangle = (2p + 3(1 - p))^k = (3 - p)^k. \quad (5.50)$$

Wyrażenie (5.50) pozwala wyznaczyć wymiar fraktalny d_s statystycznej struktury fraktalnej mianowicie, z definicji

$$\langle N(k) \rangle = (3^k)^{d_s} \quad (5.51)$$

oraz z wyrażenia (5.50) wynika natychmiast, że

$$d_s = \frac{\ln(3 - p)}{\ln(3)}. \quad (5.52)$$

Często interpretuje się równość (5.51) jako związek pomiędzy (bezwymiarową) "objętością" stochastycznej struktury fraktalnej (lewa strona równania) a (bezwymiarową) "masą" zawartą w niej w k -tym pokoleniu (prawa strona tegoż równania); jest to wyraźniej widoczne poniżej. Oczywiście, statystyczna struktura fraktalna przechodzi w deterministyczną tylko wtedy gdy $p = 1$; wówczas jej wymiar fraktalny $d_s = \ln(2)/\ln(3)$. Gdy $p = 0$ mamy do czynienia z drugim przypadkiem skrajnym dotyczącym odcinka niezdefektowanego - wówczas $d_s = d (= 1)$ czyli wymiar samopodobny jest równy po prostu wymiarowi przestrzeni.

5.3.2 Różne sposoby defektowania struktur

Dalsze uogólnienie wzoru (5.50) jest związane ze sposobem defektowania czyli sposobem w jaki dana struktura fraktalna została uzyskana ze struktury jednolitej oraz minimalnym wymiarem przestrzeni w jakiej jest zanurzona. Na przykład, jeżeli zamiast usuwać środkowy odcinek zastąpimy go "daszkiem" złożonym z dwóch odcinków, jak to pokazano na rys. 2(5.3), wówczas w poniższym wzorze $m = +2$ a nie -1 jak to ma miejsce dla zbioru Cantora (porównaj wyrażenie (5.50)). Zatem,

$$\langle N(k) \rangle = ((b^d + m)p + b^d(1 - p))^k = (b^d + mp)^k = (b^k)^{d_f}, \quad (5.53)$$

gdzie b stanowi wyjściową, liniową miarę wyjściowej, defektowanej struktury jednolitej natomiast d jest minimalnym wymiarem Euklidesowym przestrzeni w której zanurzona jest ta struktura Z trzeciej równości w (5.53) otrzymujemy, że

$$d_f = \frac{\ln(b^d + mp)}{\ln(b)} = d + \frac{\ln\left(1 + p\frac{m}{b^d}\right)}{\ln(b)}, \quad (5.54)$$

bezpośrednie uogólnienie wzoru (5.52).

Wskazujemy na zależność oszacowania wielkości dolnego ograniczenia wymiaru samopodobnego d_f od stopnia statystycznego zdefektowania $-pm/n^d$ fraktalnej

struktury samopodobnej. W tym celu korzystamy z wyrażenia (5.53) pozwalającego zanalizować np. nierówność postaci

$$d - j < d_f = \frac{\ln \langle N(k) \rangle}{\ln(L/l(k))} = \frac{\ln(n^d - pm)}{\ln(n)} (< d), \quad j = 1, 2, \dots, d, \quad (5.55)$$

skąd otrzymujemy bezpośredni warunek na współczynnik statystycznego zdefektowania

$$p \frac{m}{n^d} < 1 - \frac{1}{n^j}, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (5.56)$$

Postępując analogicznie w pozostałych przypadkach, czyli gdy $d_f < d - j$ oraz $d_f = d - j$, $j = 1, 2, \dots, d - 1$, otrzymujemy następujące zbiorcze wyrażenie

$$d_f \begin{cases} > d - j, & \text{dla } pm/n^d < 1 - 1/n^j, \quad j = 1, 2, \dots, d \\ = d - j, & \text{dla } pm/n^d = 1 - 1/n^j, \quad j = 1, 2, \dots, d - 1 \\ < d - j, & \text{dla } pm/n^d > 1 - 1/n^j, \quad j = 1, 2, \dots, d - 1. \end{cases}$$

Jak widać, wyrażenie $1 - 1/n^j$ określa marginalne wartości współczynnika statystycznego zdefektowania, dla których wymiar samopodobny jest liczbą naturalną. Z powyższego wynika, że możliwe jest "rośnięcie" w przestrzeni d wymiarowej struktur $d - 1$ wymiarowych (gdy $pm/n^d = 1 - 1/n$), $d - 2$ wymiarowych (gdy $pm/n^d = 1 - 1/n^2$), itd., wreszcie struktur jednowymiarowych (gdy $pm/n^d = 1 - 1/n^{d-1}$) a nawet subliniowych (o wymiarze mniejszym od 1 gdy $pm/n^d > 1 - 1/n^{d-1}$).

5.4 Multifraktalność

Dalsze rozważania poprzedzimy wprowadzeniem pojęcia multifraktalności³. Multifraktalność to coś więcej niż pojedyncza krytyczność gdyż dotyczy sytuacji, w której obecne jest widmo (spektrum) wykładników fraktalnych, czyli wykładników krytycznych zwanych singularnościami lub osobliwosciami. **Istnienie widma osobliwości jest właśnie sygnaturą multifraktalności.** Pokażemy to na prostym, pouczającym przykładzie bifraktalności, prowadzącym do potrzebnych uogólnień.

Dodajmy, że istnieją dwa istotnie różne źródła multifraktalności:

- a) poszerzone, czyli gruboogonowe rozkłady o kształcie odbiegającym w centralnej części od prawa potęgowego oraz
- b) korelacje długozasięgowe lub długookresowe.

Wpływ obu przejawia się w sposób analogiczny, czyli poprzez uogólniony wykładnik Hursta. W istocie rzeczy temu wieloskalowemu wykładnikowi a stąd spektrum singularności poświęcone są niniejsze rozważania.

³Multifraktalność i wielofraktalność traktujemy jak synonimy.

5.4.1 Osobliwa gęstość niezmiennicza

Rozważmy przykład osobliwej ale całkowalnej gęstości niezmienniczej danej następującą funkcją potęgową⁴

$$\rho(x) \stackrel{\text{def.}}{=} (1 - \gamma)x^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 \leq x < 1. \quad (5.57)$$

Można ją interpretować jako stacjonarną gęstość prawdopodobieństwa znalezienia błędzącej cząsteczki (uwięzionej na odcinku $[0, 1[$) w punkcie x - będzie jeszcze o tym mowa poniżej.

W dalszym ciągu podzielmy dziedzinę x na odcinki o niewielkiej długości $l \ll 1$; węzły tak przeprowadzonej dyskretyzacji oznaczmy przez $x_j = (j - 1)l$, $j = 1, 2, \dots, N + 1 = \frac{1}{l} + 1 \gg 1$. Dla każdego odcinka $[x_j, x_{j+1}[$, $j = 1, 2, \dots, N$, wyznaczmy związane z nim prawdopodobieństwo

$$p_j(l) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho(x) dx = \begin{cases} l^{1-\gamma} & \text{dla } j = 1 \\ \rho(x_j)l & \text{dla } j \geq 2, \end{cases} \quad (5.58)$$

przy czym drugi wzór (dla $j \geq 2$) jest przybliżony i tym dokładniejszy im mniejsza jest wartość l . Pierwszego wzoru nie da się przedstawić w analogicznej postaci, gdyż w punkcie x_1 gęstość ρ ma osobliwość (nieanalityczną rozbieżność). Właśnie ten aspekt w istotny sposób odróżnia oba wzory.

Obliczmy teraz sumę statystyczną⁵ (zwaną też funkcją rozdziału lub podziału). Można powiedzieć, że multifraktalność tkwi korzeniami w fizyce statystycznej a dokładniej bierze swój początek właśnie w funkcji rozdziału. To własności tej funkcji mogą narzucić wieloskalowy, multifraktalny charakter analizowanych układów. Obliczmy teraz sumę statystyczną dla naszego przykładu,

$$\begin{aligned} Z_q &= \sum_{j=1}^N [p_j(l)]^q = \left[\int_0^l \rho(x) dx \right]^q + \sum_{j=2}^N [\rho(x_j)l]^q \\ &\approx l^{(1-\gamma)q} + l^{q-1} \int_l^1 [\rho(x)]^q dx \\ &= l^{(1-\gamma)q} + \frac{(1-\gamma)^q}{1-\gamma q} (1 - l^{1-\gamma q}) l^{q-1} \\ &= [1 - a(q)] l^{(1-\gamma)q} + a(q) l^{q-1}, \quad 0 \leq a(q) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{(1-\gamma)^q}{1-\gamma q} \leq 1. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Można ją interpretować jako (stacjonarne) prawdopodobieństwo znalezienia q błędzących cząsteczek (uwięzionych na odcinku $[0, 1[$) w jakiegokolwiek komórce (o roz-

⁴W istocie rzeczy, przykład ten został zaczerpnięty z książki: H. G. Schuster: *Deterministic Chaos. An introduction*, second revised edition, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim 1988 (istnieje tłum. polskie). Przy okazji, przykład ten uogólniono i poprawiono, usuwając występujące tam usterki.

⁵Związek sumy statystycznej Z_q danej wzorem (5.59) z tą dobrze znaną, stanowiącą podstawę termodynamiki statystycznej podamy w dalszej części.

miarze l). Interpretacja ta jest przydatna przy określeniu całek korelacyjnych pozwalających na alternatywne przedstawienie sumy statystycznej⁶.

Podział sumy statystycznej na dwa składniki wynika z faktu, że mamy tutaj do czynienia tylko z jedną osobliwością gęstości niezmienniczej (i resztą nieosobliwą).

Obie nierówności w (5.59) określające przedział dozwolonych wartości q narzucają na nią istotne ograniczenia, mianowicie: $0 \leq q \leq 1 \cup \infty$, niezależnie od wartości γ spełniającej obie nierówności w (5.57); w przeciwnym razie czynnika przedwykładniczego $a(q)$ nie można byłoby interpretować jako wagi, potrzebnej w dalszych rozważaniach.

Jak widać,

- a) $Z_{q \rightarrow 0} = \frac{1}{l} (= N)$, czyli określa rozmiar nośnika (w jednostkach długości l).
- b) Ponadto $Z_{q \rightarrow 1} = 1$, co oznacza, że powyższa procedura nie naruszyła normalizacji prawdopodobieństwa - jest to zasadniczy warunek jaki został na nią nałożony.
- c) Wreszcie, $Z_{q \rightarrow \infty} \approx l^{(1-\gamma)q}$, gdyż $a(q \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Wszystkie te własności są wykorzystywane poniżej do scharakteryzowania multifraktalności.

Zauważmy, że równanie (5.59) można przepisać w postaci

$$Z_q \approx \int \hat{\rho}(\alpha) l^{\alpha q} \frac{1}{l^{f(\alpha)}} d\alpha = \int \hat{\rho}(\alpha) \exp \{ - [\alpha q - f(\alpha)] \mid \ln l \} d\alpha, \quad (5.60)$$

pozwalającej na istotne uogólnienie.

Wprowadziliśmy gęstość prawdopodobieństwa

$$\hat{\rho}(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} (1 - a(q))\delta(\alpha - (1 - \gamma)) + a(q)\delta(\alpha - 1) \quad (5.61)$$

występowania (tutaj tylko dwóch wartości) singularności $\alpha = \alpha_1$ i $\alpha = \alpha_2$ skalujących prawdopodobieństwa, odpowiednio p_1 i p_j , $j \geq 2$ (patrz wyrażenie (5.58)), przy czym pierwsza singularność, $\alpha_1 = 1 - \gamma$, dotyczy pierwszego przedziału x , tzn. odcinka $[0, l]$, natomiast druga, $\alpha_2 = 1$, pozostałych $\frac{1}{l} - 1$ przedziałów, czyli odcinka $[l, 1]$. Singularności te można traktować jak lokalne wymiary fraktalne (Hausdorffa) określające "objętości" l^{α_j} , $j = 1, 2$, lokalnych obszarów fraktalnych definiujących odpowiadające im prawdopodobieństwa p_1 oraz $p_j (\geq 2)$. Przejście od sumowania po j we wzorze (5.59) do całkowania po singularnościach α we wzorze (5.60) wymagało jeszcze wprowadzenia gęstości liczbowej $1/l^{f(\alpha)}$, gdzie

$$f(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha_1 (= 1 - \gamma) \\ 1 & \text{dla } \alpha_2 (= 1). \end{cases} \quad (5.62)$$

⁶To alternatywne przedstawienie wynika wprost z definicji prawdopodobieństwa $p_j(l)$ znalezienia zmiennej x (elementu szeregu czasowego) w otoczeniu x_j o rozmiarze l danego wzorem $p_j(l) = \frac{1}{N} \sum_i \Theta(l - |x_i - x_j|)$, gdzie funkcja $\Theta(\dots)$ oznacza thetę Heaviside'a.

Gęstość ta mówi nam jaka jest krotność singularności α , czyli ile obszarów fraktalnych jest scharakteryzowanych taką właśnie (jednakową) singularnością⁷. Zauważmy, że $f(\alpha)$ można traktować jak wymiar fraktalny (Hausdorffa, związany z singularnością α), mówiący jak skaluje się wspomniana gęstość liczbowa. Oczywiście, w ogólności $\alpha \neq f(\alpha)$. **Funkcja $f(\alpha)$ to właśnie nic innego jak poszukiwane spektrum singularności (widmo osobliwości).**

Wyrażenie (5.60) można przepisać (wykorzystując (5.61) i (5.64)) w postaci

$$Z_q \approx [1 - a(q)]l^{\alpha_1 q - f(\alpha_1)} + a(q)l^{\alpha_2 q - f(\alpha_2)}, \quad (5.63)$$

czyli sumy ważonej (superpozycji) określającej współistnienie dwóch monofraktali. Jednakże, dla skrajnych wartości q wyrażenie to redukuje się do następującego:

$$Z_q \approx \begin{cases} l^{\alpha_1 q - f(\alpha_1)} & \text{dla } q \rightarrow \infty \\ l^{\alpha_2 q - f(\alpha_2)} & \text{dla } q \rightarrow 1 \text{ lub } q \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.64)$$

Definiuje ono bifraktal na trzypunktowym nośniku q , czyli dla $q = 0, 1, \infty$. **Jak widać bifraktal stanowi tutaj obiekt graniczny dla dwóch zsuperponowanych monofraktali.**

Dzięki przedstawionej powyżej interpretacji poszczególnych czynników w funkcji podcałkowej wyrażenia (5.60), można je traktować jako ogólne, niezależne od konkretnej postaci gęstości niezmienniczej ρ . Zatem, całe wyrażenie (5.60) można przyjąć jako ogólną (całkową) postać sumy statystycznej Z_q . W naszym przypadku mamy (jak widać) do czynienia jedynie z bifraktalem, gdyż spektrum singularności (5.64) jest tutaj dwupunktowe. W ogólności spektrum to może być jednopunktowe (wtedy mamy do czynienia z monofraktalem zwanym też po prostu fraktalem) poprzez dwu- i przelicznie punktowe aż po widmo ciągłe. Patrząc całościowo, można powiedzieć, że połączona gęstość liczbowa $\hat{\rho}(\alpha) \frac{1}{l^{f(\alpha)}} d\alpha$ określa ile razy relacja skalowania $p_j(l) \approx l^{\alpha_j}$ zawiera się w sumie $\sum_{j=1}^N p_j(l)^q$.

W dalszym ciągu rozważamy już sytuację ogólną, dla której wyznaczamy (uproszczamy) całkę (5.60) za pomocą Metody Punktu Siodłowego (przedstawionej w Dodatku C), czyli przybliżamy ją za pomocą wiodącej składowej związanej z pewną szczególną wartością $\alpha = \alpha^*(q)$. Jest to możliwe do przeprowadzenia w przypadku wolnozmienniej gęstości prawdopodobieństwa $\hat{\rho}(\alpha)$. Oczywiście, stosowanie tej metody do naszego konkretnego przykładu nie jest ani możliwe ani potrzebne (mamy tutaj $\alpha_1 = \alpha^*(q = \infty)$ oraz $\alpha_2 = \alpha^*(q = 0) = \alpha^*(q = 1)$).

5.4.2 Wymiary uogólnione Rényi'ego

Wspomnianą w poprzednim rozdziale szczególną wartość $\alpha^*(q)$ dotyczącą sytuacji ogólnej definiujemy jako punkt, w którym funkcja $\alpha q - f(\alpha)$ posiada minimum ze

⁷Ścisłej rzecz biorąc, w przypadku $\alpha = \alpha_2 = 1$ wspomniana krotność wynosi $\frac{1}{l} - 1$. Jednakże, $\frac{1}{l} \gg 1$, co w pełni usprawiedliwia przyjętą (nieco uproszczoną) formułę na wspomnianą powyżej gęstość liczbowa.

względem na zmienną α . Pełni ona rolę funkcji $F(x)$ stojącej we wzorze (C.1) (rolę zmiennej x pełni teraz zmienna α a parametru N wielkość $|\ln l|$). Oczywiście, użycie Metody Punktu Siodłowego jest możliwe, gdy wspomniane minimum istnieje a sama funkcja daje się w jego otoczeniu (przynajmniej z grubsza) przybliżyć za pomocą wielomianu drugiego stopnia. Zatem, korzystając ze wzoru (C.1) otrzymujemy

$$Z_q \approx A(\alpha^*) l^{\alpha^*(q)q - f(\alpha^*(q))} = A(\alpha^*) \exp \{ - [\alpha^*(q)q - f(\alpha^*(q))] |\ln l| \}, \quad (5.65)$$

gdzie zależność $\alpha^* = \alpha^*(q)$ uzyskuje się z warunku istnienia ekstremum dla danego q , czyli $f'(\alpha^*(q)) = q$; warunek $f''(\alpha^*(q)) > 0$ definiujący minimum jest nam potrzebny poniżej. Ponadto, wolnozmienny współczynnik

$$A(\alpha^*(q)) = \hat{\rho}(\alpha^*(q)) \sqrt{\frac{2\pi}{f''(\alpha^*(q)) |\ln l|}}. \quad (5.66)$$

jest iloczynem szczególnej wartości $\hat{\rho}(\alpha^*)$ oraz odwrotności współczynnika normalizacji, jako pozostałość po zastosowaniu Metody Punktu Siodłowego.

W naszym przykładzie związek pomiędzy α^* oraz q uzyskujemy na innej drodze, gdyż spectrum singularności nie jest u nas różniczkowalne. Podkreślmy, że przedstawione powyżej podejście jest możliwe do zastosowania tylko w przypadku wolnozmiennnej zależności $\hat{\rho}(\alpha)$ oraz jej ograniczenia od góry a także $|\ln l|$ na tyle dużego aby całka gaussowska była wystarczająco dobrym przybliżeniem delty Diraca. W przypadku naszego przykładu nie ma potrzeby stosowania Metody Punktu Siodłowego ponieważ całkę (5.60) daje się (niemal) ściśle obliczyć bezpośrednim rachunkiem.

W dalszym ciągu wprowadzamy nadzwyczaj ważny uogólniony wykładnik wieloskalowy

$$\tau(q) = \alpha^*(q)q - f(\alpha^*(q)), \quad (5.67)$$

jako (ujemne) przekształcenie Legendre'a widma osobliwości $f(\alpha^*(q))$. Stąd, uogólniony wymiar Rényi'ego D_q połączony jest z uogólnionym wykładnikiem $\tau(q)$ za pomocą relacji

$$\tau(q) = (q - 1)D_q \quad (5.68)$$

oraz suma statystyczna

$$\begin{aligned} Z_q &= A(\alpha^*(q)) \exp(-\tau(q) |\ln l|) = A(\alpha^*(q)) \exp(-(q - 1)D_q |\ln l|) \\ &\Leftrightarrow -I_q = C_q + D_q |\ln l|, \end{aligned} \quad (5.69)$$

gdzie informacja Rényi'ego

$$I_q = \frac{\ln Z_q}{q - 1}. \quad (5.70)$$

Co więcej, zredukowana informacja Rényi'ego⁸ wynosi

$$C_q = -\ln A(\alpha^*(q))/(q-1) \quad (5.71)$$

i jest niezależna od l . Zatem, dla dostatecznie małego l otrzymujemy z (6.192) - (5.71) popularne wyrażenie na uogólniony wymiar Rényi'ego

$$D_q \approx -\frac{I_q}{|\ln l|} = \frac{S_q}{|\ln l|}, \quad (5.72)$$

gdzie nieaddytywna entropia Rényi'ego

$$S_q \stackrel{\text{def.}}{=} -I_q. \quad (5.73)$$

Jak widać, im mniej jest dostępnej informacji w układzie (czyli im większy jest w układzie nieporządek) tym entropia układu jest większa. Entropia ta dała początek termodynamice nieekstensywnej, opisującej układy w których oddziaływanie pomiędzy jego elementami jest długozasięgowe⁹.

Przy okazji zwróćmy uwagę, że $S_{q \rightarrow 1} (= -I_{q \rightarrow 1})$ jest entropią informacyjną Shannona. Aby to dostrzec, przedstawmy sumę

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_j^{1+(q-1)} &= \sum_{j=1}^N p_j \exp((q-1) \ln p_j) \approx \sum_{j=1}^N p_j (1 + (q-1) \ln p_j) \\ &= 1 + (q-1) \sum_{j=1}^N p_j \ln p_j. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Stąd, z (5.70) oraz z definicji entropii $S_{q \rightarrow 1}$ otrzymujemy poszukiwaną zależność

$$S_{q \rightarrow 1} = -\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q-1} \ln \left(1 + (q-1) \sum_{j=1}^N p_j \ln p_j \right) = -\sum_{j=1}^N p_j \ln p_j, \quad (5.75)$$

często też używaną w termodynamice (a nie tylko w teorii informacji).

Wróćmy teraz do naszego przykładu i zbudujemy tabelę 5.1 wielkości charakteryzujących rozważany bifraktal. Widać (bez stosowania Metody Punktu Siodłowego), że tylko trzy wartości q pozwalają uzyskać nasze dwupunktowe spektrum singularności. Są to te wartości q , o które nam chodziło. Zauważmy, że wartości w drugim wierszu tabeli 5.1 występują dla dwóch różnych q - częściowo była już o tym mowa w rozdz. 5.4.1.

⁸Ponieważ w dalszej części nie zajmujemy się już zredukowaną informacją Rényi'ego, dlatego nie dbamy tutaj o właściwy dobór czynnika normalizacyjnego, który wchodzi jedynie do C_q .

⁹W tym kontekście szczególnie polecane są następujące prace: *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*, T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens (Eds.), Springer-Verlag, Berlin 2002 oraz C. Tsallis, *Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics - An overview after 20 years*, Braz. J. Phys. **39** (2009), 337.

Tabela 5.1: Zasadnicze wielkości charakteryzujące bifraktal

	D_q	$\alpha^*(q)$	$f(\alpha^*(q))$
$q \rightarrow \infty$	$(1 - \gamma) \frac{q}{1-q} \rightarrow 1 - \gamma$	$1 - \gamma$	0
$q \rightarrow 0, 1$	1	1	1

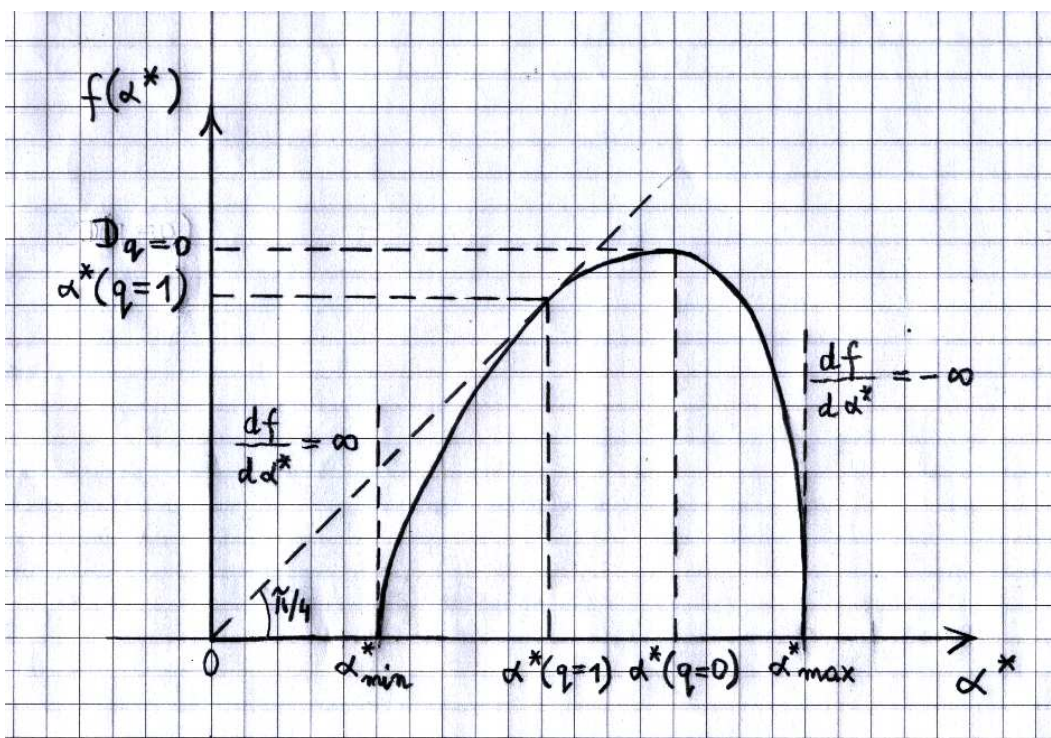
5.4.3 Konstrukcja widma osobliwości

Wprowadzimy teraz dodatkowe własności ułatwiające konstrukcję widma osobliwości.

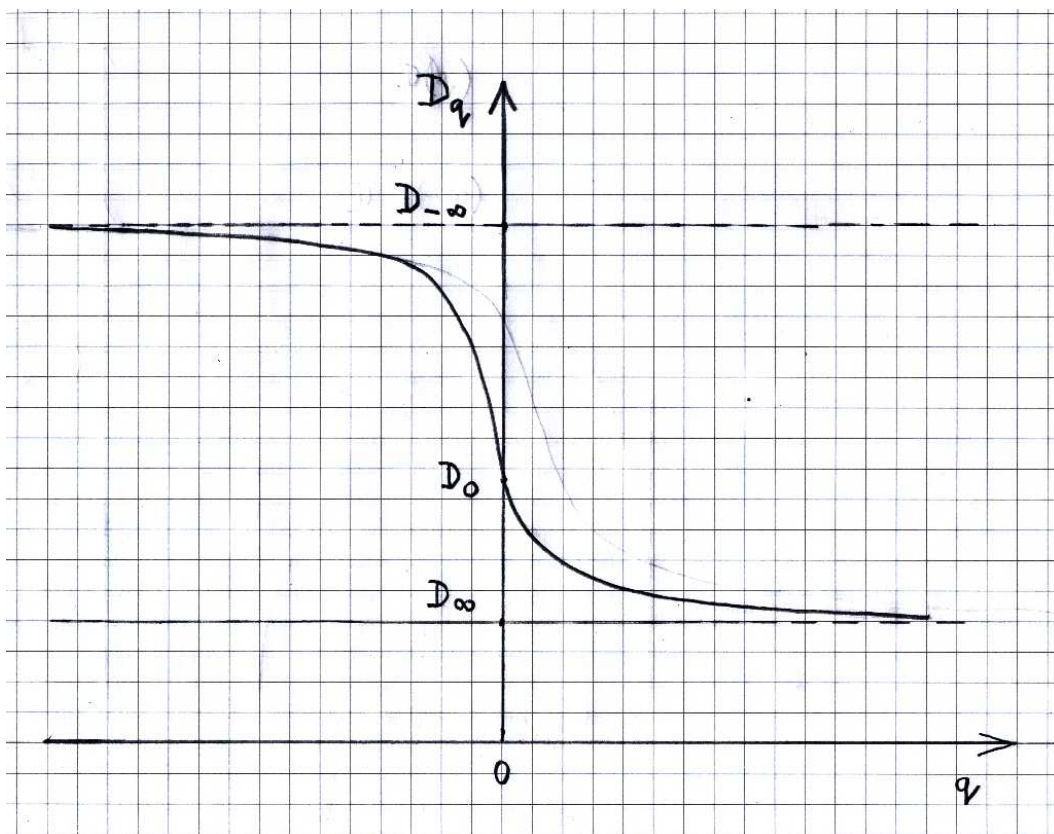
- Z transformacji Legendre'a (5.67) wynika, że skoro uogólniony wykładnik $\tau(q)$ jest ujemną transformacją Legendre'a widma osobliwości $f(\alpha^*)$ to i odwrotnie, widmo osobliwości jest ujemną transformacją Legendre'a uogólnionego wykładnika. Ma to swoje konsekwencje w postaci następującej zależności: $\alpha^*(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \Leftrightarrow q = \frac{df(\alpha^*)}{d\alpha^*}$. W dalszym ciągu możemy przyjąć, że spełnione są obie równości.
- Ponadto, z transformacji Legendre'a (5.67) oraz wyrażenia (6.192) wynika¹⁰, że $\tau(q = 1) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha^*(q = 1)) = \alpha^*(q = 1)$ oraz $\frac{df(\alpha^*)}{d\alpha^*} = 0$ dla $\alpha^*(q = 0)$.
- Kolejna własność dotyczy wartości brzegowych widma osobliwości α_{min} oraz α_{max} . Mianowicie, korzystając z pierwszego równania w (5.59) oraz (5.70) i (5.72) otrzymujemy potrzebny wzór $D_q \approx \frac{1}{\ln l} \frac{1}{q-1} \ln \sum_{j=1}^N [p_j(l)]^q$. Stąd, $D_{q \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{\ln l} \frac{1}{q-1} \ln [p_{max}(l)]^q = \frac{q}{q-1} \alpha_{min}^* \rightarrow \alpha_{min}$, gdzie przy wyprowadzeniu przedostatniej równości skorzystaliśmy z zależności $p_j(l) \approx l^{\alpha_j}$, przy czym dla wystarczająco dużych wartości q w sumie pozostała jedynie minimalna wartość wykładnika $\alpha_j = \alpha_{min}^*$. Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla $q \rightarrow -\infty$. Wówczas, dominującym wyrazem w sumie jest $[p_j(l)]^q \approx l^{\alpha_{max}^* q}$ co prowadzi do $D_{q \rightarrow -\infty} \approx \alpha_{max}^*$. Zatem, widmo osobliwości zawiera się w przedziale $[\alpha_{min}^*, \alpha_{max}^*]$.
- Jak wynika z własności przedstawionej w punkcie a), pochodne na brzegu nośnika widma osobliwości są nieograniczone: $\frac{df(\alpha^*)}{d\alpha^*} |_{\alpha_{min}^*} = \infty$ oraz $\frac{df(\alpha^*)}{d\alpha^*} |_{\alpha_{max}^*} = -\infty$.

Dzięki własnościom a) - d) mogliśmy przedstawić schematycznie na rysunku 5.5 kształt widma osobliwości $f(\alpha^*)$. Przy okazji można było również przedstawić schematyczny wykres $D(q)$ (patrz rysunek 5.6).

¹⁰Milcząco założyliśmy, że mamy tutaj do czynienia z ograniczonym wymiarem informacyjnym Rényi'ego $D_{q \rightarrow 1}$.



Rysunek 5.5: Schematyczny wykres widma osobliwości.



Rysunek 5.6: Schematyczny wykres wymiarów Rényi'ego D_q .

Tabela 5.2: Przyporządkowania wielkości multifraktałnych termodynamicznym

Multifraktal	Termodynamika
q	β
$ \ln l $	V
$\alpha^*(q)$	$\frac{U_\beta}{V}$
$\tau(q)$	$\beta \frac{F_\beta}{V}$
$f(\alpha^*(q))$	$\frac{S_\beta}{V}$
$c_N(q)$	$c_V(\beta)$

5.4.4 Związek multifraktałności z termodynamiką

Analizę związku multifraktałności z klasyczną termodynamiką stanów równowagowych rozpoczniemy od zwrócenia uwagi na analogię pomiędzy energią swobodną właściwą, F_β/V , układu termodynamicznego a uogólnionym wykładnikiem $\tau(q)$. Mianowicie,

$$\beta \frac{F_\beta}{V} \equiv \tau(q), \quad (5.76)$$

gdzie odpowiednikiem wielkości $\beta = 1/T$ (czyli odwrotności temperatury) jest q natomiast odpowiednikiem (makroskopowej) objętości układu V jest $N = |\ln l|$. Zauważmy, że dzięki transformacji Legendre'a możemy powiązać energię właściwą układu oraz jego entropię właściwą, S/V , właśnie z energią swobodną właściwą tego układu, tzn.

$$\beta \frac{F_\beta}{V} = \beta \frac{U_\beta}{V} - \frac{S_\beta}{V} \equiv \tau(q) = q\alpha^*(q) - f(\alpha^*(q)). \quad (5.77)$$

Powyższa odpowiedniość ma miejsce dzięki transformacji Legendre'a (5.67), która pozwoliła na dwa kolejne przyporządkowania (obok podanego powyżej (5.76)),

$$\frac{U_\beta}{V} \equiv \alpha^*(q) \text{ oraz } \frac{S_\beta}{V} \equiv f(\alpha^*(q)). \quad (5.78)$$

Wszystkie przyporządkowania zostały zebrane w tabeli 5.2. Dodatkowo zamieściliśmy multifraktałny odpowiednik, c_N , ciepła właściwego przy stałej objętości c_V , który można uzyskać właśnie dzięki wcześniejszemu przyporządkowaniu energii swobodnej właściwej uogólnionemu wykładnikowi.

5.5 Statystyczne struktury multifraktałne

Powyższe rozważania można rozszerzyć na statystyczne struktury multifraktałne - statystyczność, skończona liczba pokoleń oraz multifraktałność to podstawowe własności przypisywane wielu realnym strukturom. Multifraktały wprowadzimy teraz w

najprostszy znany nam sposób a mianowicie, uśredniając po k wielkość $\langle N(k)^{q-1} \rangle$ z jakąś stosunkowo prostą wagą, gdzie q jest (na razie) dowolnym rzeczywistym wykładnikiem potęgi. Średniowanie to oznacza, że poszczególne pokolenia odcinków zostały rozmieszczone na podłożu zgodnie ze wspomnianą powyżej wagą - wyjaśniamy to dokładniej poniżej. Innymi słowy, multifraktalność wydobywamy tutaj dla dwumianowej statystycznej kaskady.

Wprowadźmy wagę w postaci najprostszego z możliwych rozkładów, czyli w postaci delty Kroneckera

$$w(k) = \delta_{k,k^*} \quad (5.79)$$

mówiącej z jakim prawdopodobieństwem obserwator może wylosować pokolenie k w zespole statystycznym przygotowanych już wcześniej statystycznie zdefektowanych struktur (np. odcinków ze zbioru Cantora). Zdajemy sobie sprawę, że realnie rzecz biorąc taka waga nie powinna zniknąć na zbiorze liczb naturalnych, mając np. postać dyskretnego rozkładu Gaussa centrowanego w punkcie k^* . Rozkład (5.79) stanowi jego graniczny przypadek (o znikającej wariancji). Na szczęście, powyższe uproszczenie nie niszczy multifraktalności, znacząco upraszczając rachunki.

Zatem, wyrażenie na moment rzędu $q - 1$ średniej liczby odcinków jaką uzyskano w pokoleniu k w wyniku procedury defektowania (kantoryzacji) odcinków z pokolenia wcześniejszego $k - 1$ wynosi

$$\langle \langle N(k)^{q-1} \rangle \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} w(k) \langle N(k)^{q-1} \rangle = \exp(k^* G(k^*)) = \varepsilon^{\tau(q)}, \quad (5.80)$$

gdzie $\varepsilon = n^{k^*}$ i

$$G(k^*) = \ln \left(p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} + (1-p)n^{d(q-1)} \right), \quad (5.81)$$

oraz

$$\tau(q) = (q-1)D(q) \quad (5.82)$$

co wynika z bezpośredniego uogólnienia wyrażeń (5.53) i (5.54); tutaj wymiary Rényi'ego

$$D(q) = \frac{\ln \left(p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} + (1-p)n^{d(q-1)} \right)}{(q-1) \ln(n)} \quad (5.83)$$

oraz uogólniony (wieloskalowy) wykładnik Hursta, $h(q)$, łączy się z uogólnionym wykładnikiem wieloskalowym za pomocą zależności

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \quad (5.84)$$

gdzie

$$h(q) = 1 + \frac{\ln \left(p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} + (1-p)n^{d(q-1)} \right)}{q \ln(n)}. \quad (5.85)$$

Zauważmy, że dla $q = 1$ wyrażenie (5.80) przyjmuje wartość równą 1, co pozwala (ze względu na jego budowę) na utożsamienie go z funkcją rozdziału dla dowolnego q . Zatem,

$$Z_q = \langle \langle N(k)^{q-1} \rangle \rangle. \quad (5.86)$$

Przy okazji widać, że $D(q = 2) = \frac{\ln(n^d \mp m)}{\ln(n)}$, co stanowi zwykły wymiar fraktalny struktury statystycznej (porównaj wzory (5.53) i (5.54)).

Stąd,

$$\eta(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} = \frac{1}{\ln(n)} \frac{p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} \ln \left(n^d \mp m \right) + (1-p)n^{d(q-1)} \ln \left(n^d \right)}{p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} + (1-p)n^{d(q-1)}}. \quad (5.87)$$

Zatem, korzystając z transformacji Legendre'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(\eta(q)) = q\eta(q) - \tau(q) &= \frac{q}{\ln(n)} \frac{p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} \ln \left(n^d \mp m \right) + (1-p)n^{d(q-1)} \ln \left(n^d \right)}{p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} + (1-p)n^{d(q-1)}} \\ &- \frac{\ln \left(p \left(n^d \mp m \right)^{q-1} + (1-p)n^{d(q-1)} \right)}{\ln(n)}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Widać, że

$$f(\eta(q = 1)) = \eta(q = 1) \text{ oraz } \left. \frac{df(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta(q=1)} = 1, \quad (5.89)$$

co stanowi warunek (wystarczający i konieczny) transformacji kontaktowej, jaką jest transformacja Legendre'a. Ponadto,

$$f(\eta(q = 0)) = -\tau(q = 0) = D(q = 0) \text{ oraz } \left. \frac{df(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta(q=0)} = 0. \quad (5.90)$$

Niestety, chociaż wyrażenia (5.82), (5.83), (5.87) i (5.88) udało się wyprowadzić w postaci analitycznej, to jakże ważną zależność $f(\eta)$ musimy uzyskać na drodze numerycznej - zrobimy to w oparciu o wzory (5.87) i (5.88).

5.5.1 Statystyczna kantoryzacja masy

Skoncentrujmy się teraz na odcinkach, w liczbie 2^k , pozostawionych po usunięciu z prawdopodobieństwem p wszystkich pozostałych $2^{k+1} - 1$ odcinków. Przypuśćmy, że te pozostawione odcinki posiadają równomiernie rozłożoną masę, przy czym w każdym pokoleniu $k = 1, 2, 3, \dots$, całkowita masa wtych wszystkich nie ulega zmianie w stosunku do masy wyjściowej równej (dla prostoty) 1, tzn. obowiązuje tutaj prawo zachowania masy. Oczywiście, zamiast masy możemy mówić o ładunku elektrostatycznym, namagnesowaniu, biomasie, itd, itp. Zachowanie masy oznacza, że masę usuniętych odcinków przekazujemy tym pozostałym.

Najpierw, odpowiemy na pytanie jak średnia masa, $\langle \mu_{k-1} \rangle$, odcinka w pokoleniu $k - 1$ skaluje się z jego długością $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$. Korzystając z definicji średniej masy, możemy napisać

$$\langle \mu_{k-1} \rangle = p \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (1-p) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(k-1)D(k)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\tau(k)}. \quad (5.91)$$

Jak widać, mamy tutaj w ogólności, doczynienia z wieloskalowym wykładnikiem skalowania $\tau(k)$ zależnym od pokolenia. Jednak, w skrajnym przypadku $p = 1$ otrzymujemy $D(k) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ niezależnie od k .

Wyrażenie (5.91) pozwala na zdefiniowanie funkcji rozdziału dla tego problemu poprzez następujące przyporządkowanie

$$Z_k = \langle \mu_{k-1} \rangle, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.92)$$

Przyporządkowanie to usprawiedliwia następującą definicję wieloskalowego wykładnika skalowania

$$\tau(k) = (k-1)D(k), \quad (5.93)$$

gdzie

$$D(k) = -\frac{\ln \left(p(n^d \mp m)^{-(k-1)} + (1-p)n^{-d(k-1)} \right)}{(k-1) \ln n}, \quad (5.94)$$

przy czym, w naszym przypadku $d = 1$, $n = 3$ natomiast $\mp m = -1$. Jak widać, powyższe wyrażenie jest uogólnieniem na d -wymiarowy i $\mp m$ defektowany zbiór Cantora. Stąd singularność,

$$\eta(k) = \frac{d\tau(k)}{dk} = \frac{1}{\ln n} \frac{p \left(n^d \mp m \right)^{-(k-1)} \ln \left(n^d \mp m \right) + (1-p)n^{-d(k-1)} \ln \left(n^d \right)}{p \left(n^d \mp m \right)^{-(k-1)} + (1-p)n^{-d(k-1)}} \quad (5.95)$$

oraz widmo singularności

$$f(\eta(k)) = k\eta(k) - \tau(k)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{\ln n} \frac{p(n^d \mp m)^{-(k-1)} \ln(n^d \mp m) + (1-p)n^{-d(k-1)} \ln(n^d)}{p(n^d \mp m)^{-(k-1)} + (1-p)n^{-d(k-1)}} \\
&+ \frac{\ln(p(n^d \mp m)^{-(k-1)} + (1-p)n^{-d(k-1)})}{\ln n}, \tag{5.96}
\end{aligned}$$

stanowiące kontaktową transformację Legendre'a.

Statystyczne diabelskie schody

Jako ciekawostkę podamy prosty przepis na zbudowanie tzw. *diabelskich schodów* w pokoleniu k , bazujący na opisanej powyżej statystycznej kantoryzacji masy.

5.6 Multifraktalna Analiza Fluktuacji Detrendowanych

Koncepcja skalowania multifraktalnego posłużyła fizykom do konstrukcji niezwykle ważnej i szeroko już dzisiaj stosowanej metody zwanej Multifraktalną Analizą Fluktuacji Detrendowanych (ang. *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*, *MF-DFA*). Została ona tutaj podzielona na pięć etapów, ułatwiających jej algorytmizację.

Etap wstępny: definicja szeregu czasowego

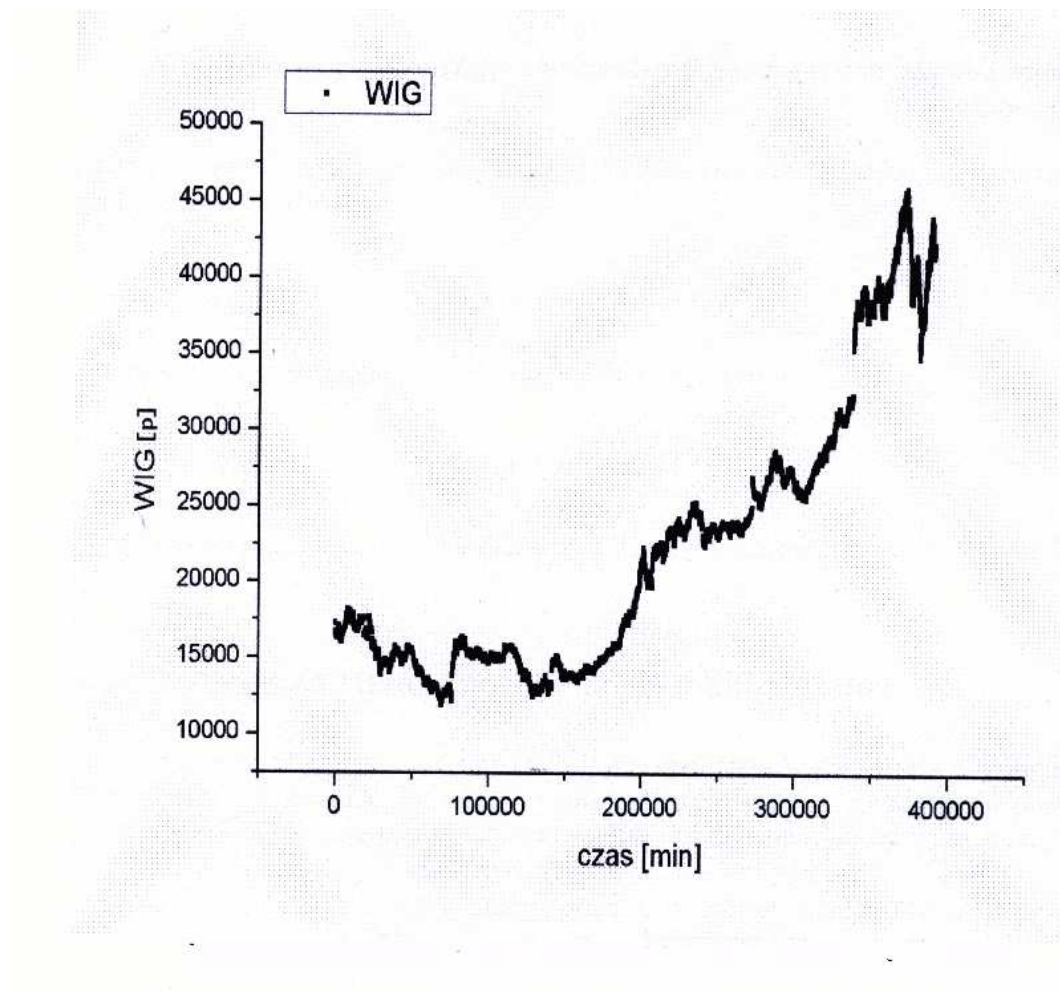
Niech rozważany szereg czasowy $\{x_k\}_{k=1}^N$ składa się z $1 \leq N \leq \infty$ elementów (liczb) indeksowanych dyskretnym wskaźnikiem k , przy czym dopuszczona jest możliwość znikania elementów szeregu wewnątrz przedziału czasowego, tzn. dla $2 \leq k \leq N-1$. Jak widać, analizuje się tutaj jedynie wartości szeregu traktując czas jako zdyskretyzowany, czyli na sposób stałokrokowy. Przykładowym szeregiem jest tutaj minutowy WIG z Warszawskiej GPW (patrz rysunek 5.7).

Etap pierwszy: konstrukcja profilu szeregu

Zdefiniujemy profil szeregu jako skumulowaną, centrowaną zmienną losową postaci:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \langle x \rangle), \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{5.97}$$

gdzie $\langle x \rangle$ jest estymatą wartości oczekiwanej szeregu czasowego. W dalszym ciągu zbiór zmiennych losowych (profilu) $\{Y(i)\}_{i=1}^N$ będzie traktowany jako nowy szereg czasowy a sama zmienna jako formalne przemieszczenie po i -krokach czasowych hipotetycznej "mrówki" finansowej (stanowiącej odpowiednik błędzącej molekuly).



Rysunek 5.7: Minutowy WIG z Warszawskiej GPW przedstawiony (przykładowo) od początku października 1999 do końca czerwca 2006.

Etap drugi: konstrukcja substratu

Podzielimy przedział czasu $[1, N]$ na $N_s = \text{int}(N/s)$ nieprzekrywających się segmentów o jednakowym rozmiarze¹¹ s . Ponieważ najczęściej rozmiar s jest niewspółmierny z N więc część segmentu o rozmiarze $N - s N_s$ mniejszym od s pozostaje. Aby nie odrzucać tej części budujemy kolejnych N_s segmentów o rozmiarze s , ale przeliczamy je od końca do początku (czyli od N do 1) a nie jak poprzednio od 1 do N . W ten sposób dysponujemy substratem o dwukrotnie większej liczbie segmentów równej $2N_s$ (wciąż o jednakowym rozmiarze s).

Etap trzeci: eliminacja lokalnych trendów

W każdym spośród $2N_s$ segmentów trend jest przybliżany za pomocą wielomianu w_ν^m ustalonego stopnia $m = 1, 2, \dots$, jednakowego dla wszystkich segmentów ν i takiego, że $m \leq s - 2$ (w przeciwnym razie nie byłoby możliwe wyznaczenie wszystkich współczynników tego wielomianu). Współczynniki tego wielomianu wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów minimalizując wariancję

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(\nu - 1)s + i] - w_\nu^m(i)\}^2, \quad (5.98)$$

dla każdego segmentu $\nu = 1, 2, \dots, N_s$, z osobna; dla każdego z pozostałych N_s segmentów, $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$, minimalizowana jest (odpowiednia) wariancja

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (\nu - N_s)s + i] - w_\nu^m(i)\}^2. \quad (5.99)$$

Często, stopień wielomianu m pojawia się dodatkowo w (bardziej szczegółowej) nazwie metody mianowicie, MF-DFA m . W ten sposób możemy mówić o metodzie pierwszorzędowej (liniowej) MD-DFA1, drugorzędowej MF-DFA2, trzeciorzędowej MF-DFA3, itd. Stabilizowanie się wyników uzyskanych metodami o różnych rzędach dostarcza informacji o rzędzie trendu (czyli o najniższym rzędzie metody, licząc od którego widmo lokalnych wykładników (osobliwości) nie ulega już zmianie). Niestety, to stabilizowanie się widma osobliwości można otrzymać w zasadzie tylko na drodze numerycznej, dedykowanej każdemu rozpatrywanemu multifraktalowi z osobna.

Etap czwarty: funkcja fluktuacyjna

Funkcja fluktuacyjna, którą w dalszym ciągu będziemy nazywać funkcją q-fluktuacyjną zdefiniowana została w następujący sposób:

$$F_q(s) = \langle [F^2(s)]^{q/2} \rangle^{1/q}, \quad (5.100)$$

¹¹Mówiąc o rozmiarze mamy na myśli liczbę punktów.

gdzie średnią $\langle \dots \rangle$ zdefiniowano następująco:

$$\langle [F^2(s)]^{q/2} \rangle = \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, s)]^{q/2}, \quad (5.101)$$

przy czym q jest tutaj liczbą rzeczywistą różną od zera (do tego przypadku powrócimy jeszcze w dalszej części). **Naszym zasadniczym celem jest znalezienie zależności funkcji q -fluktuacyjnej od wielkości przedziału s dla różnych wartości q .**

Etap piąty: skalowanie funkcji q -fluktuacyjnej

Jesteśmy zainteresowani potęgową zależnością funkcji q -fluktuacyjnej od s tzn. zależnością postaci,

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}, \quad (5.102)$$

gdzie $h(q)$ jestw tzw. uogólnionym wykładnikiem Hursta. Z tego typu zależnością mamy do czynienia np. wtedy gdy szereg czasowy $\{x_k\}_{k=1}^N$ wykazuje długookresowe korelacje (a więc zanikające na sposób potęgowy). Na rysunku 5.8 sprawdzono zależność (5.102) w oparciu o wspomniany wcześniej minutowy WIG. Tak uzyskaną zależność uogólnionego wykładnika Hursta od q przedstawiono na kolejnym rysunku 5.9.

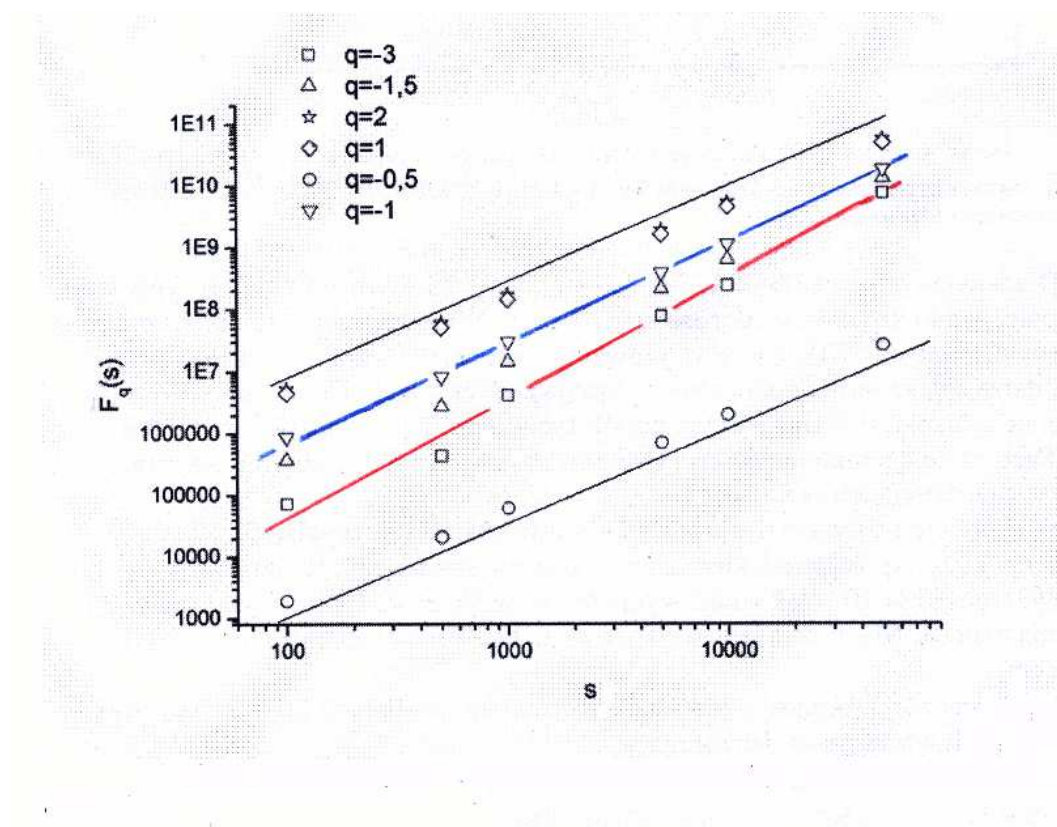
Dla kompletności na rysunku 5.10 przedstawiono zależność uogólnionego wykładnika τ od q dla minutowego WIG. Wykładnik ten został zdefiniowany wzorem

$$\tau(q) \stackrel{\text{def.}}{=} q h(q) - 1. \quad (5.103)$$

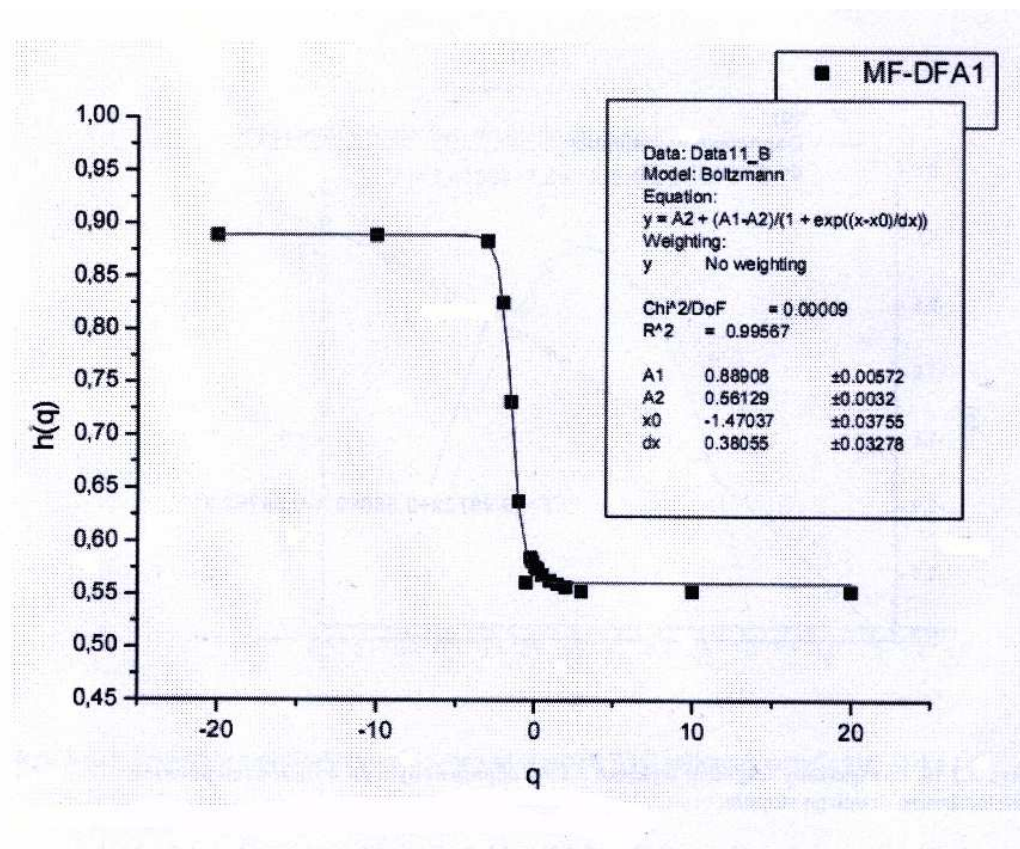
Tym samym, wykładnik ten kalibruje się następująco: $\tau(q=0) = -1$ (patrz rysunek 5.11). Wreszcie, dysponując uogólnionym wykładnikiem $\tau(q)$ można było wyznaczyć widmo osobliwości (patrz rozdz. 5.4.3) - przedstawiono je na rysunku 5.12.

Zwróćmy uwagę, że **otwartym pozostaje pytanie o związek definicji (5.103) z uogólnionym wykładnikiem (5.67) (patrz rozdz. 5.4.2)**. Do zagadnienia tego przechodzimy w kolejnym rozdziale.

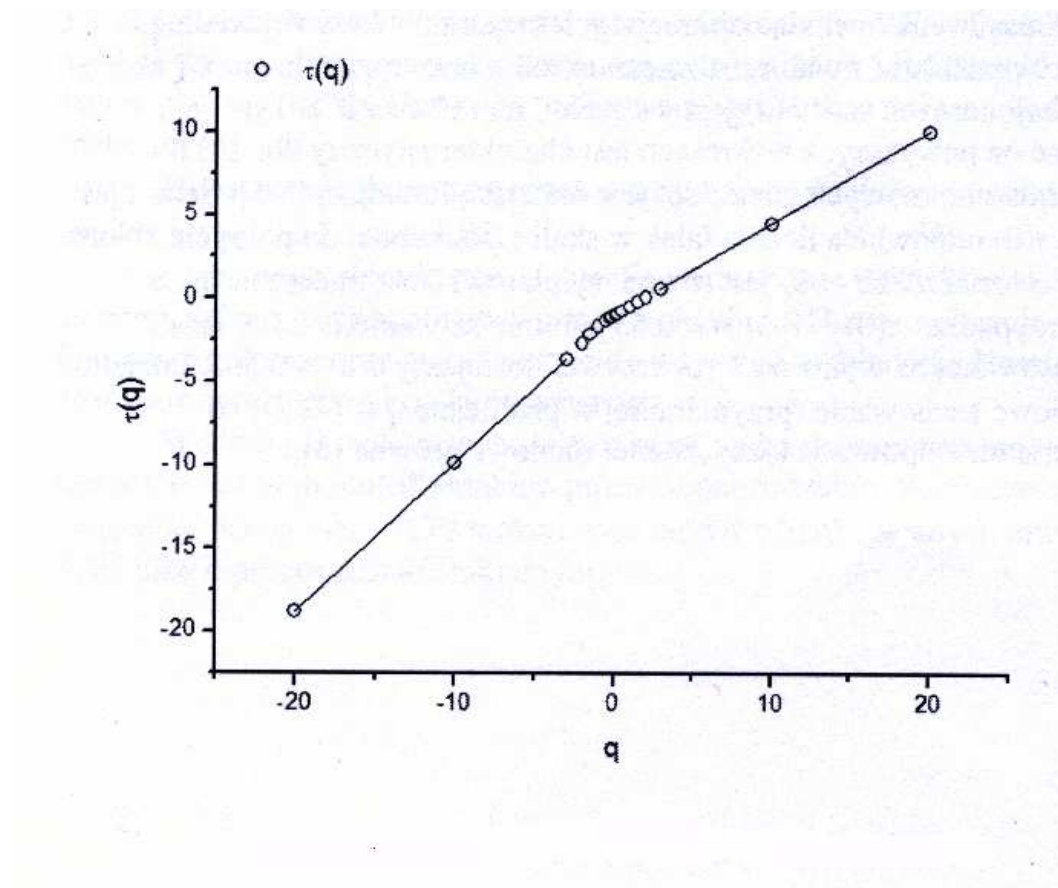
5.6.1 Związek funkcji fluktuacyjnej z sumą statystyczną



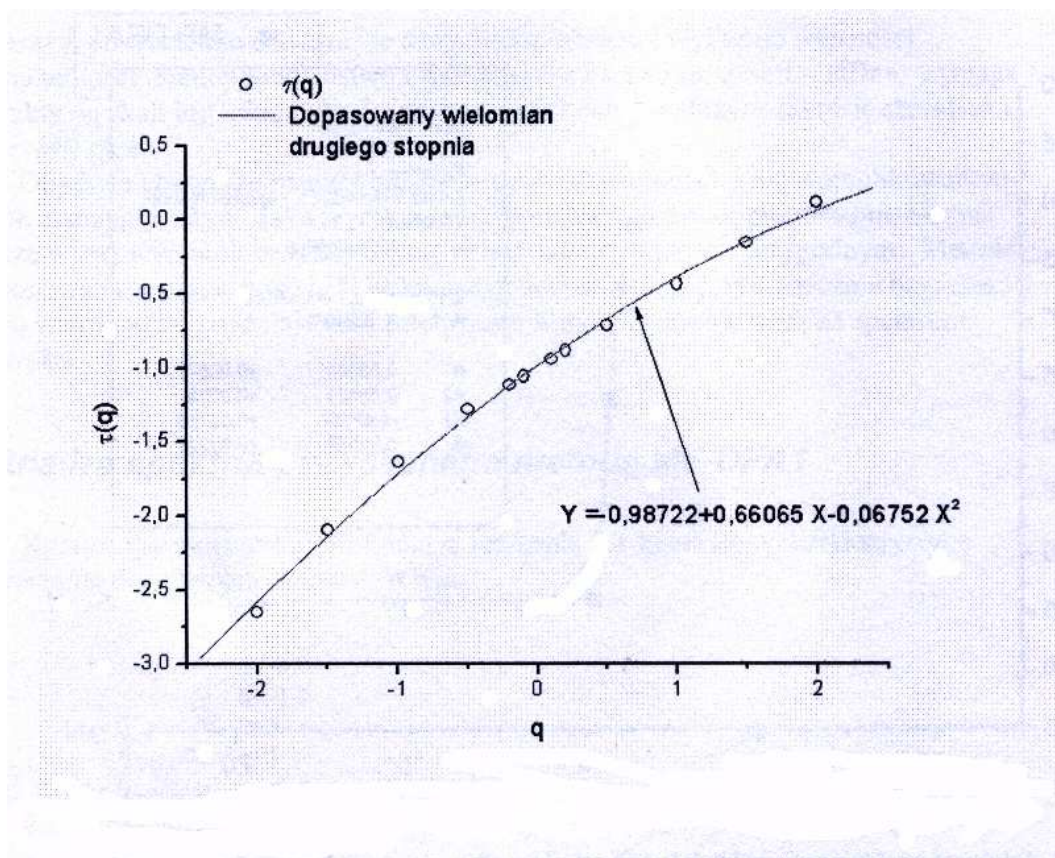
Rysunek 5.8: Zależność funkcji fluktuacyjnej od szerokości przedziału dyskretyzacji s dla sześciu przykładowo wybranych wartości q dla wspomnianego wcześniej minutowego WIG.



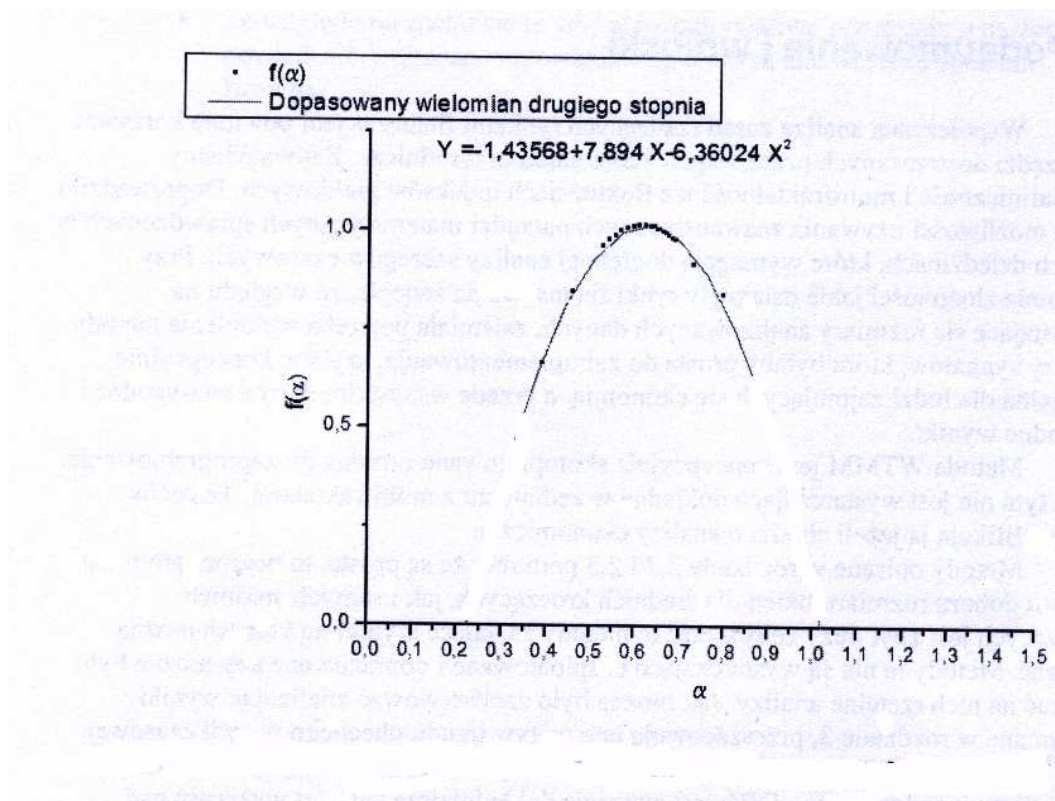
Rysunek 5.9: Zależność uogólnionego wykładnika Hursta od q dla minutowego WIG.



Rysunek 5.10: Zależność uogólnionego wykładnika τ od q dla minutowego WIG.



Rysunek 5.11: Zależność uogólnionego wykładnika τ od q dla minutowego WIG w zakresie $-3 \leq q \leq 3$, czyli znacznie zawężonym w stosunku do przedstawionego na rysunku 5.10.



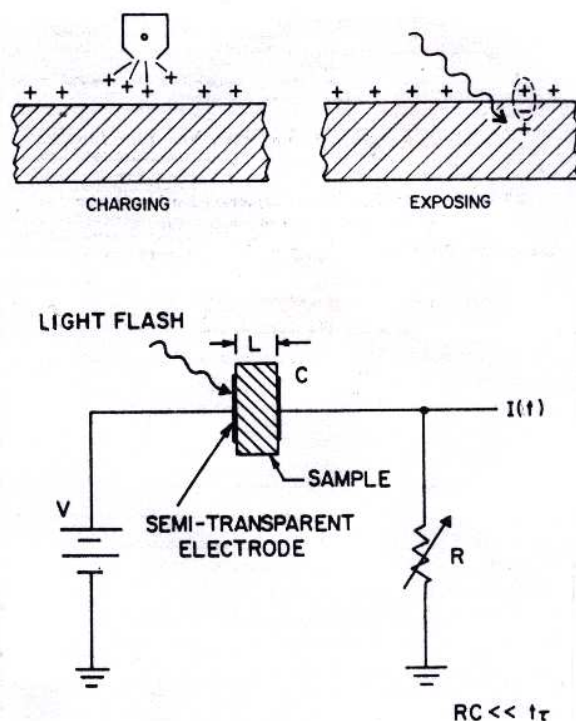
Rysunek 5.12: Zależność widma osobliwości f od singularności α dla minutowego WIG w zakresie $0.35 \leq \alpha \leq 0.85$.

Rozdział 6

Transport dyspersyjny - doświadczenia Sharfe'a, Gilla i Pfistera

Piękne doświadczenie, w którym zaobserwowano anomalny, dyspersyjny transport zostało wykonane po raz pierwszy w roku 1970 przez M.E. Sharfe'a ("Transient Photoconductivity in Vitreous As_2Se_3 ", Phys. Rev. **B 2**, 5025–5034); w roku 1974 G.Pfister podjął dalsze badania nad tym związkiem, analizując zależność anomalous transportu od ciśnienia przyłożonego do próbki ("Pressure-Dependence Electronic Transport in Amorphous As_2Se_3 ", Phys. Rev. Lett. **33**, 1474–1477). Oba autorzy badali zależne od częstości fotoprzewodnictwo w amorficznym αAs_2Se_3 , mierząc zanikanie w czasie fotoprądu wywołanego krótkotrwałym impulsem świetlnym. Układ pomiarowy przedstawiono schematycznie na rys.6.1. Jak widać, jego zasadniczym elementem jest próbka zbudowana ze wspomnianego powyżej światłoczułego półprzewodnika o przewodnictwie dziurowym umieszczona pomiędzy dwiema elektrodami, z których jedna (złota) jest półprzezroczysta; jej impulsowe oświetlenie pozwala na wygenerowanie w próbce przewodzących dziur które, dzięki przyłożonej do elektrod (niewielkiej) różnicy potencjałów, wędrują do przeciwnej elektrody, dając zanikający w czasie prąd dziurowy - natężenie tego prądu $I(t)$ jest mierzone w funkcji czasu. Wynik (w skali $\ln - \ln$) przedstawiono na rys.6.2 - widać dwa różne obszary potęgowej zależności prądu od czasu.

Dla porównania na rys.6.3 (górna część) zamieszczono zależność pokazującą zanikanie prądu dla sytuacji normalnej, gdy dyfuzja i dryf opisana jest biegnącym rozkładem Gaussa. Dolna część rysunku dotyczy rozkładu Pareto-Lévy'ego i jest przez nas omawiana poniżej. Warto dodać, iż otrzymany efekt ma charakter ogólniejszy a mianowicie, w 1972 roku W.D.Gill (J.Appl.Phys. **43**, 5033–5040) zaobserwował go także dla organicznego kompleksu trinitrofluorenone i poly-*n*-vinylcarazole. Jednym z zasadniczych celów niniejszego wykładu jest wyjaśnienie zaobserwowanego efektu, który jest kluczowym dla zrozumienia tzw. dyfuzji anomalnej.



Rysunek 6.1: Schematyczny układ elektryczny do pomiaru relaksacji fotoprądu w amorficznych filmach.

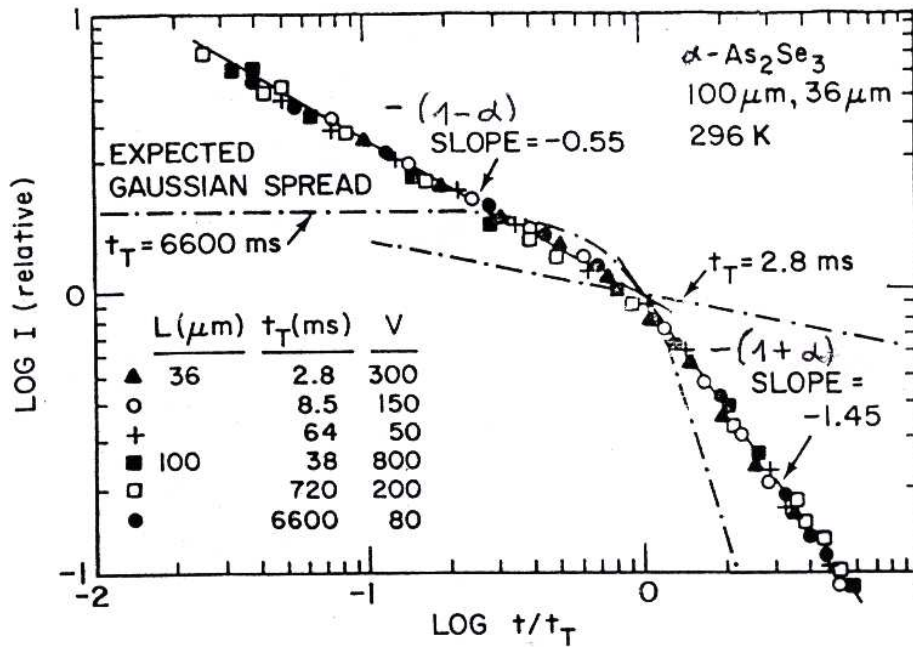
6.1 Błądzenie w czasie ciągłym

W niniejszym rozdziale przedstawiamy model skokowego błądzenia pojedynczego atomu w *czasie ciągłym*; różni się on od poprzednio omawianych prostszych modeli, które były asymptotycznie równoważne modelowi skokowego błądzenia atomu w *czasie dyskretnym*. Rozważamy dwie sytuacje:

- 1) pod nieobecność zewnętrznego pola (potencjał ten przedstawiono schematycznie na rys. 6.4),
- 2) w obecności zewnętrznego pola (potencjał ten przedstawiono schematycznie na rys. 6.5) wywołującego dryf.

To właśnie wprowadzenie formalizmu matematycznego¹ pozwalającego opisać dowolne błądzenie w każdej chwili stanowiło przełomowy krok w teorii procesów przypadkowych. Wyprowadziło to badania poza *Centralne Twierdzenie Graniczne*, czyli

¹W literaturze anglosaskiej nosi on nazwę *Continuous-Time Random Walk*.



Rysunek 6.2: Relaksacja fotoprądu zmierzona w amorficznym $\alpha\text{As}_2\text{Se}_3$.

rozszerzyło je na procesy niegaussowskie, tzn. wychodzące poza ruchy Browna, a w tym zwłaszcza na procesy z pamięcią, które umożliwiły wprowadzenie do fizyki *procesów Lévy'ego*. Potencjał przedstawiony na rysunkach 6.4 i 6.5 jest podstawą popularnego *dolinowego modelu błędzeń przypadkowych*, który w dalszym ciągu analizujemy pod nieobecność oraz w obecności zewnętrznej stałej siły F wywołującej dryf.

6.1.1 Podstawowe wielkości

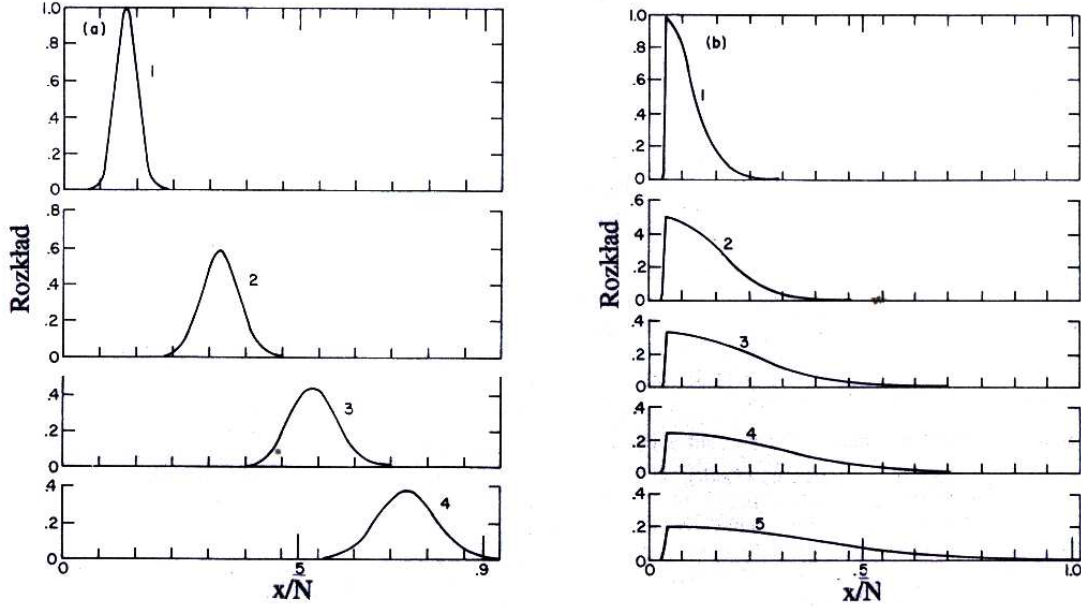
Ilościowe sformułowanie modelu rozpoczynamy od wprowadzenia

- 1) gęstości prawdopodobieństwa $\Phi_{\mathcal{E}}(t)$ przetrwania cząsteczki w danej dolinie potencjału o głębokości $\mathcal{E}$ przynajmniej przez okres czasu t , czyli przetrwania od chwili początkowej w której cząsteczka pojawiła się w niej, przynajmniej do chwili t (tzn. cząsteczka może przetrwać dłużej w danej dolinie potencjału ale na pewno nie krócej),

oraz powiązanej z nią

- 2) funkcji rozkładu czasów oczekiwania cząsteczki w dolinie potencjału, $\phi_{\mathcal{E}}(t)$.

Funkcja $\phi_{\mathcal{E}}(t)$ jest zdefiniowana jako gęstość prawdopodobieństwa, że cząsteczka przetrwa w (dowolnie) wybranej dolinie potencjału o głębokości $\mathcal{E}$ dokładnie do



Rysunek 6.3: Relaksacja fotoprądu dla rozkładu Gaussa (lewy rysunek) oraz dla rozkładu Pareto-Lévy'ego (prawy rysunek).

chwili t tzn. dokładnie w chwili t opuści tę dolinę. Z powyższych dwóch definicji wynika następujący związek pomiędzy obiema funkcjami,

$$\Phi_{\mathcal{E}}(t) = \int_t^{\infty} dt' \phi_{\mathcal{E}}(t') = 1 - \int_0^{\infty} dt' \phi_{\mathcal{E}}(t'), \quad (6.1)$$

gdzie przy zapisaniu drugiej równości skorzystaliśmy z warunku normalizacji

$$\int_0^{\infty} dt \phi_{\mathcal{E}}(t) = 1. \quad (6.2)$$

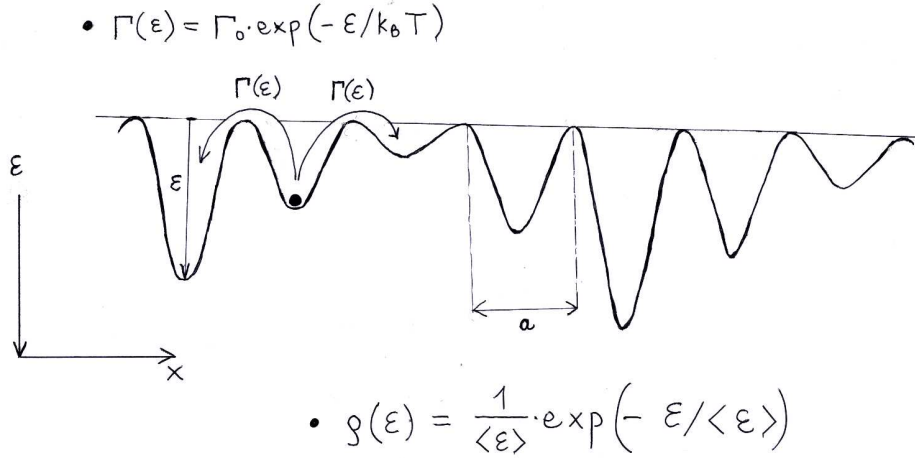
Warunek ten mówi, że w danej dolinie potencjału cząstka z pewnością przetrwa dowolnie długi okres czasu. Funkcja $\phi_{\mathcal{E}}$ jest wygodniejszą do dalszego operowania dlatego traktujemy ją w naszym modelu jako wyjściową; często jednak, zwłaszcza na etapach pośrednich, posługujemy się także obiema funkcjami. W całym niniejszym wykładzie przyjmujemy, funkcję rozkładu czasów oczekiwania w postaci Poissona

$$\phi_{\mathcal{E}}(t) = \nu^0(\mathcal{E}) \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t), \quad (6.3)$$

gdzie $\nu^0(\mathcal{E})$ jest częstością przeskoków cząsteczki pomiędzy sąsiednimi dolinami potencjału (w przypadku jednowymiarowym mogą to być dwaj najbliżsi sąsiedzi, patrz rys. 6.4) w nieobecności zewnętrznej siły wywołującej dryf. Z powyższego wzoru oraz relacji (6.1) otrzymujemy, że

$$\Phi_{\mathcal{E}}(t) = \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t). \quad (6.4)$$

Random-trap or valley model



Rysunek 6.4: Błądzenie molekuly w potencjale dolinowym pod nieobecność zewnętrznego pola (stąd poziom odniesienia potencjału jest równoległy do osi x -ów).

Możemy teraz przystąpić do skonstruowania separowalnej, cząstkowej funkcji rozkładu czasów oczekiwania, którą oznaczymy przez $\psi_\varepsilon(x, t)$ (zapis ten nie ma nic wspólnego z analogicznym, oznaczającym funkcję falową w mechanice kwantowej). W tym celu musimy dodatkowo wprowadzić

3) przestrzenny rozkład przemieszczeń $p(x)$

zdefiniowany jako gęstość prawdopodobieństwa przemieszczenia się cząsteczki o wektor x (ponieważ ruch cząsteczki jest jednowymiarowy dlatego dla uproszczenia opuściliśmy oznaczenie $\cdot$). Oczywiście, spełnia on warunek normalizacyjny postaci

$$\int_0^\infty dx p(x) = 1. \quad (6.5)$$

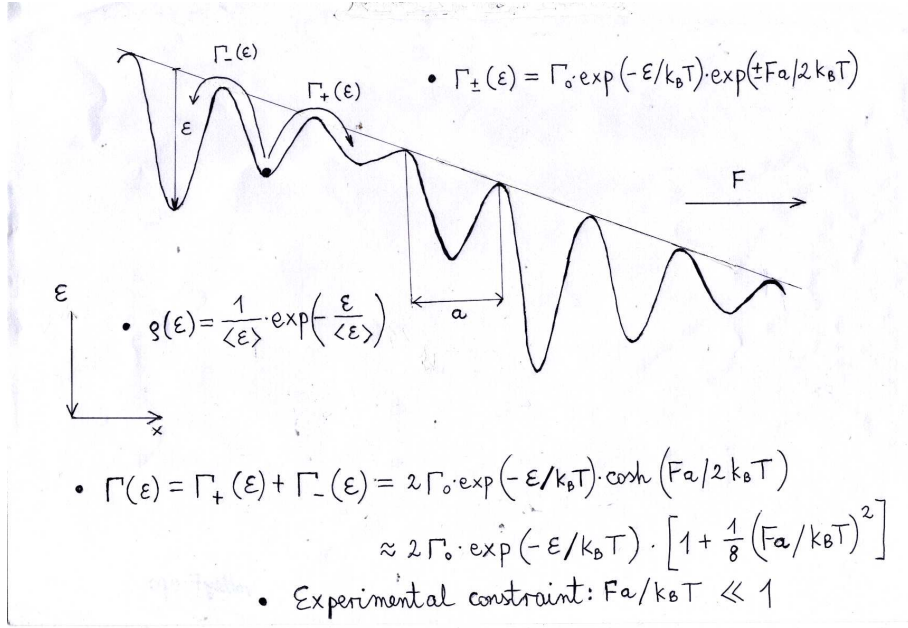
Przykładowo, rozkład $p(x)$ można przyjąć w postaci,

$$p(x) = \frac{1}{2} [\delta(x - b_0) + \delta(x + b_0)] \quad (6.6)$$

gdzie b_0 jest stałą odległością pomiędzy sąsiednimi dolinami potencjału. Tego typu rozkład dopuszcza, jak widać, jedynie przeskoki pomiędzy dolinami oddalonymi o b_0 .

Teraz możemy zapisać

$$\psi_\varepsilon(x, t) = p(x) \phi_\varepsilon(t); \quad (6.7)$$



Rysunek 6.5: Błądzenie molekuly w potencjale dolinowym w obecności zewnętrznego pola (stąd poziom odniesienia potencjału jest nachylony pod niezerowym kątem do osi x -ów).

jak widać, *cząstkowa funkcja rozkładu czasów oczekiwania* jest gęstością prawdopodobieństwa następującej sekwencji zdarzeń: **najpierw cząsteczka przetrwa w danym miejscu** (tzn. dolinie potencjału) **aż do chwili t a następnie, dokładnie w chwili t , przemieści się** (a dokładniej, dokona przeskoku) **o wektor x** . Separowalność cząstkowej funkcji rozkładu jest tutaj narzucona separowalnością obu zmiennych stochastycznych tj. przemieszczenia x oraz czasu t . (Zauważmy, że czas występuje tutaj jako zmienna losowa co, jak zobaczymy, w niczym nie zmienia jego roli.) Zakładając separowalność funkcji $\psi_{\epsilon}(x, t)$ przyjmujemy tym samym, że dwa zasadniczo różne zdarzenia takie jak oczekiwanie oraz przemieszczenie się cząsteczki są od siebie statystycznie niezależne. Założenie to wydaje się całkiem naturalne dla tak elementarnych procesów o jakich tutaj mówimy. W drugiej części niniejszej pracy omówimy także błądzenia nieseparowalne.

Z warunków normalizacyjnych (6.2), (6.5) oraz definicji (6.7) wynika bezpośrednio niezbędny warunek normalizacyjny

$$\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\epsilon}(x, t) = 1; \quad (6.8)$$

w przypadku ogólniejszym, gdyby funkcja rozkładu $\psi_{\epsilon}(x, t)$ nie była separowalna, wówczas musielibyśmy warunek (6.8) po prostu narzucić jako wymaganą normalizację. Ponadto, z definicji (6.1) i (6.7) oraz z warunku normalizacyjnego (6.5) otrzy-

mujemy, że

$$\Psi_{\mathcal{E}}(t) = \int_t^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\mathcal{E}}(x, t') = 1 - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\mathcal{E}}(x, t'), \quad (6.9)$$

gdzie definicja funkcji $\Psi_{\mathcal{E}}(t)$ oraz $\Phi_{\mathcal{E}}(t)$ są identyczne, a w przypadku separowalnym (który dotyczy zarówno błędzenia pod nieobecność jak też w obecności pola co zostanie wykazane poniżej), uzyskujemy $\Psi_{\mathcal{E}}(t) = \Phi_{\mathcal{E}}(t)$. Warto podkreślić, że równości występujące w (6.9) mają charakter ogólny, niezależny od własności separowalności funkcji rozkładu $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$, i wynikają tylko z jej definicji oraz z warunku normalizacyjnego (6.8).

6.1.2 Funkcja rozkładu czasów oczekiwania w obecności dryfu

Występowanie systematycznego dryfu (wywołanego zewnętrzną siłą działającą na wędrujący atom, patrz rys.2(6.1)) zmienia, jak zobaczymy, postać funkcji rozkładu czasów oczekiwania $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ oraz wymaga rozszerzenia relacji (6.1). Jednak nadal, jako podstawową funkcję rozkładu, można używać $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$.

W pierwszym kroku, wprowadzamy częstość $\nu^{\pm}(\mathcal{E})$ przeskoku atomu pomiędzy sąsiednimi dolinami potencjału (patrz, rys.2(6.1)) w kierunku odpowiednio zgodnym z dryfem (znak $+$) oraz przeciwnym do niego (znak $-$). Zgodnie z interpretacją funkcji rozkładu przybiera ona teraz postać

$$\psi_{\mathcal{E}}(x, t) = \psi_{\mathcal{E}}^{+}(x, t) + \psi_{\mathcal{E}}^{-}(x, t), \quad (6.10)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$\psi_{\mathcal{E}}^{\pm}(x, t) = \nu^{\pm}(\mathcal{E}) \delta(x \mp b_0) \exp(-\nu(\mathcal{E})t), \quad (6.11)$$

wynikające z istnienia dryfu przy czym sumaryczna częstość

$$\nu(\mathcal{E}) = \nu^{+}(\mathcal{E}) + \nu^{-}(\mathcal{E}) \quad (6.12)$$

oraz częstości kierunkowe

$$\nu^{\pm}(\mathcal{E}) = p^{\pm} \nu^0(\mathcal{E}) \quad (6.13)$$

gdzie waga

$$p^{\pm} = \frac{\exp(\pm F b_0 / 2 k_B T)}{\exp(F b_0 / 2 k_B T) + \exp(-F b_0 / 2 k_B T)} = \frac{1}{2} \frac{\exp(\pm F b_0 / 2 k_B T)}{\cosh(F b_0 / 2 k_B T)}, \quad (6.14)$$

jest prawdopodobieństwem wyboru jednej z dwóch orientacji pojedynczego przeskoku - jak widać, ma miejsce niezbędna normalizacja $p^{+} + p^{-} = 1$; z (6.13) oraz (6.14) wynika niezwykle pożyteczna relacja,

$$\nu(\mathcal{E}) = \nu^0(\mathcal{E}) \quad (6.15)$$

co oznacza w oparciu o wyrażenie (6.11), że

$$\psi_{\mathcal{E}}^{\pm}(x, t) = p^{\pm} \delta(x \mp b_0) \nu^0(\mathcal{E}) \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t) = p^{\pm} \delta(x \mp b_0) \phi_{\mathcal{E}}(t). \quad (6.16)$$

Tym samym, cząstkową funkcję rozkładu czasów oczekiwana można przedstawić w postaci separowalnej

$$\psi_{\mathcal{E}}(x, t) = p(x) \phi_{\mathcal{E}}(t); \quad (6.17)$$

analogicznej do tej dla przypadku niewystępowania zewnętrznego pola, gdzie

$$p(x) = p^+ \delta(x - b_0) + p^- \delta(x + b_0) \quad (6.18)$$

jest uogólnieniem wyrażenia (6.6) na przypadek uwzględniający istnienie zewnętrznego pola.

W przypadku słabego pola zewnętrznego czyli $Fb_0/2 \ll k_B T$, wyrażenie (6.14) upraszcza się do postaci liniowej,

$$p^{\pm} \approx \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{Fb_0}{2k_B T} \right), \quad (6.19)$$

szczególnie przydatnej w teorii liniowej odpowiedzi (przy obliczaniu podatności i przewodnictwa).

W drugim kroku, dysponując wzorem (6.10) na funkcję rozkładu $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ oraz pomocniczymi określeniami (6.11) - (6.19) możemy już skorzystać z rozszerzonej definicji (6.9) gęstości prawdopodobieństwa $\Psi_{\mathcal{E}}(t)$ przetrwania cząsteczki (przynajmniej) przez czas t w danej dolinie potencjału o głębokości $\mathcal{E}$, otrzymując postać

$$\Psi_{\mathcal{E}}(t) = \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t) = \Phi_{\mathcal{E}}(t) \quad (6.20)$$

identyczną jak w przypadku braku zewnętrznego pola. Oba zasadnicze wzory, zarówno (6.17) jak i (6.20) wynikają z separowalności cząstkowej funkcji rozkładu czasów oczekiwania oraz niezależności sumarycznej częstości przeskoków $\nu(\mathcal{E})$ od zewnętrznego pola.

Dysponując wprowadzonymi powyżej gęstościami prawdopodobieństw, przystępujemy do obliczenia propagatora opisującego proces błędzenia przypadkowego zarówno pod nieobecność jak też w obecności zewnętrznego pola wywołującego dryf.

6.1.3 Propagator jednocząstkowy

Zasadniczym celem niniejszego rozdziału jest wyznaczenie propagatora $\mathcal{P}(X, t \mid X_0, t_0)$ lub inaczej mówiąc, jednocząstkowej warunkowej gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki w położeniu X w chwili t pod warunkiem, że początkowo cząsteczka ta znajdowała się w położeniu X_0 w chwili t_0 . Cząsteczka mogła pojawić się w danej dolinie potencjału w położeniu X w chwili t w wyniku następujących procesów:

- 1) mogła trwać w danej dolinie potencjału w położeniu $X(= X_0)$ od samego początku aż do chwili t , o ile tak się złożyło, że położenie to było początkowym - takie trwanie opisujemy za pomocą propagatora $P_{\mathcal{E}}^{(0)}(X, t | X_0, t_0)$,
- 2) mogła się znaleźć w położeniu X w wyniku pojedynczego przelotu - proces ten opisujemy propagatorem $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}}^{(1)}(X, t | X_0, t_0)$, lub
- 3) w wyniku dwóch kolejnych przelotów przedzielonych oczekiwaniem w jakiejś dolinie potencjału - proces ten opisujemy propagatorem $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}}^{(2)}(X, t | X_0, t_0)$,
- 4) itd., itp., ogólnie rzecz biorąc,
- 5) cząsteczka mogła pojawić się w danej dolinie potencjału w położeniu X w chwili t w wyniku $n(\geq 1)$ przelotów, z których każdy był poprzedzony (krótszym lub dłuższym) oczekiwaniem w jakiejś dolinie potencjału - proces ten opisujemy za pomocą cząstkowego propagatora $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t | X_0, t_0)$.

Reasumując, powyższe procesy ujmujemy za pomocą sumarycznego propagatora,

$$P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}}(X, t | X_0, t_0) = P_{\mathcal{E}}^{(0)}(X, t | X_0, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t | X_0, t_0), \quad (6.21)$$

opisującego gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki w położeniu X w chwili t w wyniku dowolnego procesu tzn. trwania w położeniu początkowym (jeżeli $X = X_0$ - składnik o indeksie $n = 0$ w wyrażeniu (6.21)) bądź też jako rezultat procesu składającego się z dowolnej liczby występujących na przemian oczekiwań i przelotów (wyrazy z $n \geq 1$).

Można teraz postawić pytanie o związek wcześniej wprowadzonego propagatora $\mathcal{P}(X, t | X_0, t_0)$ z powyżej zdefiniowanym $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}}(X, t | X_0, t_0)$? Aby znaleźć ten związek zapiszmy w jawnej postaci propagatory cząstkowe $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t | X_0, t_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, wprowadzając dogodniejszą notację. Mianowicie,

$$P_{\mathcal{E}}^{(0)}(X, t)(\equiv P_{\mathcal{E}}^{(0)}(X, t | X_0, t_0)) = \delta(X - X_0)\Psi_{\mathcal{E}}(t - t_0), \quad (6.22)$$

następnie

$$P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}}^{(1)}(X, t)(\equiv P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}}^{(1)}(X, t | X_0, t_0)) = \int_0^t dt_1 \psi_{\mathcal{E}_0}(X - X_0, t_1 - t_0)\Psi_{\mathcal{E}}(t - t_1), \quad (6.23)$$

oraz

$$P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}}^{(2)}(X, t)(\equiv P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}}^{(2)}(X, t | X_0, t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \psi_{\mathcal{E}_0}(x_1 - X_0, t_1 - t_0)\psi_{\mathcal{E}_1}(X - x_1, t_2 - t_1)\Psi_{\mathcal{E}}(t - t_2), \quad (6.24)$$

itd., w ogólności zapisujemy

$$\begin{aligned}
& P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t) (\equiv P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t \mid X_0, t_0)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \\
& \psi_{\mathcal{E}_0}(x_1 - X_0, t_1 - t_0) \psi_{\mathcal{E}_1}(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots \psi_{\mathcal{E}_{n-1}}(X - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \\
& \Psi_{\mathcal{E}}(t - t_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Wyrażenia (6.23), (6.24) i (6.25) opierają się w istocie rzeczy na założeniu, że funkcja rozkładu $\psi_{\mathcal{E}}(x_2 - x_1, t_2 - t_1)$ opisuje stan równowagi cząstkowej (lokalnej) zatem zależy od różnicy zmiennych przestrzennych i czasowych tak jak to ma miejsce w stanie równowagi zupełnej - dyskusji tej sytuacji poświęcamy więcej miejsca w dalszej części. Co więcej, wyrażenia te zostały skonstruowane przy założeniu, że pierwsze oczekiwanie i następujący po nim przelot są opisywane tą samą funkcją rozkładu co i następne tego typu pary zdarzeń - także i ten subtelny aspekt procesu błędzeń omawiamy w dalszej części.

Jak widać, *propagatory typu P zawierają w sobie dodatkowo informacje o głębokościach odwiedzonych przez cząsteczkę dolinach potencjału*; dopiero uśrednienie tych propagatorów po "krajobrazie" energetycznym daje propagatory typu $\mathcal{P}$. Poniżej omawiamy tę procedurę średniowania.

Po pierwsze zakładamy, że głębokości dolin potencjału są od siebie statystycznie niezależne co oznacza, że rozkład $p(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \dots)$ z którym średniujemy propagatory cząstkowe $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n}^{(n)}(X, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, (a stąd propagator sumaryczny $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \dots}(X, t)$) faktoryzuje się tzn.

$$p(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \dots) = p(\mathcal{E}_0)p(\mathcal{E}_1) \dots p(\mathcal{E}_n) \dots \quad (6.26)$$

Na mocy powyższego, średniując równości (6.22) oraz (6.25), otrzymujemy odpowiednio

$$\mathcal{P}^{(0)}(X, t) (\equiv \mathcal{P}^{(0)}(X, t \mid X_0, t_0)) = \delta(X - X_0)\Psi(t - t_0), \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(n)}(X, t) (\equiv \mathcal{P}^{(n)}(X, t \mid X_0, t_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \\
& \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \psi(x_1 - X_0, t_1 - t_0) \psi(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots \\
& \psi(X - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \Psi(t - t_n), \\
& n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.28)
\end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia wielkości średnich

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= \int_0^{\infty} d\mathcal{E} p(\mathcal{E}) \psi_{\mathcal{E}}(x, t), \\
\Psi(t) &= \int_0^{\infty} d\mathcal{E} p(\mathcal{E}) \Psi_{\mathcal{E}}(t), \\
\mathcal{P}^{(n)}(X, t) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} d\mathcal{E}_0 d\mathcal{E}_1 \dots d\mathcal{E}_n \\
p(\mathcal{E}_0)p(\mathcal{E}_1) \dots p(\mathcal{E}_n) P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n}^{(n)}(X, t), \quad n &= 1, 2, \dots, \quad (6.29)
\end{aligned}$$

które w dalszym ciągu zinterpretujemy, wskazując na sposób ich realizacji. Ostatecznie, z (6.28) oraz (6.21) otrzymujemy wyrażenie,

$$\mathcal{P}(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^{(n)}(X, t) \quad (6.30)$$

które pozwala rozpocząć postępowanie umożliwiające skonstruowanie odpowiedzi na pytanie dlaczego, na poziomie makroskopowym, niektóre rodzaje błędzeń postrzegamy jako posiadające charakter singularny (fraktalny)?

6.1.4 Postać zamknięta propagatora

Narzuca się teraz zasadnicze, techniczne pytanie mianowicie, jak zapisać (o ile to jest możliwe) propagator (6.30) w postaci zamkniętej? Na szczęście, odpowiedź na to pytanie jest pozytywna wymaga jednak przejścia do transformat Fouriera oraz Laplace'a. Wtedy równanie (6.30) przybiera postać

$$\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{P}}^{(n)}(k, s), \quad (6.31)$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji transformaty Fouriera-Laplace'a postaci

$$\tilde{\mathcal{F}}(k, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dX \exp(-ikX) \int_0^{\infty} dt \exp(-st) \mathcal{F}(X, t) \quad (6.32)$$

tutaj $\mathcal{F}$ jest dowolną funkcją spełniającą twierdzenie o odwracaniu transformat Fouriera oraz Laplace'a (patrz I.M. Ryżyk i I.S. Gradsztajn, "Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów", PWN, Warszawa 1964). Korzystając z definicji (6.28) propagatora $\mathcal{P}^{(0)}$ i (6.28) propagatora $\mathcal{P}^{(n)}$ oraz transformaty Fouriera-Laplace'a (6.32) można obliczyć (patrz Dodatek ...), że

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(n)}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) [\tilde{\psi}(k, s)]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.33)$$

Stąd oraz z (6.31) otrzymujemy poszukiwaną, zamkniętą postać sumarycznego propagatora w przestrzeni odwrotnej (czyli w zmiennych Fouriera-Laplace'a),

$$\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \frac{\tilde{\Psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(k, s)} = \frac{1}{s} \frac{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)}{1 - \tilde{\psi}(k, s)}, \quad (6.34)$$

gdzie, przy wyprowadzeniu drugiej równości, skorzystaliśmy dodatkowo z uśrednionej po $\mathcal{E}$ transformaty Laplace'a formuły (6.9).

Zauważmy, że do wyprowadzenia powyższej formuły nie było potrzebne założenie o separowalności funkcji rozkładu $\psi(x, t)$ - w takim przypadku formuła (6.34) przyjmuje postać

$$\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \frac{\tilde{\Phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)\tilde{p}(k)} = \frac{1}{s} \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)\tilde{p}(k)}, \quad (6.35)$$

gdzie podobnie jak dla (6.34), skorzystaliśmy z (uśrednionej po $\mathcal{E}$) transformaty Laplace’a formuły (6.1).

Teraz możemy już bardzo precyzyjnie sformułować zasadniczy cel niniejszej pracy mianowicie, jest nim analiza propagatora danego wyrażeniem (6.35) poprzez analizę funkcji rozkładu czasów oczekiwania ϕ oraz czynnika strukturalnego przelotów p .

6.1.5 Uogólnione równanie mistrza

Równanie (6.35) pozwala na wprowadzenie tzw. całkowego jądra pamięci (w skrócie po prostu pamięci). Aby to wykazać, prawą stronę tego równania zapiszmy jako $1/[s - \tilde{\mathcal{K}}(k, s)]$ skąd po prostych, algebraicznych przekształceniach otrzymujemy, że

$$\tilde{\mathcal{K}}(k, s) = [\tilde{p}(k) - 1]\tilde{\varphi}(s) \quad (6.36)$$

jest dane także w postaci separowalnej przy czym,

$$\tilde{\varphi}(s) = s \frac{\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)} \quad (6.37)$$

jest, jak wykażemy, poszukiwaną pamięcią. Możemy teraz przepisać równanie (6.35) następująco,

$$s\tilde{\mathcal{P}}(k, s) - \tilde{\mathcal{P}}(k=0, t) = \tilde{\mathcal{K}}(k, s)\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = [\tilde{p}(k) - 1]\tilde{\varphi}(s)\tilde{\mathcal{P}}(k, s), \quad (6.38)$$

co pozwala na przejście do postaci różniczkowo-całkowej; przy wyprowadzaniu (6.38) z (6.35) skorzystaliśmy z warunku początkowego

$$\mathcal{P}(X, t=0) = \delta(X) \equiv \tilde{\mathcal{P}}(k, t=0) \quad (6.39)$$

jaki musi spełniać propagator. Zauważmy, że lewa strona równania (6.38) jest transformatą Laplace’a pochodnej po czasie propagatora $\tilde{\mathcal{P}}(k, t)$ a prawa transformatą Laplace’a konwolucji czasowej wielkości $\tilde{\mathcal{K}}$ oraz $\tilde{\mathcal{P}}$. Zatem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{P}}(k, t) &= \int_0^t dt' \tilde{\mathcal{K}}(k, t-t')\tilde{\mathcal{P}}(k, t') \\ &= \int_0^t dt' [\tilde{p}(k) - 1]\varphi(t-t')\tilde{\mathcal{P}}(k, t'). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Jak widać, funkcja φ pełni rolę pamięci gdyż (w ogólności) pozwala na uzależnienie aktualnego zachowania propagatora od jego zachowania w przeszłości (tzn. dla czasu $t' < t$).

6.1.6 Pierwszy moment

Aby wyjaśnić, wspomniane na wstępie, doświadczenia Sharfe’a, Gill’a i Pfister’a musimy obliczyć pierwszy moment $\langle X(t) \rangle$. W tym celu zauważmy, że

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle = -i\nabla_k \tilde{\mathcal{P}}(k, s) |_{k=0} = -\frac{i}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)} \nabla_k \tilde{\psi}(k, s) |_{k=0}, \quad (6.41)$$

gdzie skorzystaliśmy po drodze ze wzoru (6.34). Dla separowalnej funkcji rozkładu $\tilde{\psi}(k, s)$ powyższy wzór upraszcza się do postaci

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle = -i \nabla_k \tilde{\mathcal{P}}(k, s) |_{k=0} = -\frac{i}{s} \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} \nabla_k \tilde{p}(k) |_{k=0}, \quad (6.42)$$

gdzie teraz zastosowaliśmy wzór (6.35). W dalszej części, wykorzystamy jawną postać $\tilde{p}(k)$ oraz $\tilde{\phi}(s)$ aby przedstawić *explicite* wyrażenie (6.42) i tym samym wyjaśnić pierwszą część wykresu zamieszczonego na rys.2(6).

Przykład. Przypuśćmy, że $p(x)$ dane jest wzorem (6.18); zatem czynnik strukturalny błędzenia przypadkowego przybiera postać

$$\tilde{p}(k) = (p^+ + p^-) \cos(k) + i(p^+ - p^-) \sin(k). \quad (6.43)$$

Stąd i ze wzoru (6.42) otrzymujemy proste wyrażenie,

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle = (p^+ - p^-) \frac{1}{s} \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)}, \quad (6.44)$$

do którego powrócimy w dalszej części, po wyznaczeniu jawnej zależności $\tilde{\phi}$ od zmiennej s .

6.1.7 Rola pierwszego oczekiwania oraz przelotu

Rozważmy teraz sytuację ogólniejszą, w której pierwsze wyczekiwanie i przelot opisane są inną funkcją rozkładu (oznaczymy ją przez $h(x, t)$) niż pozostałe pary tego typu zdarzeń. Przypadek $h = \psi$ omówiony powyżej, dotyczy sytuacji gdy początek procesu zbiega się z początkiem jego obserwacji. Innymi słowy, w momencie pojawienia się cząsteczki w układzie rozpoczyna się zarówno proces jej błędzenia jak też obserwacja tego procesu. Oczywiście w ogólności tak być nie musi, tzn. obserwacja może rozpocząć się (i na ogół rozpoczyna się) znacznie później; tym samym układ posiada już pewną historię, którą należy uwzględnić przy opisie pierwszego oczekiwania. Wprowadza to modyfikacje polegające na tym, że

- 1) we wzorze (6.22), definiującym propagator cząstkowy $P_{\mathcal{E}}^{(0)}(X, t)$, należy zastąpić rozkład $\Psi_{\mathcal{E}}(t)$ przez ogólniejszy $\Xi_{\mathcal{E}}(t)$, zdefiniowany poniżej
- 2) w pozostałych wzorach (6.23), (6.24) i (6.25) definiujących propagatory wyższych rzędów $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t)$ (gdzie $n \geq 1$) należy funkcję rozkładu $\psi_{\mathcal{E}_0}(x_1 - X_0, t_1 - t_0)$ zastąpić ogólniejszą $h_{\mathcal{E}_0}(x_1 - X_0, t_1 - t_0)$;

oczywiście, pomiędzy rozkładami $h(x, t)$ oraz $\Xi(t)$ zachodzi relacja analogiczna do (6.9) czyli relacji pomiędzy $\Psi_{\mathcal{E}}(t)$ oraz $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$

$$\Xi_{\mathcal{E}}(t) = \int_t^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty dx h_{\mathcal{E}}(x, t') = 1 - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^\infty dx h_{\mathcal{E}}(x, t'). \quad (6.45)$$

Możemy teraz przepisać równanie (6.34) w ogólniejszej postaci

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}(k, s) &= \tilde{\Xi}(s) + \tilde{h}(k, s) \frac{\tilde{\Psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(k, s)} \\ &= \frac{1}{s} \left[1 - \tilde{h}(k=0, s) + \tilde{h}(k, s) \frac{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)}{1 - \tilde{\psi}(k, s)} \right].\end{aligned}\quad (6.46)$$

Analogicznie jak w paragrafie 6.1.4, separowalność $h(x, t) (= q(x)\chi(t))$ oraz $\psi(x, t) (= p(x)\phi(t))$ upraszcza wzór (6.46) do postaci

$$\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \frac{1}{s} \left[1 - \tilde{\chi}(s) + \tilde{q}(k)\tilde{\chi}(s) \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{p}(k)\tilde{\phi}(s)} \right]. \quad (6.47)$$

Oczywiście, w przypadku gdy $h(x, t) = \psi(x, t)$ oba powyższe wzory przechodzą w wyprowadzone wcześniej odpowiednio (6.34) i (6.35). Ogólność wzorów (6.46) i (6.47) pozwala na badanie zarówno układów znajdujących się w stanie równowagi jak też z dala od niej.

6.1.8 Niejednorodne uogólnione równanie mistrza

W dalszym ciągu wykazemy, że analogicznie jak to miało miejsce w paragrafie 6.1.5, równanie (6.46) można zapisać w postaci różniczkowo-całkowej. W tym celu, przepisujemy pierwszą równość w (6.46) w następującej pośredniej postaci,

$$\frac{1 - \tilde{\psi}(k, s)}{\tilde{\Psi}(s)} \tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \left\{ \tilde{\Xi}(s) \frac{1 - \tilde{\psi}(k, s)}{\tilde{\Psi}(s)} + \tilde{h}(k, s) \right\} \tilde{P}(k, t=0) \quad (6.48)$$

którą można skrótowo zapisać w dogodniejszej do dalszych przekształceń formie,

$$[s - \tilde{K}(k, s)] \tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \tilde{\mathcal{P}}(k, t=0) + \tilde{\mathcal{I}}(k, s), \quad (6.49)$$

gdzie jądro całkowe pamięci

$$\tilde{\mathcal{K}}(k, s) = s \frac{\tilde{\psi}(k, s) - \tilde{\psi}(k=0, s)}{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)}, \quad (6.50)$$

co jest uogólnieniem wprowadzonego wcześniej dla przypadku separowalnego (porównaj (6.36) i (6.37)) a niejednorodność

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}}(k, s) &= \frac{\tilde{h}(k, s) - \tilde{\psi}(k, s) - \tilde{h}(k=0, s) + \tilde{\psi}(k=0, s)}{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)} \\ &+ \frac{\tilde{h}(k=0, s)\tilde{\psi}(k, s) - \tilde{h}(k, s)\tilde{\psi}(k=0, s)}{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)};\end{aligned}\quad (6.51)$$

jak widać niejednorodność znika jak należy gdy $h(x, t) = \psi(x, t)$. Wreszcie, analogicznie jak poprzednio, równanie to można zapisać w poszukiwanej formie

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}(k, t) = \int_0^t dt' \tilde{\mathcal{K}}(k, t - t') \tilde{\mathcal{P}}(k, t') + \tilde{\mathcal{I}}(k, t). \quad (6.52)$$

Jest to właśnie niejednorodne, uogólnione równanie mistrza. W przypadku separowalnym, gdy ponadto $h(x, t) = \psi(x, t)$ równanie to przechodzi w wyprowadzone wcześniej (6.40).

6.2 Przypadkowe pułapkowanie

Rozważania przeprowadzone w niniejszym rozdziale składają się z dwóch etapów. W pierwszym konstruujemy *ciągłą funkcję rozkładu czasów oczekiwania* jako średnią ważoną, uwzględniającą "krajobraz" energetyczny ośrodka; w drugim analizujemy funkcje pokrewne, ściśle z nią związane np. jej pierwszy moment, który jest *średnim czasem oczekiwania* i pozwala na łatwe odróżnienie procesu Poissona od procesu Lévy'ego

6.2.1 Ciągła funkcja rozkładu czasów oczekiwania

Rozważmy błędzenie skokowe pojedynczej cząsteczki w potencjale przedstawionym na rys.6.4; błędzenie tego typu nosi nazwę *przypadkowego pułapkowania* (ang. *random-trap model*) lub alternatywnie *modelu dolinowego* (ang. *valley model*).

Zakładamy, że *gęstość prawdopodobieństwa pojawienia się doliny o określonej głębokości $\mathcal{E}$ lokalnego minimum potencjału podlega prawu wykładniczego zaniku (czyli jest typu Poissona)*,

$$p(\mathcal{E}) = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\bar{\mathcal{E}}}\right), \quad (6.53)$$

gdzie A jest stałą normalizacyjną, którą można łatwo obliczyć z warunku normalizacyjnego

$$\int_0^\infty p(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 1; \quad (6.54)$$

podstawiając wyrażenie (6.53) do tego warunku i wykonując proste przekształcenia otrzymujemy, że $A = 1/\bar{\mathcal{E}}$. Oczywiście, warunek normalizacyjny (6.54) bierze się stąd, że $p(\mathcal{E})$ jest gęstością prawdopodobieństwa, tego że wybrana na chybił trafił dolina potencjału będzie miała określoną głębokość $\mathcal{E}$; zatem prawdopodobieństwo, że będzie ona miała dowolną głębokość jest pewnością. W tym miejscu uzasadnionym jest pytanie o sens fizyczny stałej $\bar{\mathcal{E}}$. Aby go dostrzec zauważmy, że

$$\bar{\mathcal{E}} = \int_0^\infty \mathcal{E} p(\mathcal{E}) d\mathcal{E}, \quad (6.55)$$

co oznacza, że $\bar{\mathcal{E}}$ jest średnią głębokością doliny potencjału. W powyższych rozważaniach milcząco przyjmowaliśmy, że głębokości dolin są nieograniczone. Powinniśmy uwzględnić fakt, że w rzeczywistości tak nie jest i przyjmować, że głębokość doliny jest zawarta w przedziale $0 < \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_{max}$, gdzie $\mathcal{E}_{max}$ oznacza maksymalną głębokość jaką może mieć dowolnie wybrana dolina potencjału. Nieco bardziej skomplikowane podejście, uwzględniające ten bardziej realny punkt widzenia przedstawiliśmy w Dodatku Jednakże zasadnicze wnioski płynące z obu podejść są identyczne.

Wyrażenie (6.53) na rozkład $p(\mathcal{E})$ jest jednym z dwóch jakie najczęściej stosuje się do statystycznego opisu "krajobrazu" energetycznego układów nieuporządkowanych a w tym amorficznych czy szklistych; innym jest po prostu rozkład Gaussa. Nieporządek widoczny w rozrzucie głębokości dolin potencjału może być wywołany przez rozmieszczenie w sposób losowy różnych atomów (budujących sieć krystaliczną) w węzłach danej sieci czyli jest związany z nieporządkiem składu a nie geometrii sieci (tzn. stała sieci nie ulega zmianie od węzła do węzła). Oba rozkłady opisują statyczne własności krajobrazu energetycznego i związane są z własnościami samych materiałów a nie błędzącej cząsteczki. Rozkład (6.53) jest łatwiejszy w zastosowaniach gdyż jest jednoparametrowy w przeciwieństwie do rozkładu Gaussa (który obok wartości średniej zawiera także dyspersję a ponadto, zawiera kwadrat zmiennej losowej; rolę rozkładu Gaussa omówiliśmy w Dodatku ...). W niniejszym rozdziale zajmujemy się materiałami nieuporządkowanymi scharakteryzowanymi rozkładem wykładniczym (6.53).

W dalszym ciągu przyjmujemy, że *proces błędzenia ma charakter ponadbarierowy* - termicznie aktywowany co oznacza, że prawdopodobieństwo przeskoku cząsteczki na jednostkę czasu z jednej doliny potencjału do drugiej, czyli częstość przeskoków tutaj pomiędzy sąsiednimi dolinami dane jest wzorem

$$\nu^0(\mathcal{E}) = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right) = \gamma_0 \gamma^{\frac{\mathcal{E}}{\Delta}} \quad (6.56)$$

gdzie γ_0 jest częstością drgań (podstawowych) w danej dolinie potencjału, natomiast

$$\gamma = \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right), \quad (6.57)$$

Δ jest tutaj jednostką energii, k_B jak zwykle stałą Boltzmanna, a

$$\mathcal{T} = \begin{cases} T, & \text{dla prawa Hopfa-Arrheniusa (HA)} \\ T - T_g, & \text{przy } T > T_g, \text{ dla prawa Vogela-Tammana-Fulchera (VTF)}, \end{cases}$$

co jak widać, dotyczy dwóch klas materiałów - prawo HA takich, które nie są szklanymi bądź są w stanie dalekim od zeszklenia natomiast prawo VTF materiałów w pobliżu punktu zeszklenia; wielkość T oznacza jak zwykle temperaturę absolutną a T_g temperaturę przejścia do stanu szklistego. Ze wzoru (6.56) wynika, że średni czas oczekiwania (przebywania) cząsteczki w wybranej dolinie potencjału wynosi

$$\tau^0(\mathcal{E}) = \frac{1}{\nu^0(\mathcal{E})}. \quad (6.58)$$

Z powyższego wzoru wynika jak być powinno, że im głębsza jest dolina potencjału tym dłuższy jest czas przebywania w niej cząsteczki.

Trzecim założeniem jest *poissonowski kształt funkcji rozkładu czasów oczekiwania* $\phi_{\mathcal{E}}(t)$, która jest zdefiniowana jako gęstość prawdopodobieństwa, tego że błądząca cząsteczka przetrwa w danej dolinie potencjału o głębokości $\mathcal{E}$ dokładnie przez czas t (tzn. po tym czasie na pewno ją opuści) czyli, że

$$\phi_{\mathcal{E}}(t) = \nu^0(\mathcal{E}) \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t). \quad (6.59)$$

Jak widać w oparciu o (6.56), funkcja $\phi_{\mathcal{E}}(t)$, traktowana jako funkcja zmiennej $\mathcal{E}$, jest tzw. rozciągniętym eksponentem ('stretch exponent').

Naszym celem jest obliczenie następującej średniej ważonej w postaci zamkniętej,

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} p(\mathcal{E}) \phi_{\mathcal{E}}(t) d\mathcal{E}, \quad (6.60)$$

która jest, oczywiście, średnią funkcją rozkładu czasów oczekiwania spełniającą, jak widać, warunek normalizacyjny

$$\int_0^{\infty} dt \phi(t) = 1, \quad (6.61)$$

i odgrywającą zasadniczą rolę w modelu błędzeń w czasie ciągłym (patrz rozdz.6.1) w układach amorficznych lub nieuporządkowanych a także np. w procesie starzenia się szkła (Cécile Mounthus, Jean-Philippe Bouchaud, "Models of traps and glass phenomenology", J.Phys. A: Math. Gen. **29** (1966) 3847-3869). Powyższa funkcja rozkładu oznacza średnią gęstość prawdopodobieństwa, że błądząca cząsteczka przetrwa w jakiegokolwiek dolinie dokładnie przez czas t . Średniowanie po głębokościach dolin (czyli po zmiennej $\mathcal{E}$) można zrealizować przynajmniej w dwóch różnych podejściach. Pierwsze polega na rozpatrywaniu zachowania się wielu niezależnych cząsteczek w próbce (co odpowiada rozrzedzonemu gazowi sieciowemu) a następnie średniowaniu po zespole złożonym z tych cząsteczek. Podejście to jest bliższe do świadczalnej realizacji niż podejście drugie. Drugie podejście polega na (myślowym) utworzeniu ogromnej liczby replik stochastycznych, czyli układów podobnych do wyjściowego ale nie identycznych z nim, składających się z pojedynczej błądzącej cząsteczki oraz krajobrazu energetycznego stanowiącego jej środowisko a wylosowanego z zadanego rozkładu $p(\mathcal{E})$. Średniowanie po $\mathcal{E}$ w wyrażeniu (6.60) można teraz po prostu wykonać po tak zbudowanym zespole statystycznym.

Podstawmy zatem wyrażenie (6.53) oraz (6.59) do (6.60) wykorzystując (6.56),

$$\phi(t) = \frac{1}{\bar{\mathcal{E}}} \int_0^{\infty} d\mathcal{E} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\bar{\mathcal{E}}}\right) \gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) \exp\left(-\gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) t\right). \quad (6.62)$$

Powyższą całkę można obliczyć na trzy istotnie różne sposoby.

Pierwszy sposób (obliczenia wprost) polega na przeprowadzeniu pomocniczej zamiany zmiennych

$$\begin{aligned} y &= \gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) t, \\ dy &= -\frac{d\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}} y, \end{aligned} \quad (6.63)$$

która w połączeniu z równaniem (6.62) prowadzi do następującego ciągu przekształceń

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -\frac{k_B \mathcal{T}}{\bar{\mathcal{E}}} \frac{1}{t} \int_{\gamma_0 t}^0 dy \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\bar{\mathcal{E}}}\right) \exp(-y) \\ &= \frac{\gamma_0 \alpha}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}} \int_0^{\gamma_0 t} dy \left(\gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) t\right)^\alpha \exp(-y) \\ &= \frac{\gamma_0 \alpha}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}} \int_0^{\gamma_0 t} dy y^\alpha \exp(-y) = \frac{\gamma_0 \alpha}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}} \gamma(1+\alpha, \gamma_0 t), \end{aligned} \quad (6.64)$$

gdzie wykładnik $\alpha = k_B \mathcal{T} / \bar{\mathcal{E}} > 0$, natomiast $\gamma(1+\alpha, \gamma_0 t)$ jest niekompletną funkcją gamma (tutaj zależną od argumentu $\gamma_0 t$), która posiada następującą decydującą dla niniejszego wyprowadzenia własność

$$\gamma(1+\alpha, \gamma_0 t \rightarrow \infty) = \Gamma_{Euler}(1+\alpha). \quad (6.65)$$

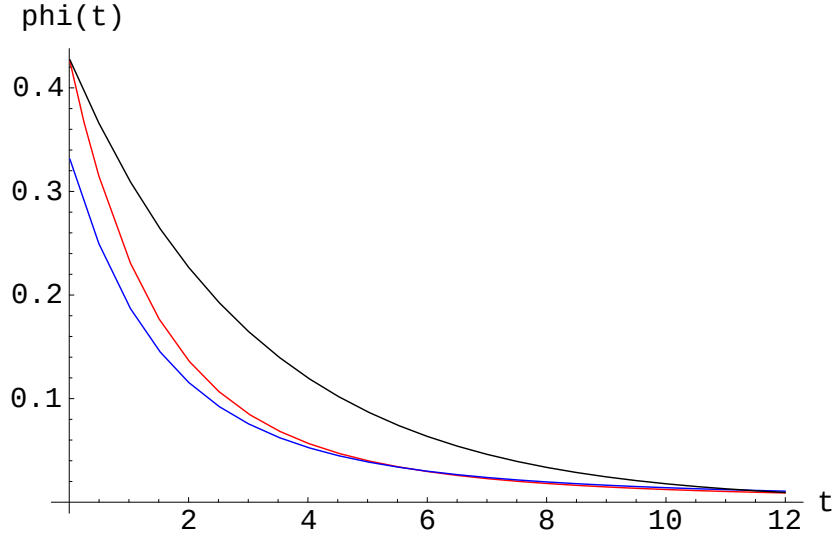
Innymi słowy, w przypadku gdy $\gamma_0 t \gg \max(\alpha, 1)$ otrzymujemy asymptotyczną postać rozkładu $\phi(t)$

$$\phi(t) \approx \gamma_0 \frac{\alpha \Gamma_{Euler}(1+\alpha)}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}}, \quad (6.66)$$

która jest kluczową dla naszych dalszych rozważań. Należy podkreślić, że dopiero uwzględnienie wszystkich trzech elementów (6.53), (6.56) oraz (6.59) daje potęgowe w czasie zanik funkcji rozkładu (6.66). Jak widać, to potęgowe zanikanie w czasie funkcji rozkładu zachodzi dla dowolnego $\alpha \geq 0$ ale, jak zobaczymy, *fascynującym jest jedynie przypadek* $\alpha < 1$.

Drugi sposób przedstawiony w Dodatku E, polega na wyrażeniu funkcji wykładniczej zmiennej t za pomocą transformaty Mellina (patrz, Harry Bateman, Arthur Erdélyi, "Tables of Integral Transforms", Vol.I, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1954) a następnie zastosowaniu metody obliczania całek konturowych w płaszczyźnie zespolonej przez residua (patrz, Krzysztof Maurin, "Analiza. Cz.II. Wstęp do analizy globalnej", PWN, Warszawa 1971). Podejście tego typu zostało także wykorzystane w trzecim sposobie traktującym odwrotną transformatę Laplace'a funkcji rozkładu czasów oczekiwania; omówiliśmy go w rozdz. 6.2.3.

Rozważmy teraz zachowanie funkcji rozkładu $\phi(t)$ dla krótkich czasów tzn. dla przypadku gdy $\gamma_0 t \ll 1$. Rozwijając w szereg funkcję eksponens w funkcji podcałkowej wyrażenia (6.64), następnie wykonując całkowanie wyraz po wyrazie i ograniczając się do wyrazów kwadratowych w $\gamma_0 t$, otrzymujemy $\phi(t)$ w postaci wykładniczej



Rysunek 6.6: Potęgowa zależność rozkładu prawdopodobieństwa czasów oczekiwania ϕ od czasu t dana wzorem (6.66) dla wykładników $\alpha = 0.75$ (linia czerwona) i $\alpha = 0.50$ (linia niebieska) oraz $\gamma_0 = 1$. Zauważmy, że dla $t = 0$ rozkład $\phi(t = 0) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ czyli dla $\alpha = 0.75$ wynosi około 0.43 natomiast dla $\alpha = 0.50$ około 0.33. Dla porównania przedstawiono wykładniczą zależność ϕ od czasu t daną wyrażeniem (6.67) (czarna linia) dla $\alpha = 0.75$.

(patrz Dodatek D),

$$\phi(t) \approx \gamma_0 \frac{\alpha}{1+\alpha} \exp\left(-\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \gamma_0 t\right); \quad (6.67)$$

wynika stąd natychmiast, że $\phi(t = 0) = \gamma_0 \frac{\alpha}{1+\alpha}$.

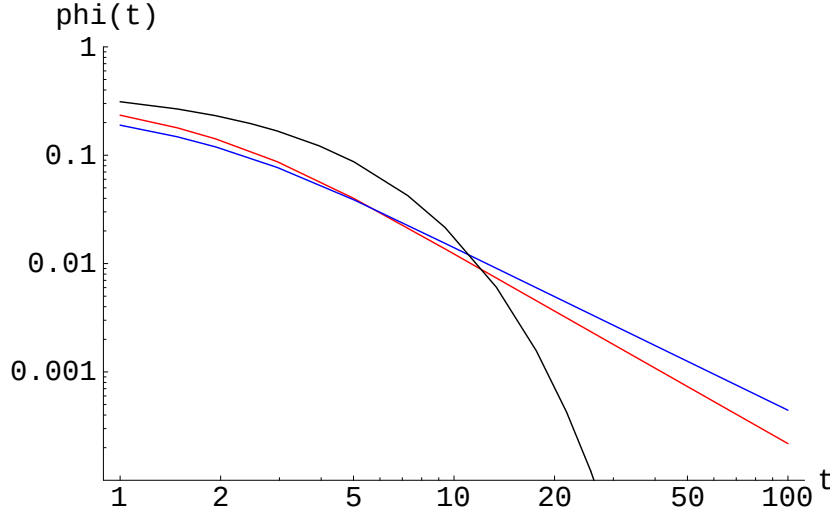
6.2.2 Wielkości pokrewne

Niezwyczajnie użyteczną w naszych dalszych rozważaniach jest transformata Laplace'a

$$\tilde{\phi}(s) (\stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{L}_s(\phi(t))) = \int_0^\infty dt \exp(-ts) \phi(t), \quad (6.68)$$

którą rozważamy dla $s \rightarrow 0$ co, zgodnie z twierdzeniem Tauberina (patrz Dodatek J), odpowiada właśnie sytuacji asymptotycznie długich czasów. Obliczenia przeprowadzone w Dodatku G dały, w przypadku gdy $\alpha < 1$, nieholomorficzną zależność od s w otoczeniu $s = 0$ zarówno dla

$$\tilde{\phi}(s) \approx 1 - \frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^\alpha, \quad (6.69)$$



Rysunek 6.7: Potęgowa zależność rozkładu prawdopodobieństwa czasów oczekiwania ϕ od czasu t dana wzorem (6.66) a przedstawiona w skali $\log - \log$ dla przypadków przedstawionych na rys.6.6 tzn. dla wykładników $\alpha = 0.75$ (linia czerwona) i $\alpha = 0.50$ (linia niebieska) oraz $\gamma_0 = 1$. Dla porównania przedstawiono wykładniczą zależność ϕ od czasu t daną wyrażeniem (6.67) (czarna linia) dla $\alpha = 0.75$.

jak też dla

$$\tilde{\Phi}(s) \approx \frac{1}{\gamma_0 \gamma'_f} \left(\frac{\gamma_0}{s} \right)^{1-\alpha}. \quad (6.70)$$

Jak wykazaliśmy wcześniej, obie funkcje odgrywają zasadniczą rolę w modelu błędów w czasie ciągłym. Zauważmy, że z (6.70) otrzymujemy natychmiast asymptotyczną zależność czasową postaci

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\gamma'_f} \frac{1}{(\gamma_0 t)^\alpha}, \quad (6.71)$$

co stanowi najkrótszą drogę uzyskania asymptotyki funkcji $\Phi(t)$. Uogólnienie wyrażenia (6.69), obejmujące zarówno postać normalną jak i anomalną wyprowadzimy poniżej.

6.2.3 Równanie skalowania

Równanie skalowania danej funkcji powstaje w wyniku:

- 1) operacji liniowego przeskalowania zmiennej niezależnej,
- 2) liniowej odpowiedzi samej funkcji na to przeskalowanie.

Zauważmy, że transformata Laplace'a $\tilde{\phi}(s)$ spełnia niejednorodne równanie skalowania

$$\tilde{\phi}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}(s) - M \ln(M) \int_0^1 d\xi \frac{1}{M^\xi} \frac{1}{1 + \frac{s}{\gamma_0 \gamma^\xi}}, \quad (6.72)$$

gdzie $M = \exp(\Delta/\bar{\mathcal{E}})$ a γ jest dana wzorem (6.57). W dalszym ciągu zakładamy, że $\Delta/\bar{\mathcal{E}} \ll 1$ i analogicznie $\Delta/k_B\mathcal{T} \ll 1$ co pozwoli nam wykazać, że, niejednorodność całkowita sprowadza się do algebraicznej i nie zależy od γ tzn. od czynnika skalowania zmiennej niezależnej s . Rozważamy tylko przypadek asymptotyczny w czasie co odpowiada (na mocy twierdzenia Tauberina) $s \rightarrow 0$. Stąd, niejednorodność przybiera przybliżoną, prostszą postać

$$\begin{aligned} M \ln(M) \int_0^1 d\xi \frac{1}{M^\xi} \frac{1}{1 + \frac{s}{\gamma_0 \gamma^\xi}} &\approx M \ln(M) \int_0^1 d\xi \frac{1}{M^\xi} \left(1 - \frac{s}{\gamma_0 \gamma^\xi}\right) \\ &= M - 1 - \frac{s}{\gamma_0} \frac{\ln(M)}{\ln(M\gamma)} M \left(1 - \frac{1}{M\gamma}\right) \\ &\approx (M - 1) \left(1 - \frac{s}{\gamma_0}\right), \end{aligned} \quad (6.73)$$

gdyż w tym przypadku $s/\gamma_0\gamma \ll 1$. Dzięki (6.73) niejednorodne równanie skalowania (6.72) można przepisać w postaci

$$\tilde{\phi}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}(s) - (M - 1) \left(1 - \frac{s}{\gamma_0}\right), \quad (6.74)$$

która jest znacznie łatwiejsza do rozwiązania

Rozwiązanie równania (6.74) poszukujemy w postaci sumy

$$\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}_{reg}(s) + \tilde{\phi}_{sing}(s), \quad (6.75)$$

gdzie $\tilde{\phi}_{reg}(s)$ jest rozwiązaniem ogólnym, regularnym równania niejednorodnego (6.72) natomiast $\tilde{\phi}_{sing}(s)$ jest rozwiązaniem szczególnym, singularnym równania jednorodnego

$$\tilde{\phi}_{sing}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}_{sing}(s). \quad (6.76)$$

Postać rozwiązania ogólnego jest narzucona przez niejednorodność równania (6.72). Ponieważ niejednorodność tą traktujemy w sposób przybliżony (patrz (6.73) zatem, z dokładnością do wyrazów kwadratowych w zmiennej s ,

$$\tilde{\phi}_{reg}(s) \approx 1 - \frac{1}{\gamma'} \frac{s}{\gamma_0} \quad (6.77)$$

gdzie współczynnik

$$\gamma' = \frac{1 - \frac{1}{M\gamma}}{1 - \frac{1}{M}}. \quad (6.78)$$

Można sprawdzić (przez podstawienie do równania (6.75)), że rozwiązanie singularne jest postaci

$$\tilde{\phi}_{sing}(s) \approx -\frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha, \quad (6.79)$$

gdzie wykładnik $\alpha = -\ln(M)/\ln(\gamma) (= k_B \mathcal{T}/\bar{\mathcal{E}})$, natomiast γ'_f jest tutaj nieznanym współczynnikiem; systematyczną metodę znalezienia rozwiązania singularnego, a zatem i tego współczynnika² podaliśmy w Dodatku A2. Jest on postaci

$$\gamma'_f = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}. \quad (6.80)$$

Ostatecznie, rozwiązanie równania (6.72) dla $s \rightarrow 0$ przybiera następującą, przybliżoną postać,

$$\tilde{\phi}(s) \approx 1 - \frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha - \frac{1}{\gamma'_f} \frac{s}{\gamma_0}, \quad (6.81)$$

która jest poszukiwanym uogólnieniem wyrażenia (6.69). Gdyby uwzględnić wszystkie wyrazy rozwinięcia Taylora funkcji podcałkowej w niejednorodności równania skalowania (6.72) (dla $|s| < \gamma_0\gamma$), wówczas rozwiązanie regularne $\tilde{\phi}_{reg}(s)$ byłoby szeregiem potęgowym zmiennej s . Oznacza to, że ścisłe rozwiązanie $\phi(s)$ można by zapisać (symbolicznie) w postaci,

$$\tilde{\phi}(s) = 1 - \frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha - \frac{1}{\gamma'_f} \frac{s}{\gamma_0} + \Theta(s^2), \quad (6.82)$$

gdzie $\Theta(s^2)$ jest resztą (szeregiem potęgowym) rzędu nie mniejszego niż s^2 . Rozwiązanie (6.82) a tym samym (6.81) wymaga omówienia.

6.2.4 Rozkład Lévy'ego a rozkład Poissona

Rozważmy dwa zasadnicze przypadki, które przedstawimy w następujący sposób

$$\tilde{\phi}(s) \approx \begin{cases} 1 - \frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha} \approx \\ \exp \left(-\frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha \right), & \text{dla sytuacji singularnej, czyli } \alpha < 1; \\ 1 - \frac{1}{\gamma'_f} \frac{s}{\gamma_0} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma'_f} \frac{s}{\gamma_0}} \approx \exp \left(-\frac{1}{\gamma'_f} \frac{s}{\gamma_0} \right), & \text{dla sytuacji regularnej, czyli } \alpha > 1. \end{cases} \quad (6.83)$$

²Dokładniej rzecz biorąc, nie jest to stały współczynnik a cykliczna funkcja $\ln(s)$ o okresie równym $-\ln(\gamma)$ - podany tutaj współczynnik jest jedynie zerowym przybliżeniem wyrażenia zależnego od zmiennej $\ln(s)$, o czym jest mowa w Dodatku A2.

Jak widać, uzyskane rozwiązanie singularne jest identyczne z otrzymanym wcześniej (patrz rozdz.6.2.2, wyrażenie (6.69)). Tym samym, asymptotyczna zależność czasowa funkcji rozkładu jest dana wzorem (6.66) z rozdz.6.2.1. W dalszym ciągu, asymptotyczne w czasie rozwiązanie regularne uzyskuje się poprzez bezpośrednie odwrócenie transformaty Laplace'a w wyrażeniu (6.83) dla przypadku $\alpha > 1$ (patrz I.M. Ryżyk i I.S. Gradsztajn, "Tablice, sum, szeregów i iloczynów", PWN, Warszawa 1964); prowadzi to do rozkładu Poissona

$$\phi(t) \approx \gamma_0 \gamma \exp(-\gamma_0 \gamma t). \quad (6.84)$$

Uzyskaliśmy tym samym dwa różne typy rozkładów. Możemy powiedzieć, że w przypadku pierwszego z nich zjawiska najistotniejsze opisuje długoczasowy ogon funkcji rozkładu. Natomiast w drugim przypadku korpus funkcji rozkładu a wartość parametru $\alpha = 1$ stanowi próg oddzielający te dwa zasadniczo różne światy.

Uzyskany wynik pozwala wyrazić w tych dwóch przypadkach pierwszy moment w jawnej postaci; najpierw jego transformatę Laplace'a

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle \approx \begin{cases} (p^+ - p^-) \frac{\gamma'_f}{\gamma_0} \frac{1}{\left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^{1+\alpha}}, & \text{dla sytuacji singularnej, czyli } \alpha < 1; \\ (p^+ - p^-) \frac{\gamma'_f}{\gamma_0} \frac{1}{\left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^2}, & \text{dla sytuacji regularnej, czyli } \alpha > 1. \end{cases} \quad (6.85)$$

a stąd, w zależności od czasu

$$\langle X(t) \rangle \approx \begin{cases} (p^+ - p^-) \gamma'_f (\gamma_0 t)^\alpha, & \text{dla sytuacji singularnej czyli } \alpha < 1; \\ (p^+ - p^-) \gamma'_f \gamma_0 t, & \text{dla sytuacji regularnej czyli } \alpha > 1. \end{cases} \quad (6.86)$$

Wreszcie z (6.86) można wyznaczyć prędkość unoszenia

$$\frac{d}{dt} \langle X(t) \rangle = \langle V(t) \rangle \approx \begin{cases} (p^+ - p^-) \frac{\gamma'_f \gamma_0}{(\gamma_0 t)^{(1-\alpha)}}, & \text{dla } \alpha < 1; \\ (p^+ - p^-) \gamma'_f \gamma_0, & \text{dla } \alpha > 1. \end{cases} \quad (6.87)$$

Tym samym, wyjaśniona została pierwsza część potęgowego zaniku fotoprądu od czasu; pozostała jeszcze do wyjaśnienia zależność w której istotną rolę odgrywa absorbujący wpływ katody.

6.2.5 Średni czas oczekiwania

Poszukujemy odpowiedzi na zasadnicze pytanie: *jaki jest średni czas oczekiwania (życia),*

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t \phi(t) dt, \quad (6.88)$$

błądzącej cząsteczki w jakiejkolwiek dolinie (minimum) potencjału? Rozważmy kluczowy dla naszych rozważań przypadek $\alpha < 1$. Łatwo dostrzec, podstawiając (6.66) do (6.88) (oraz korzystając z faktu, że funkcja $\phi(t)$ jest ograniczona), że $\langle t \rangle = \infty$. Podobnie można sprawdzić, że także dowolny moment $\langle t^m \rangle = \infty$, $m = 2, 3, \dots$. Oznacza to, że średni czas oczekiwania (życia) cząsteczki w dowolnej dolinie (minimum) potencjału oraz jego dyspersja (rozrzut statystyczny) są nieskończone.

Rodzi to szereg pytań - jednym z najważniejszych jest *w jaki sposób powyższy wynik teoretyczny może przejawiać się w realnym doświadczeniu?* Aby odpowiedzieć na to pytanie rozważmy dowolnie wybrany przedział czasu Δt w którym będziemy obserwować błędzenie cząsteczki. Przypuśćmy, że w tym przedziale czasu cząsteczka $n (\gg 1)$ razy zmieniała swoje miejsce pobytu co pozwoliło nam dokonać n -krotnego pomiaru jej czasu życia t_j , $j = 1, 2, \dots$, w kolejno odwiedzanych dolinach potencjału. Na tej podstawie możemy wyznaczyć średni czas oczekiwania cząsteczki jako $\langle t(\Delta t) \rangle = 1/n \sum_{j=1}^n t_j$. Oczywiście, wielkość ta zależy od długości przedziału Δt w którym prowadzono obserwacje. Zależność ta może być dwojakiego rodzaju. Jeżeli wykładnik $\alpha \geq 1$ wówczas *średni czas oczekiwania jest skończony* i, zgodnie z prawem wielkich liczb Bernoulliego, w miarę wzrostu długości przedziału czasu Δt powyższa średnia $\langle t(\Delta t) \rangle$ dąży do osiągnięcia skończonego plateau czyli ulega stabilizacji. Jeżeli $\alpha < 1$ wówczas *średni czas oczekiwania jest nieskończony* i wzrost długości czasu obserwacji nie prowadzi do stabilizowania się uzyskiwanych wyników a wprost przeciwnie, dłuższy przedział obserwacji Δt oznacza większą szansę pojawienia się rzadkiego zdarzenia w postaci bardzo długiego czasu oczekiwania w jakimś lokalnym minimum potencjału co może prowadzić do drastycznego wzrostu średniej $\langle t(\Delta t) \rangle$; tego typu zależność przedstawiono na rys.... i omówiono w rozdz..... (przy okazji omówiono tam także o przypadek marginalny gdy $\alpha = 1$ wymagający osobnego traktowania). Innymi słowy, nieskończony średni czas oczekiwania przejawia się w postaci rosnącej nieograniczenie wartości $\langle t(\Delta t) \rangle$ ze wzrostem Δt . Ponadto, w przypadku $\alpha < 1$ rodzi się *kluczowe pytanie dotyczące istnienia i osiągania przez układ stanu równowagi*; ten niezwykle istotny problem dyskutujemy w dalszej części.

6.2.6 Oczekiwanie Weierstrassa–Mandelbrota

Dalsze rozważania, dotyczące fraktalizacji czasów oczekiwania, łatwiej przeprowadzić korzystając z funkcji Weierstrassa-Mandelbrota, czyli z dyskretnej reprezentacji funkcji rozkładu czasów oczekiwania.

6.2.7 Dyskretna funkcja rozkładu czasów oczekiwania

Wprowadźmy w tym celu następującą wyjściową definicję, która daje poszukiwaną funkcję rozkładu w postaci nieskończonej superpozycji funkcji Poissona

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \gamma_j \exp(-\gamma_j t), \quad (6.89)$$

przy czym

$$\tau_j = \frac{1}{\gamma_j} \quad (6.90)$$

jest średnim czasem przebywania czasteczki w dolinie potencjału o numerze j (oczywiście danej głębokości odpowiada jeden i tylko jeden wskaźnik j niezależnie od tego w którym miejscu taka dolina się znajduje), natomiast wagi v_j spełniają warunek normalizacyjny

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j = 1. \quad (6.91)$$

Jak widać, wprowadzenie reprezentacji dyskretnej jest związane z ponumerowaniem dolin potencjału w kolejności od najpłytszej do najgłębszej. Jednak, jak to już wskazaliśmy w poprzednim paragrafie, głębokość minimów potencjałów jest ograniczona zatem sumowanie w (6.89) powinno być skończone, co niestety komplikuje rozważania matematyczne (patrz Dodatek B) chociaż zasadnicze wnioski płynące z obu podejść są identyczne.

Z (6.91) wynika bezpośrednio warunek normalizacyjny dla funkcji rozkładu postaci

$$\int_0^{\infty} \phi(t) dt = 1. \quad (6.92)$$

Aby łatwiej uchwycić sens fizyczny superpozycji (6.89) zauważmy, że ma miejsce odpowiedniość pomiędzy reprezentacją ciągłą (6.62) i dyskretną (6.89), która została przedstawiona w Tabeli 1 (gdzie wprowadziliśmy *explicite* jednostkę energii oznaczoną przez Δ).

W dalszym ciągu, pod wpływem reprezentacji (6.62) dopuszczamy wariant najprostszy, w którym stosunek wag w kolejnych rzędach $j = 0, 1, 2, \dots$, jest funkcją malejącą i niezależną od rzędu, czyli

$$\frac{v_{j+1}}{v_j} = \frac{1}{M} < 1; \quad (6.93)$$

oznacza to, że parametr M pełni rolę współczynnika podobieństwa stochastycznego (tutaj współczynnika stochastycznego osłabienia) czasowej struktury stochastycznej. Z (6.91) oraz (6.93) wynika bezpośrednio, że

$$v_j = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \frac{1}{M^j}. \quad (6.94)$$

Tabela 6.1: Relacje pomiędzy reprezentacjami

Reprezentacja ciągła	Reprezentacja dyskretna
$\int_0^\infty d\mathcal{E}/\Delta$	$\sum_{j=0}^\infty$
$\mathcal{E}/\Delta$	j
$\exp(\Delta/\mathcal{E})$	M
$\Delta/\mathcal{E}$	$1 - \frac{1}{M}$
$\exp(-\Delta/k_B T)$	γ
$\gamma_0(\exp(-\Delta/k_B T))^{\mathcal{E}/\Delta}$	$\gamma_0 \gamma^j$

Ponadto, zgodnie z duchem zależności (6.93), przyjmujemy, że stosunek

$$\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j} = \gamma < 1, \quad (6.95)$$

jest niezależny od rzędu (pokolenia) j ; bezwymiarowy współczynnik γ pełni rolę współczynnika podobieństwa czasowego natomiast, γ_0 jest częstością charakteryzującą proces na poziomie wyjściowego, zerowego pokolenia. Z (6.95) wynika natychmiast, że

$$\gamma_j = \gamma_0 \gamma^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.96)$$

oraz na mocy (6.90)

$$\tau_0 \tau^j = \frac{1}{\gamma_0 \gamma^j}. \quad (6.97)$$

Podstawiając wyrażenie (6.94) oraz (6.96) do definicji (6.89) otrzymujemy następującą, przygotowaną do dalszej analizy, postać funkcji rozkładu czasów oczekiwania,

$$\phi(t) = \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{M}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j} \gamma^j \exp(-\gamma_0 \gamma^j t). \quad (6.98)$$

Zauważmy, iż warunek (6.93) oraz (6.95) gwarantują, że dla każdej chwili t funkcja $\phi(t)$ ma wartość skończoną dzięki temu, że

$$\frac{\gamma}{M} < 1. \quad (6.99)$$

Nieskończony ciąg stałych czasowych (6.97) charakteryzujący we wszystkich rzędach (pokoleniach) omawiany proces stochastyczny rodzi pytanie o istnienie *efektywnej (wypadkowej) jednostki czasowej* - zagadnienie to analizujemy poniżej. Tutaj zauważmy jedynie, że regularność procesu stochastycznego na każdym poziomie j z osobna nie oznacza jeszcze, że sumaryczny proces ma charakter regularny czyli, że jest scharakteryzowany jednym, skończonym średnim czasem oczekiwania cząsteczki.

6.2.8 Czasowe równanie skalowania

Wprowadźmy transformatę Laplace'a funkcji rozkładu czasów oczekiwania

$$\tilde{\phi}(s) = \int_0^\infty dt \exp(-ts) \phi(t) = (1 - \frac{1}{M}) \gamma_0 \sum_{j=0}^\infty \left(\frac{\gamma}{M}\right)^j \frac{1}{s + \gamma_0 \gamma^j}, \quad (6.100)$$

dzięki temu łatwo zauważyć, że spełnione jest następujące równanie skalowania

$$\tilde{\phi}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}(s) - (M-1)\frac{\gamma_0}{s + \gamma_0}. \quad (6.101)$$

Rozwiązanie tego równania można poszukiwać w postaci sumy

$$\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}_{reg}(s) + \tilde{\phi}_{sing}(s), \quad (6.102)$$

gdzie $\tilde{\phi}_{reg}(s)$ jest rozwiązaniem ogólnym, regularnym równania niejednorodnego (6.101) natomiast $\tilde{\phi}_{sing}(s)$ jest rozwiązaniem szczególnym, singularnym równania jednorodnego

$$\tilde{\phi}_{sing}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}_{sing}(s). \quad (6.103)$$

Postać rozwiązania ogólnego jest narzucona przez niejednorodność równania (6.101). Rozwijając ją w szereg Taylora otrzymujemy naprzemienny szereg potęgowy w zmiennej s , pozwalający na wyznaczenie współczynników szeregu potęgowego (także w zmiennej s) jakim jest rozwiązanie regularne. Z dokładnością do wyrazów liniowych możemy napisać, z dobrym przybliżeniem dla $|s| \ll \gamma_0$,

$$\tilde{\phi}_{reg}(s) \approx 1 - \frac{s}{\gamma'}, \quad (6.104)$$

gdzie uogólnione prawdopodobieństwo przeskoku na jednostkę czasu

$$\gamma' = \gamma_0 \frac{1 - \frac{1}{M\gamma}}{1 - \frac{1}{M}}. \quad (6.105)$$

Zauważmy, że $\gamma' > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $M\gamma > 1$ co odpowiada sytuacji, dla której istnieje wartość oczekiwana

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t \phi(t) dt = (1 - \frac{1}{M}) \frac{1}{\gamma_0} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(M\gamma)^j} = \frac{1}{\gamma'}. \quad (6.106)$$

Sytuację przeciwną, gdy $M\gamma < 1$, omawiamy poniżej.

Można łatwo sprawdzić, korzystając z równania jednorodnego (6.103), że poszukiwany kształt rozwiązania sigularnego jest następujący

$$\tilde{\phi}_{sing}(s) \approx -\frac{s^\eta}{\gamma'_f}, \quad (6.107)$$

gdzie wykładnik

$$\eta = -\frac{\ln(M)}{\ln(\gamma)} = \alpha; \quad (6.108)$$

wyznaczenie współczynnika proporcjonalności, czyli fraktalnego elementu przejścia na jednostkę czasu, γ'_f w równaniu (6.107) wymaga subtelniejszego podejścia stosującego transformatę Mellina oraz metodę residuów do obliczania całek (w płaszczyźnie zespolonej).

Wreszcie, korzystając z (6.102), (6.104) oraz (6.107) otrzymujemy dla $s \rightarrow 0$,

$$\tilde{\phi}(s) \approx 1 - \frac{s^\eta}{\gamma'_f} - \frac{s}{\gamma'} \approx \frac{1}{1 + \frac{s^\eta}{\gamma'_f} + \frac{s}{\gamma'}}. \quad (6.109)$$

Uproszczenie powyższego wzoru zależy od wartości wykładnika α mianowicie,

$$\tilde{\phi}(s) \approx \begin{cases} 1 - \frac{s}{\gamma'} \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{\gamma'}}, & \text{dla sytuacji regularnej czyli } \alpha > 1 \\ 1 - \frac{s^\alpha}{\gamma'_f} \approx \frac{1}{1 + \frac{s^\alpha}{\gamma'_f}}, & \text{dla sytuacji anomalnej czyli } \alpha < 1; \end{cases}$$

przypadek marginalny gdy $\alpha = 1$ wymaga innego, bardziej zaawansowanego podejścia (wykorzystującego transformatę Mellina oraz całkowanie przez residua) i zostało omówione w dalszej części.

Jak widać, dla sytuacji regularnej ($\alpha > 1$) $\tilde{\phi}(s) \approx \tilde{\phi}_{reg}(s)$ tzn. dla małych s dominuje rozwiązanie regularne w przeciwieństwie do sytuacji anomalnej (wymagającej omówienia). Rozwiązanie regularne oznacza, że po dokonaniu odwrotnej transformaty Laplace'a funkcja rozkładu

$$\phi(t) \approx \gamma' \exp(-\gamma' t) \quad (6.110)$$

jest dana, dla asymptotycznie długich czasów t , funkcją Poissona (patrz pierwsza część Dodatku C).

W sytuacji anomalnej ($\alpha < 1$), po dokonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a funkcja rozkładu dla asymptotycznie długich czasów zanika potęgowo (patrz wyprowadzenie w drugiej części Dodatku C) tzn.,

$$\phi(t) \approx \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{1}{\gamma'_f} \frac{1}{t^{1+\alpha}}. \quad (6.111)$$

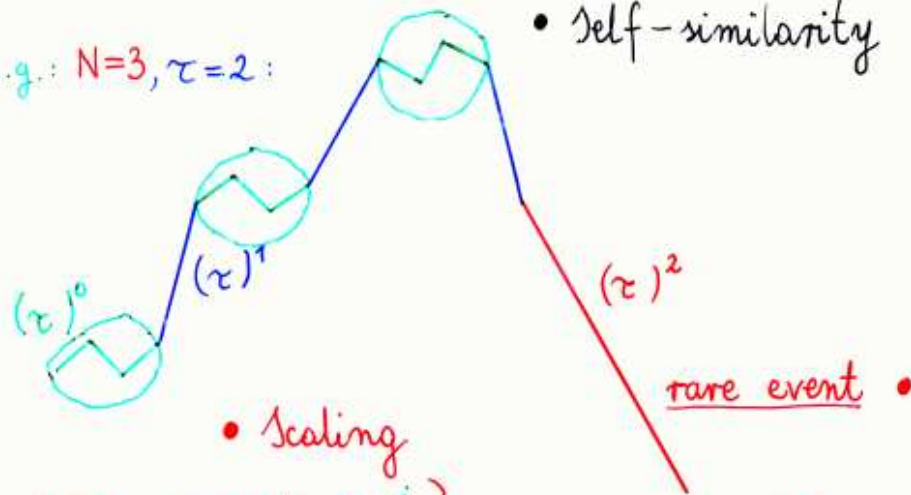
Łatwo sprawdzić (w oparciu o (6.111) oraz o fakt, że $\phi(t)$ jest ograniczone), że w tym przypadku wartość oczekiwana $\langle t \rangle = \infty$. Jak widać, rozkład dany wzorem (6.110) oraz (6.111) różni się zasadniczo - naszym celem jest omówienie tego ostatniego.

• Hierarchical WTD $\phi(t)$

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{S''(j)}_{\left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{N^j}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau_0 \cdot (\tau)^j} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_0 \cdot (\tau)^j}}}_{\phi_j(t)}$$

$$\frac{S''(j+1)}{S''(j)} = \frac{1}{N}$$

e.g.: $N=3, \tau=2$:



$$\left. \begin{array}{l} \text{basic "mass": } N^j \\ \text{product: } (\tau)^j \end{array} \right\} \Rightarrow N^j = ((\tau)^j)^\alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{self-similarity (fractal)} \\ \text{dimension} \end{array} \right\} \alpha = \frac{\ln N}{\ln \tau}$$

Rysunek 6.8: Schematycznie przedstawiona uporządkowana hierarchia średnich czasów wyczekiwania opisana zdyskretyzowaną funkcją rozkładu $\phi(t)$ przykładowo dla $N = 3$ i $\tau = 2$. Ponadto, przedstawiono własności samopodobieństwa i skalowania oraz zdefiniowano pojęcie rzadkiego zdarzenia.

6.2.9 Gra petersburska - przypomnienie

Istnienie zmiennych losowych nie posiadających skończonych wartości oczekiwanych zostało po raz pierwszy zauważone przez Daniela Bernoulli'ego w zaproponowanej przez niego tzw. grze petersburskiej (przejrzyste omówienie tej gry można znaleźć w książce Williama Fellera, "Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa", wyd.II zmienione, rozdz.X4, PWN, Warszawa 1966). Gra ta jest związana z rzucaniem żetonem przy czym szansa, że w wyniku pojedynczego rzutu wypadnie awers wynosi $1/M$ natomiast rewers $1 - 1/M$, gdzie $M > 1$. Należy zaznaczyć, że w oryginalnej grze petersburskiej żeton jest symetryczny czyli $M = 2$. Zasada gry polega na tym, iż gracz może rzucać żetonem do pierwszego pojawienia się rewersu; o ile $j (= 0, 1, 2, \dots)$ razy pod rząd wypadł awers grający wygrywa kwotę równą f_j . Należy, oczywiście przyjąć, że wygranie większej kwoty powinno być mniej prawdopodobne zatem, stawka f_j powinna rosnąć z j a poza tym może być dowolna; zauważmy, że przypadek $f_j = M^j$, jaki ma miejsce w oryginalnej grze petersburskiej, prowadzi do sytuacji, w której wartość oczekiwana wygranej dana nieskończoną sumą $(1 - \frac{1}{M}) + (1 - \frac{1}{M})\frac{M}{M} + (1 - \frac{1}{M})\frac{M^2}{M^2} + \dots + (1 - \frac{1}{M})\frac{M^j}{M^j} + \dots$ jest nieograniczona, co uniemożliwia zastosowanie prawa wielkich liczb. W naszym przypadku stawka wynosi $f_j = 1/(\gamma_0 \gamma^j)$ co prowadzi do wyrażenia (6.106) na wartość oczekiwaną wygranej, która jedynie dla $M\gamma < 1$ przyjmuje wartość nieskończoną. Jest to wynik przełomowy dla rachunku prawdopodobieństwa, otwierający drogę analizie zmiennych losowych, których wybrane momenty (np. wartość oczekiwana) mogą nie istnieć. Tego typu rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna odgrywają kluczową rolę we współczesnych zastosowaniach w fizyce i poza nią. Kanonicznym przykładem wspomnianych zmiennych losowych są błędzenia fraktalne a tutaj przeloty Weierstrassa, o których jest mowa poniżej w rozdz. 6.4.

6.3 Błędzenia fraktalne

Zrozumienie tzw. **błędzeń fraktalnych** wymagało od nas omówienia w pierwszym rzędzie obiektów zwanych fraktalami statystycznymi (probabilistycznymi). Błędzenia fraktalne rozważmy na przykładzie wielce charakterystycznych tzw. **błędzeń Weierstrassa**³, które pozwalają na dostrzeżenie zasadniczej przyczyny powodującej istnienie algebraicznie zanikających, długozasięgowych "ogonów" zarówno w rozkładach prawdopodobieństw jak i w funkcjach korelacji. Jak wykazujemy, tą przyczyną są **rzadkie, ekstremalne zdarzenia** które, w określonych warunkach, są generowane przez **stochastycznie samopodobną strukturę trajektorii** błędzącej cząsteczki. Mówiąc ogólniej, trajektoria ta tworzy stochastyczną strukturę fraktalną - stąd wzięła się nazwa tych błędzeń.

³Termin 'błędzenia Weierstrassa' został wprowadzony w pracy E.W.Montrolla i M.F.Shlesingera pt.: "On the Wonderful World of Random Walks" zamieszczonej w "Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastics to Hydrodynamics", SSM XI, eds, J.L.Lebowitz i E.W.Montroll (North-Holland, Amsterdam 1984)

Istnienie rzadkich, ekstremalnych zdarzeń otwiera inny od tradycyjnego, i mimo znacznych osiągnięć będący wciąż w fazie początkowej, kierunek dociekań fizyki statystycznej oraz dynamiki chaotycznej.

6.4 Przeloty Weierstrassa

Przeloty Weierstrassa stanowią szczególny przypadek **błądzeń Weierstrassa** czyli procesu stochastycznego, który potrafi opisać zarówno sytuacje gdy

1) przemieszczenia pojedynczej cząsteczki można traktować jako natychmiastowe jak też takie, w których

2) prędkość przemieszczania się jest skończona tzw. **spacery Weierstrassa**.

Ten pierwszy przypadek, znacznie łatwiejszy do opisanie (dzięki mniejszej liczbie stopni swobody charakteryzującej układ), dotyczy właśnie **przelotów Weierstrassa** - od niego zaczynamy nasz wywód. Proces stochastyczny typu przelotów nosi także nazwę **hoppingu (jumpingu)** bądź po prostu procesu **skokowego** i jest szeroko stosowany w materii skondensowanej a zwłaszcza w fizyce ciała stałego np. do opisu dyfuzji oraz przewodnictwa jonowego.

6.4.1 Definicje i interpretacje

Zdefiniujemy część przestrzenną, $p(x)$, gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia się cząsteczki o wektor x w wyniku pojedynczego **przelotu**. Dla uproszczenia wstępnych wywodów matematycznych omawiamy **przeloty jednowymiarowe**; przeloty w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów omawiamy w Dodatku A (dokładniej rzecz biorąc, dyskutujemy sferycznie symetryczne przeloty Weierstrassa, zwane także błędzeniem Rayleigha-Pearsona, będące bezpośrednim uogólnieniem przypadku jednowymiarowego).

Wprowadźmy następującą wyjściową definicję opisującą kinetykę przemieszczenia cząstki o wektor x ,

$$p(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} w_j [\delta(x - b_j) + \delta(x + b_j)], \quad (6.112)$$

gdzie waga w_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, spełniająca warunek normalizacyjny

$$\sum_{j=0}^{\infty} w_j = 1, \quad (6.113)$$

oznacza prawdopodobieństwo z jakim cząsteczka przemieszcza się na odległość b_j . Oczywiście, z warunku (6.113) wynika natychmiast warunek normalizacji gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1. \quad (6.114)$$

Zauważmy, że czynnik $1/2$ stojący przed sumą jest prawdopodobieństwem wybrania przez cząstkę jednej z dwóch dozwolonych orientacji wektora przemieszczenia; ponieważ każda z orientacji jest równie prawdopodobna więc $p(x)$ opisuje błędzenie w nieobecności zewnętrznego pola. W dalszym ciągu dopuszczamy jedynie najprostszы wariant, w którym stosunek wag w kolejnych rzędach $j = 0, 1, 2, \dots$, jest funkcją malejącą i niezależną od rzędu, tzn.

$$\frac{w_{j+1}}{w_j} = \frac{1}{N} < 1, \quad (6.115)$$

co oznacza, że parametr N pełni rolę współczynnika podobieństwa stochastycznego (tutaj współczynnika stochastycznego osłabienia) struktury stochastycznej; z (6.113) oraz (6.115) wynika natychmiast, że

$$w_j = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^j} \quad (6.116)$$

maleje potęgowo z rzędem j . W dalszym ciągu, zgodnie z duchem zależności (6.115), przyjmujemy, że

$$\frac{b_{j+1}}{b_j} = b > 1, \quad (6.117)$$

gdzie b pełni rolę współczynnika podobieństwa geometrycznego (zwanego też czasami współczynnikiem geometrycznego wzmocnienia struktury stochastycznej); podobnie jak dla wag, z (6.117) wynika natychmiast zależność potęgowa

$$b_j = b_0 b^j, \quad (6.118)$$

gdzie b_0 jest stałą, jednostkową długością przelotu rzędu zerowego; w dalszym ciągu kładziemy (w wybranych miejscach) dla uproszczenia wywodów matematycznych $b_0 = 1$ przyjmując, że przeloty dłuższe są mniej prawdopodobne np. ze względu na opory ruchu tzn. zakładając, że $b > 1$. Sytuacja przeciwna, gdy $b < 1$, dotyczy np. błędzenia trajektorii w przestrzeni fazowej w obszarze hierarchicznych pułapek istniejących w wielu nieliniowych zagadnieniach dynamicznych przejawiających zachowania chaotyczne. Przypadek $b = 1$ ma charakter marginalny - nie będziemy go tutaj rozważać.

Z wyrażenia (6.116) oraz (6.118) wynika, że przeloty cząsteczki można grupować w rzędy zarówno według częstości ich występowania jak i długości przelotów, co pozwala przepisać wyjściowy wzór (6.112) w postaci

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N^j} [\delta(x - b_0 b^j) + \delta(x + b_0 b^j)]. \quad (6.119)$$

Jak widać, wzór (6.119) dopuszcza dowolnie długie przeloty cząsteczki. Omawiane tutaj błędzenie pojedynczej cząsteczki nosi nazwę przelotów dlatego że zarówno

ogólna definicja (6.112) jak i wzór (6.119) określają natychmiastowe przemieszczanie się błądzącej cząsteczki pomiędzy kolejnymi punktami zwrotnymi (przystankami wyznaczającymi oczywiście początek i koniec pojedynczego przelotu). Należy podkreślić, iż wszystkie wnioski formułowane w tym rozdziale odnoszą się także do wspomnianych już sferycznych przelotów Weierstrassa omówionych w Dodatku A. Na przykład, prowadzona tutaj dyskusja dotycząca wzorów (6.112) oraz (6.119) odnosi się jednocześnie do wzoru (H.1) oraz towarzyszących mu definicji zamieszczonych w Dodatku A.

Asymptotyczna postać $p(x)$

Istnieje kilka sposobów odpowiedzi na pytanie o asymptotyczną postać $p(x)$. Wybieramy tutaj tę najprostszą, wynikającą bezpośrednio z odpowiedniej zamiany zmiennych. Zatem, poszukujemy prawdopodobieństwa $p(x)$ dla $|x| \gg b_0$. Rozważmy w tym celu prawdopodobieństwo $w(j)$ dane wzorem (6.116), w którym zmienną j wyrazimy poprzez b^j . Pamiętajmy, że zgodnie z definicją przelotów Weierstrassa (6.119) $b^j = |x|/b_0$. Korzystając z niezmienniczości prawdopodobieństwa (jako składowej), możemy wprowadzić następującą równość

$$w(j) dj = p(|x|) d|x| \Leftrightarrow p(x) = \tilde{w}(|x|) \frac{dj}{d|x|} = \frac{1 - \frac{1}{N}}{\ln b} \frac{b_0^\beta}{|x|^{1+\beta}}, \quad (6.120)$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, iż po zamianie zmiennej j na $|x|$ prawdopodobieństwo $w(j) dj$ staje się prawdopodobieństwem $p(|x|) d|x|$, przy czym

$$\tilde{w}(|x|) \stackrel{\text{def.}}{=} w(j(|x|)) = w\left(j = \frac{1}{\ln b} \ln\left(\frac{|x|}{b_0}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{b_0^\beta}{|x|^\beta}, \quad (6.121)$$

gdzież

$$\frac{1}{N^j} = \exp(-j \ln N) = \exp\left(-\beta \ln\left(\frac{|x|}{b_0}\right)\right) = \left(\frac{|x|}{b_0}\right)^{-\beta}. \quad (6.122)$$

Skorzystaliśmy też tutaj z możliwości uciąglenia dyskretnej zmiennej j . Możliwość ta wynika z faktu, że warunek konieczny i wystarczający, czyli

$$\frac{dj}{d|x|} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln b} \frac{1}{|x|} \ll 1 \Leftrightarrow |x| \gg \frac{1}{\ln b} \quad (6.123)$$

jest łatwo spełnić.

Samopodobny charakter przelotów Weierstrassa

Istnieje ważny powód, dla którego nasze rozważania rozpoczęliśmy od analizy pojedynczego przemieszczenia cząsteczki. Otóż, jak zobaczymy przeloty Weierstrassa

mają charakter samopodobny dlatego należy oczekiwać, że już elementarne przemieszczenie będzie w sobie zawierać istotne informacje dotyczące całej trajektorii; aspekt ten był już zresztą widoczny dla ruchów Browna, dla których współczynnik samodyfuzji dał się wyrazić za pomocą parametrów mikroskopowych charakteryzujących jedynie pojedyncze przemieszczenie cząsteczki.

Interpretacja wzoru (6.119) jest szczególnie prosta gdy parametr N jest liczbą naturalną większą od 1. Mianowicie, już ze wzoru (6.115) wynika, że przeloty o długości $b_0 b^{j+1}$ są N razy mniej prawdopodobne niż przeloty o długości $b_0 b^j$. Można zatem powiedzieć, że średnio rzecz biorąc **zanim cząsteczka wykona przelot rzędu $j + 1$ musi wykonać N przelotów rzędu j** Zaniedbując na razie nieuniknione fluktuacje sekwencji przelotów oraz fluktuacje proporcji pomiędzy liczbami przelotów o różnych długościach, można to przedstawić schematycznie w postaci graficznej, przyjmując dla przykładu, że $N = 3$ oraz $b = 2$.

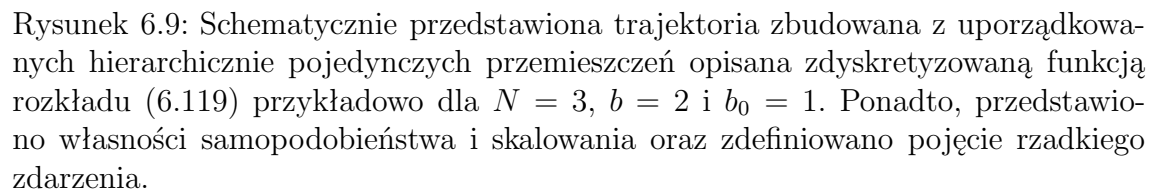
Poniższy (dwuczęściowy) rysunek 6.9 przedstawia, dla większej pogładowości, błędzenie w przestrzeni dwuwymiarowej; nie narusza to w niczym ogólnych zasad (6.115) i (6.117) definiujących przeloty Weierstrassa.

Uderzającą cechą tak uporządkowanej trajektorii błędzącej cząsteczki jest jej **samopodobny charakter** co widać już przez zwykłe porównanie rysunku 6.9(a) i 6.9(b).

Na rysunku 6.9(a) zamieszczone są wszystkie szczegóły trajektorii, tzn. aby wykonać przelot o długości $b^1 = 2$ cząsteczka musi wykonać najpierw $N = 3$ przelotów o długości jednostkowej (rzędu zerowego); aby wykonać przelot o długości $b^2 = 4$ musi analogicznie wykonać $N = 3$ przelotów rzędu $j = 1$, itd, itp. A zatem, zanim zostanie wykonany przelot rzędu $j = 2$ musi być zrealizowanych $N^{j=2} = 9$ przelotów o długości jednostkowej (rzędu zerowego). Zatem ogólnie mówiąc, N^j **można traktować jako średnią liczbą przelotów rzędu zerowego, które muszą zostać wykonane aby mógł się pojawić przelot o długości b^j** . Ten pojedynczy przelot rozpoczynający j -e pokolenie w hierarchii przelotów stanowi w zbiorze złożonym z $(N^{j+1} - 1)/(N - 1) (= N^j + N^{j-1} + \dots + N^1 + N^0)$ przelotów tzw. **rzadkie, ekstremalne zdarzenie** o ile spełniony jest dodatkowy warunek, który wprowadziamy poniżej. Jak wykażemy, zdarzenia takie odgrywają zasadniczą rolę w tzw. **dyfuzji anormalnej**. To właśnie z powodu tego typu zdarzeń zwykła dyfuzja traci swój normalny charakter; jak zobaczymy, właśnie to jest np. przyczyną zamiany relaksacji wykładniczej na potęgową.

Z grubsza rzecz biorąc, rzadkie, ekstremalne zdarzenie a tutaj rzadki, ekstremalny przelot, jest unikalnym w stosunku do tych, które już się pojawiły i przynajmniej o rząd wielkości większym - jak pokazujemy, jest to warunek konieczny ale nie wystarczający. W tym sensie stochastyczna trajektoria samopodobna może, w pewnych warunkach, wygenerować rzadkie, ekstremalne zdarzenia, natomiast (jak zobaczymy) rzadkie, ekstremalne zdarzenia zawsze budują stochastyczną trajektorię samopodobną. W dalszym ciągu prowadzimy rozważania pozwalające na wprowadzenie uściślonej definicji rzadkiego, ekstremalnego zdarzenia.

Wielkość N^j można formalnie traktować jak elementarną "masę" błędzenia We-



ierstrassa (całkowitą "masą" jest wielkość $(N^{j+1} - 1)/(N - 1)$) nagromadzoną w obszarze scharakteryzowanym przez liniowy rozmiar b^j ; wykazemy, że zależność pomiędzy nagromadzoną "masą" a liniowym rozmiarem prowadzi do istnienia uniwersalnego wykładnika, który w dalszym ciągu nazywamy **wymiarem samopodobieństwa** i oznaczamy przez d_s .

Rysunek 6.9(b) jest tą samą trajektorią "sfotografowaną" już z pewnej odległości mianowicie takiej, że zdolność rozdzielcza "zdjęcia" nie pozwala na rozróżnienie niektórych jego szczegółów. Ta nierozróżnialność szczegółów sprowadza się do traktowania każdej grupy składającej się tutaj z trzech jednostkowych przemieszczeń jak pojedynczego punktu. Dlatego właśnie najmniejsza rozróżnialna grupa składa się (przy takiej a nie innej zdolności rozdzielczej zdjęcia) z trzech przemieszczeń o długości b^1 . Jak widać, trajektoria zamieszczona na rysunku 6.9(b) nie różni się niczym od tej jaka znajduje się na rysunku 6.9(a) za wyjątkiem,

- 1) skali - jest narysowana w skali b razy większej
- 2) (być może) przypadkowych różnic co do orientacji kolejnych, odpowiadających sobie na obu rysunkach, wektorów przemieszczeń.

Każda trajektoria stochastyczna spełniająca powyższe własności nosi nazwę **samopodobnej trajektorii stochastycznej** czyli, średnio rzecz biorąc, jest **niezmiennicza ze względu na skalowanie**. Oczywiście, oddalając się jeszcze bardziej (czyli przechodząc na coraz niższy poziom ziarnistości obrazu) doprowadzili byśmy do tego, że także grupy złożone z trzech przemieszczeń o długości b^1 widoczne byłyby jedynie w postaci punktów, co znowu nie zmienia w niczym istotnym wyjściowego rysunku 6.9(a), itd, itp; postępowanie to można kontynuować bez przeszkód gdyż jest ono ograniczone jedynie rozmiarem samej trajektorii.

Powyższe postępowanie można sformalizować pisząc dla każdego poziomu ziarnistości $k (= 0, 1, 2, \dots, j)$ następującą relację wynikania

$$N^{j-k}(b^k) \Rightarrow b^{j-k}(b^k); \quad (6.124)$$

przy czym k -ty poziom ziarnistości oznacza, że przelot o długości b^k jest traktowany jak jednostkowy a wszystkie pozostałe przeloty o długościach krótszych, które go poprzedzają są (w tej zdolności rozdzielczej) traktowane po prostu jak punkt. Tym samym, N^{j-k} przemieszczeń o długości b^k poprzedza (w średniej) przemieszczenie o długości b^{j-k} razy większe.

Można wykazać, że nie tylko trajektoria jako całość tworzy rosnącą strukturę samopodobną ale także zbiór wszystkich punktów zwrotnych (oznaczonych na rysunku przez pełne kółka). Co więcej, wymiar fraktalny tego zbioru punktów wynosi $d_f = \beta$.

Wskazana tutaj własność samopodobieństwa w sensie stochastycznym jest podstawową cechą tzw. stochastycznych struktur fraktalnych, o których jest mowa w dalszej części. Zauważmy, że własność samopodobieństwa udało nam się łatwo dostrzec tylko dlatego, że zrezygnowaliśmy z nieuniknionych w rzeczywistości wspomnianych

już fluktuacji przelotów. Innymi słowy, ze stochastyczną strukturą samopodobną, bądź ogólniej fraktalną, mamy do czynienia wtedy gdy po przeprowadzeniu procedury regularyzacji (porządkowania) czyli po pozbyciu się fluktuacji (nieporządku) struktura staje się samopodobna w sensie deterministycznym, bądź ogólniej mówiąc, staje się fraktalem deterministycznym, przynajmniej w granicy dużej liczby pokoleń. I odwrotnie, ze struktury deterministycznej można uzyskać stochastyczną przez wprowadzenie nieporządku, np. typu fluktuacji czyli w taki sposób aby w średniej nie zniszczyć własności samopodobieństwa. Zatem, dla rzeczywistych błędzeń należy zbudować statystykę długości przelotów (mówiąc o częstości występowania przelotów o poszczególnych długościach) i na tej podstawie wyznaczyć stosunek odpowiednich wag; zbudowanie takiej statystyki w postaci zamkniętej (a nie w postaci nieskończonej sumy) jest zasadniczym celem niniejszych rozważań.

Można teraz zadać fundamentalne pytanie: **jak elementarna "masa" omawianej struktury stochastycznej skaluje się z liniowym rozmiarem obszaru w którym jest nagromadzona?** Na pytanie to można odpowiedzieć bez trudu, korzystając z relacji (6.124) dla rzędu j oraz poziomu ziarnistości k (traktując oczywiście b^k jako jednostkę). Mianowicie, ma miejsce równość

$$N^{j-k} = (b^{j-k})^\beta, \quad (6.125)$$

z której można wyznaczyć wykładnik β w postaci niezależnej od j oraz k

$$\beta = \frac{\ln(N)}{\ln(b)} \quad (6.126)$$

będącej bezpośrednią konsekwencją samopodobnego charakteru struktury; to właśnie wykładnik β nazywa się **wymiar samopodobieństwa** i oznacza d_s . Tym samym wymiar samopodobieństwa d_s , można traktować jako unikalną charakterystykę struktury samopodobnej. Jest to stwierdzenie słuszne nie tylko w tym konkretnym przypadku ale dla wszelkiego typu struktur fraktalnych (zarówno o charakterze stochastycznym jak też deterministycznym) dla których wymiar fraktalny jest zawsze dany w postaci ilorazu dwóch logarytmów.

W rozdz. 6.4.5 wskazujemy na progowy charakter błędzeń tzn. pokazujemy dla jakich wartości wykładnika β struktura jest trwała i nie ulega zamazaniu nawet po wykonaniu przez cząsteczkę wielkiej liczby przelotów.

6.4.2 Czynniki strukturalny przelotów Weierstrassa

Czynnik strukturalny przelotów Weierstrassa, $\tilde{p}(k)$, zwany także **funkcją charakterystyczną przelotów Weierstrassa** jest zdefiniowany jako transformata Fouriera

$$\tilde{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ikx) p(x) \quad (6.127)$$

przybierając (po podstawieniu formuły (6.119) i scałkowaniu) postać sumy szeregu geometryczno-trygonometrycznego

$$\tilde{p}(k) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N^j} \cos(kb^j); \quad (6.128)$$

czynnik strukturalny błędzenia Weierstrassa dany wyrażeniem (6.128) nosi nazwę funkcji Weierstrassa lub częściowej funkcji Weierstrassa-Mandelbrota. Na rysunku 6.10

Zasadnicze własności funkcji Weierstrassa (6.128) omawiamy poniżej.

6.4.3 Przestrzenne równanie skalowania

W tym miejscu rodzi się **zasadnicze pytanie o warunki w jakich $\tilde{p}(k)$, wyrażone wzorem (6.128), daje się przedstawić (z dobrym przybliżeniem) w postaci zamkniętej?** Odpowiedź na to pytanie jest dwuetapowa.

Po pierwsze zauważmy, że $\tilde{p}(k)$ spełnia następujące, niejednorodne równanie skalowania

$$\tilde{p}(bk) = N\tilde{p}(k) - (N-1)\cos(k), \quad (6.129)$$

co pozwala na poszukiwanie jego rozwiązania $\tilde{p}(k)$ w postaci sumy rozwiązania ogólnego (regularnego, normalnego), $\tilde{p}_n(k)$, równania niejednorodnego (6.129) oraz rozwiązania szczególnego (singularnego), $\tilde{p}_s(k)$, równania jednorodnego

$$\tilde{p}_s(bk) = N\tilde{p}_s(k). \quad (6.130)$$

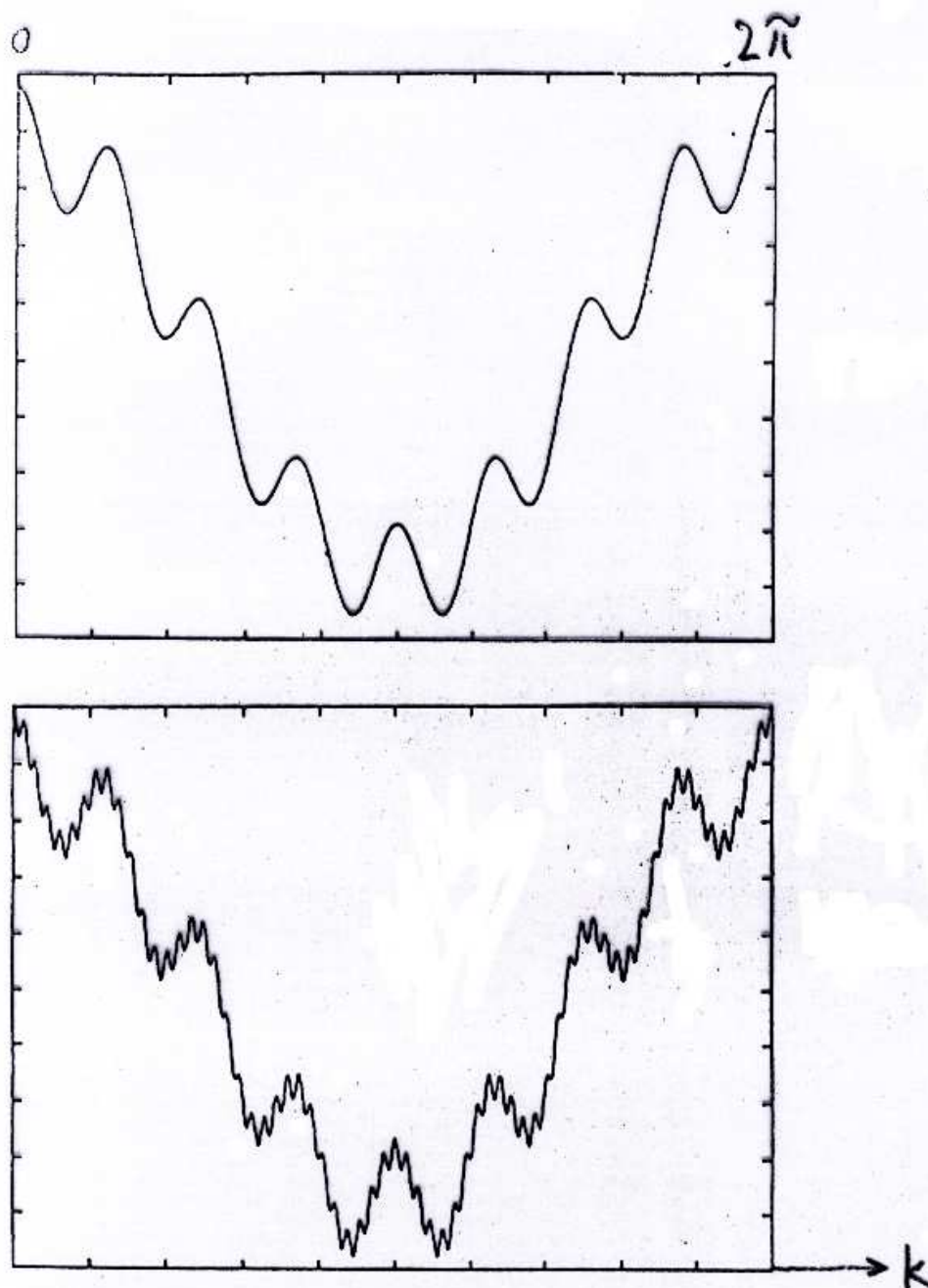
Kształt rozwiązania ogólnego jest już narzucony przez niejednorodność równania (6.129) tzn. $\cos(k)$; jest to zatem szereg potęgowy zawierający tylko parzyste potęgi zmiennej k , którego współczynniki musimy wyznaczyć. Robimy to standardowo, podstawiając ten szereg do równania (6.129) i przyrównując do siebie wyrażenia stojące przy tych samych potęgach k znajdujemy poszukiwane współczynniki. Stąd rozwiązanie ogólne otrzymujemy w postaci

$$\tilde{p}_n(k) \approx 1 - D'k^2, \quad (6.131)$$

gdzie tzw. **uogólniony współczynnik dyfuzji**

$$D' = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{b^2}{N}}. \quad (6.132)$$

(Dokładniej rzecz biorąc, o współczynniku dyfuzji można mówić wtedy gdy zdefiniowany został średni czas potrzebny na wykonanie pojedynczego przelotu - tutaj przyjęliśmy go milcząco jako jednostkowy; będzie o tym obszernie mowa w dalszej części.) Ta postać współczynnika D' posłuży nam do dalszej analizy a zwłaszcza



Rysunek 6.10: Schematycznie przedstawienie kilku składowych funkcji Weierstrassa (6.128) dla $N = 4$, $b = 8$ (czyli $\beta = 2/3$) i $b_0 = 1$. Górny wykres przedstawia sumę dwóch pierwszych składowych a dolny trzech pierwszych. Możemy się domyślać, że w granicy nieskończonej sumy składowych ciągłość tej funkcji jest zachowana ale różniczkowalność nie, gdyż uniemożliwia to powstała nieskończona hierarchia coraz mniejszych ale bardziej gwałtownych zakrętów funkcji Weierstrassa obecnych w każdym punkcie.

klasyfikacji rodzajów dyfuzji. Ograniczyliśmy się tutaj tylko do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia gdyż zarówno rozwiązanie regularne jak i singularne interesuje nas tylko dla przypadku gdy $|k| \ll 1$ co oznacza, że poszukujemy rozwiązania opisującego przede wszystkim długie przeloty.

Po drugie, rozwiązanie singularne $\tilde{p}_s(k)$ równania (6.130) możemy zaprojektować w postaci iloczynu funkcji wolnozmiennnej oraz potęgowej (była już o tym mowa w rozdz. 2.1.1 w kontekście porównania z danymi empirycznymi)

$$\tilde{p}_s(k) \approx -Q\left(\frac{\ln |k|}{\ln b}\right) |k|^{\beta'}, \quad (6.133)$$

przy czym funkcja wolnozmienna funkcja przedwykładnicza posiada następującą własność,

$$Q\left(\frac{\ln |bk|}{\ln b}\right) = Q\left(\frac{\ln |k|}{\ln b} + 1\right) = Q\left(\frac{\ln |k|}{\ln b}\right) \quad (6.134)$$

czyli jest funkcją okresową o okresie 1. Zatem, posiada następujące rozwinięcie fourierskie

$$Q\left(\frac{\ln |k|}{\ln b}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(2\pi i n \frac{\ln |k|}{\ln b}\right), \quad (6.135)$$

zwane logarytmiczną periodycznością (była już o tym mowa w rozdz. 2.1.1). W najprostszym przypadku redukuje się ono do stałej, którą oznaczamy przez $D'_f (= A_0)$ - w niniejszym rozdziale, dla prostoty rozważań, ograniczamy się tylko do tego szczególnego przypadku; najogólniejszą postać funkcji Q a także jawną postać **fraktalnego współczynnika dyfuzji** D'_f wyprowadziliśmy w Dodatku I korzystając z transformaty Mellina (patrz, Harry Bateman, Arthur Erdélyi, "Tables of Integral Transforms", Vol.I, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1954) oraz metody residuów (patrz, Krzysztof Maurin, "Analiza. Cz.II. Wstęp do analizy globalnej", PWN, Warszawa 1971) obliczania całek na płaszczyźnie zespolonej.

Wykładnik β' znajdujemy podstawiając wyrażenie (6.133) do równania (6.130). W ten sposób otrzymujemy, że

$$\beta' = \frac{\ln N}{\ln b} = \beta; \quad (6.136)$$

niestety, na tej drodze nie udaje się wyznaczyć fraktalnego współczynnika dyfuzji D'_f .

Jest charakterystyczne, że ten wcześniej wprowadzony wykładnik β jest *de facto* odpowiedzialny za nieanalityczny charakter rozwiązania singularnego. Z kolei pojawienie się tego wykładnika było spowodowane samopodobnym charakterem przelotów Weierstrassa więc to **własność samopodobieństwa jest przyczyną istnienia rozwiązania singularnego**. Zatem wykładnik β może być traktowany jako podstawowy we wszelkiego rodzaju analizach a w tym klasyfikacjach.

Ostatecznie, łącząc (6.131) i (6.133) wraz z (6.136), znajdujemy strukturalny czynnik przelotów Weierstrassa w postaci,

$$\begin{aligned}\tilde{p}(k) = \tilde{p}_s(k) + \tilde{p}_n(k) &\approx 1 - D'k^2 - D'_f |k|^\beta \\ &\approx \exp(-D'k^2 - D'_f |k|^\beta).\end{aligned}\quad (6.137)$$

Dalsze uproszczenie powyższego wzoru zależy od wartości wykładnika β . Mianowicie (pamiętając, że $|k| \ll 1$) otrzymujemy,

$$\tilde{p}(k) \approx \begin{cases} 1 - D'k^2 \approx \exp(-D'k^2), & \text{dla } \beta > 2 \\ 1 - D'_f |k|^\beta \approx \exp(-D'_f |k|^\beta), & \text{dla } \beta < 2; \end{cases}$$

przypadek marginalny gdy $\beta = 2$ wymaga innego, bardziej zaawansowanego podejścia (wykorzystującego transformatę Mellina oraz całkowanie przez residua) które omawiamy w dalszej części. Powyższa postać czynnika strukturalnego przelotów Weierstrassa jest słuszna dla dowolnego wymiaru przestrzeni euklidesowej, w której zachodzą przeloty. Postać ta umożliwia znalezienie (w postaci funkcji a nie dystrybucji jak to ma miejsce we wzorach (6.112) oraz (6.119)) asymptotycznej postaci rozkładu $p(x)$.

6.4.4 Renormalizacyjne rozwiązanie równania skalowania

Teraz, zdefiniujmy zagadnienie odwrotne. Mianowicie, dysponując równaniem skalowania (6.129) znajdziemy jego rozwiązanie metodą renormalizacji, czyli na drodze systematycznej a nie "metodą" zgadywania. Metoda renormalizacji jest wielokrokowa. Krokiem zerowym jest samo równanie skalowania, które przepisujemy w postaci:

$$\tilde{p}(k) = N^{-1}\tilde{p}(bk) + G(k) \quad (6.138)$$

gdzie niejednorodność

$$G(k) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cos(k). \quad (6.139)$$

W pierwszym kroku dokonujemy w powyższym równaniu dyskretnej renormalizacji (przeskalowania) zmiennej niezależnej k za pomocą stałej rzeczywistej b . Otrzymujemy,

$$N^{-1}\tilde{p}(bk) = N^{-2}\tilde{p}(b^2k) + N^{-1}G(bk), \quad (6.140)$$

gdzie dodatkowo podzieliliśmy otrzymane równanie przez N . Podstawiając równanie (6.138) do równania (6.140), uzyskujemy:

$$\tilde{p}(k) = N^{-2}\tilde{p}(bk) + N^{-1}G(bk) + G(k) \quad (6.141)$$

Jak widać, wykorzystaliśmy równanie wyjściowe (6.138) na dwa sposoby, tzn. najpierw zrenormalizowaliśmy je a następnie zastąpiliśmy za pomocą niego wielkość

jednokrotne zrenormalizowaną $\tilde{p}(bk)$. Oczywiście, w kolejnych krokach procedury renormalizacyjnej postępujemy analogicznie. Zatem, w drugim kroku:

$$N^{-1}\tilde{p}(bk) = N^{-3}\tilde{p}(b^3k) + N^{-2}G(b^2k) + N^{-1}G(bk) \quad (6.142)$$

i w rezultacie

$$\tilde{p}(k) = N^{-3}\tilde{p}(b^3k) + N^{-2}G(b^2k) + N^{-1}G(bk) + G(k). \quad (6.143)$$

Z powyższego łatwo już można wywnioskować jaką postać otrzymamy w l -tym kroku. Mianowicie,

$$\tilde{p}(k) = N^{-l}\tilde{p}(b^l k) + \sum_{j=0}^{l-1} N^{-j}G(b^j k). \quad (6.144)$$

W dalszym ciągu zakładamy, że w granicy $l \rightarrow \infty$ wielkość $\tilde{p}(b^l k)$ jest ograniczona. Zatem ostatecznie, przechodząc z $l \rightarrow \infty$, otrzymujemy wzór

$$\tilde{p}(k) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N^j} \cos(kb^j), \quad (6.145)$$

który jest oczywiście tożsamy z wyrażeniem (6.128), co należało wykazać.

6.4.5 Dyfuzja anomalna

W pierwszym kroku zbadamy w jakich warunkach średnia długość pojedynczego przelotu jest skończona a w jakich tak nie jest. Przeanalizujemy w tym celu wyrażenie

$$\langle |x| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) |x| = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{b}{N}\right)^j, \quad (6.146)$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru (6.119) i (6.127). Wyróżnić można tutaj dwa istotnie różne przypadki

A) $\langle |x| \rangle < \infty$

B) $\langle |x| \rangle = \infty$.

Z wyrażenia (6.146) wynika, że z przypadkiem 1) mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy gdy $b/N < 1$ czyli gdy $\beta > 1$ podczas gdy z przypadkiem 2) wtedy i tylko wtedy gdy $b/N \geq 1$ czyli gdy $\beta \leq 1$. Jest interesującym rozważanie obu sytuacji w połączeniu z analizą własności średniej z kwadratu pojedynczego przelotu $\langle x^2 \rangle$.

Zauważmy, że

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) x^2 \left(= -\frac{d^2 \tilde{p}(k)}{dk^2} \Big|_{k=0} \right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{b^2}{N}\right)^j, \quad (6.147)$$

gdzie, tak jak poprzednio wykorzystaliśmy definicję (6.112) oraz wyrażenie (6.127)). Analogicznie jak poprzednio, rozważmy dwie istotnie różne sytuacje,

1) normalną, gdy średnia $\langle x^2 \rangle < \infty$

2) anomalną, gdy $\langle x^2 \rangle = \infty$;

Z sytuacją pierwszą mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy gdy suma szeregu geometrycznego stojąca w wyrażeniu (6.147) jest zbieżna czyli gdy

$$\frac{b^2}{N} < 1 \equiv \beta > 2. \quad (6.148)$$

W rezultacie otrzymujemy, że

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{b^2}{N}} = 2D' < \infty. \quad (6.149)$$

Powyższy związek jest ważny ponieważ umożliwia wyrażenie uogólnionego współczynnika dyfuzji, który jest wielkością makroskopową za pomocą wielkości mikroskopowej jaką jest średnia z kwadratu pojedynczego przelotu; jest to możliwe dzięki temu, że struktura przelotów ma charakter samopodobny (czyli przeloty zachodzące w różnych skalach tworzą zbiory podobne).

Zauważmy, że z istnienia ogólnej nierówności

$$\langle |x| \rangle^2 < \langle x^2 \rangle, \quad (6.150)$$

wynika, że w tym przypadku także

$$\langle |x| \rangle < \infty, \quad (6.151)$$

tzn. oba te przypadki są ze sobą ściśle skorelowane.

Należy zdawać sobie sprawę, że skończona wartość drugiego momentu $\langle x^2 \rangle$ (w związku ze skończoną wartością czynnika strukturalnego $\tilde{p}(k)$ dla dowolnego wektora k) to warunek dostateczny i konieczny na istnienie rozkładu $p(x)$ w postaci gaussowskiej dla asymptotycznie dużych wartości $|x|$. Zatem, nie jest konieczne aby były skończone wyższe momenty zmiennej losowej x . Innymi słowy, w takim przypadku proces Weierstrassa jest równoważny procesowi Wienera czyli po prostu opisuje błądzenie losowe zwane ruchem Browna.

Sytuacja druga ma miejsce wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{b^2}{N} \geq 1 \equiv \beta \leq 2 \quad (6.152)$$

i w konsekwencji

$$\langle x^2 \rangle = \infty. \quad (6.153)$$

Powyższa sytuacja jest całkowicie zdekorelowana z zachowaniem się pierwszego momentu absolutnego tzn. może on być w tej sytuacji zarówno skończony jak też nieskończony. Jednakże sytuacja gdy pierwszy moment absolutny jest nieskończony

pociaąga za sobą oczywiście (na mocy nierówności (6.150)) wniosek, że także drugi moment jest nieskończony. Analiza zachowania wyższych momentów nie jest już tutaj istotna.

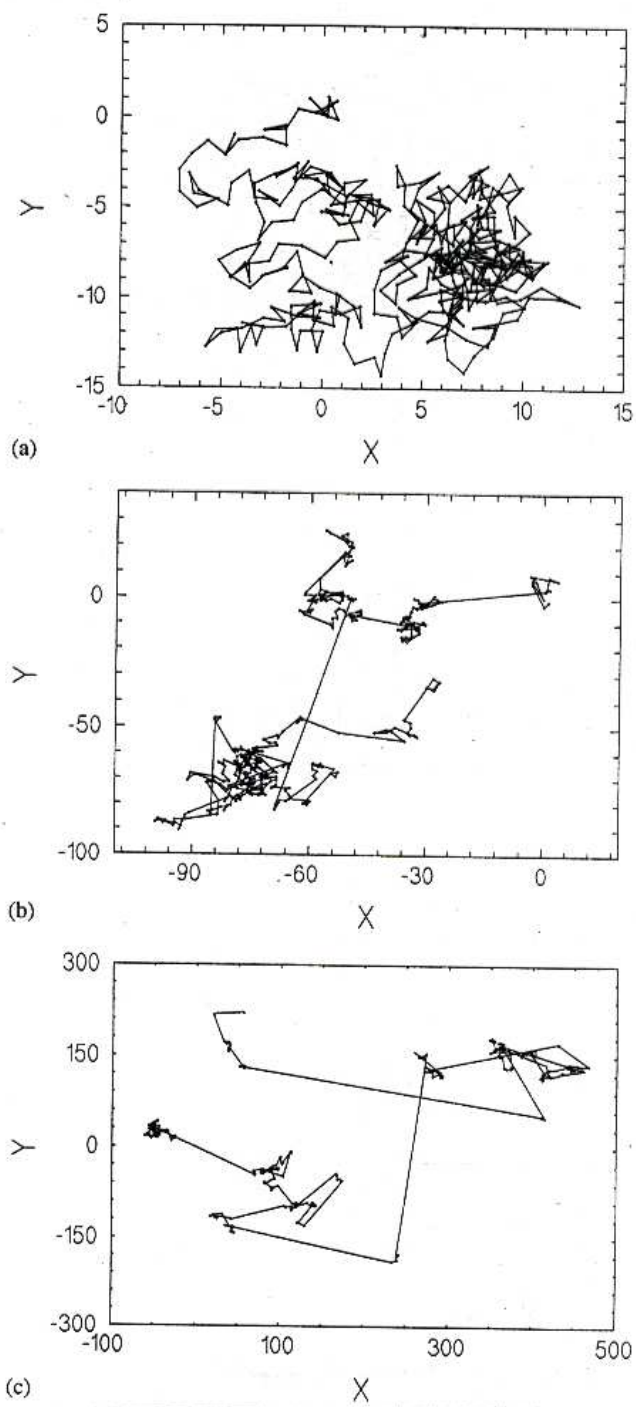
Rysunek 6.11 przedstawia przykładowe przeloty Weierstrassa⁴: dwa pierwsze dla sytuacji A) oraz jeden (trzeci) dla sytuacji B). Wykres na rysunku 6.11a dotyczy sytuacji gdy $2 < \beta = \ln 5 / \ln 2 (\approx 2.32)$, podczas gdy wykres na rysunek 6.11b dotyczy zasadniczo innej sytuacji gdy $1 < \beta = \ln 3 / \ln 2 (\approx 1.585) < 2$, wreszcie wykres na rysunku 6.11c dotyczy przypadku B) gdy $\beta = \ln 5 / \ln 6 (\approx 0.9) < 1$. Widać, że są to trzy istotnie różne sytuacje reprezentujące kolejno, proces gaussowski (gdyż $\langle |x| \rangle < \infty$ oraz $\langle x^2 \rangle < \infty$, ograniczone przeloty Weierstrassa (gdyż $\langle |x| \rangle < \infty$ i $\langle x^2 \rangle = \infty$) oraz nieograniczone przeloty Weierstrassa (gdyż $\langle |x| \rangle = \infty$ oraz $\langle x^2 \rangle = \infty$).

W tym miejscu można postawić pytanie: **jak w realnym doświadczeniu będzie przejawiać się nieograniczony charakter średniej długości bądź dyspersji elementarnego przelotu?** Zauważmy, że pytanie to ma dużo ogólniejszy charakter i może dotyczyć dowolnej zmiennej losowej a nie tylko wektora elementarnego przelotu. Odpowiedź na nie jest dzisiaj stosunkowo prosta chociaż do środowiska fizyków docierała zaskakująco powoli (patrz Benoit B. Mandelbrot, "The Paul Lévy I knew" in "Lévy Flights and Related Topics in Physics", LNP Vol.450, eds. Michael F. Shlesinger, George M. Zaslavsky, Uriel Frisch (Springer, Berlin 1995) p.VIII - XII).

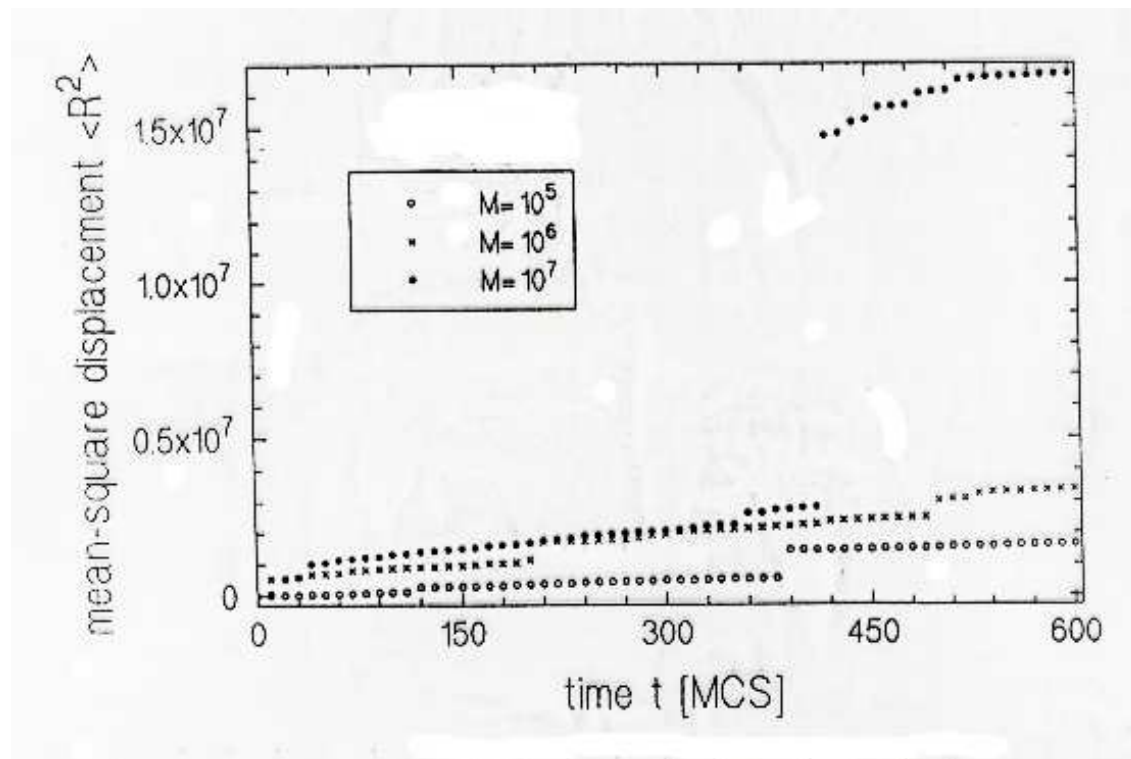
Mianowicie, dokonajmy pierwszej serii o określonej liczbie pomiarów $n_1 \gg 1$ zmiennej losowej x i wyznaczmy dla tej serii pomiarów średnią długość $\langle |x| \rangle_1$ oraz kwadrat dyspersji $\langle x^2 \rangle_1$, następnie kontynuujemy nasze pomiary wydłużając serię pomiarową do $n_2 \gg n_1$ i obliczając ponownie te obie średnie, analogicznie obliczymy tę średnią dla następnych, siłą rzeczy coraz dłuższych, serii pomiarowych (tzn. $n_1 \ll n_2 \ll \dots \ll n_j \ll \dots$). Otrzymaliśmy ciąg trzech rodzajów wyników dla średniej z kwadratu sumarycznego przemieszczenia błędzącej cząsteczki, $\langle R^2(t) \rangle = \langle X^2(t) \rangle$, w funkcji (dyskretnego) czasu, które przedstawiliśmy na rysunku 6.12. Wyniki uzyskaliśmy na drodze symulacji Monte Carlo przelotów Weierstrassa sparametryzowanych przykładowo (rysunek 6.12a) przez $N = 3$ oraz $b = 2$ co daje wykładnik $\beta \approx 1.585$; algorytm tej symulacji został omówiony w dalszej części.

Jak widać, **w miarę wzrostu liczebności serii wzrasta też, miejscami nawet gwałtownie, średnia $\langle |x| \rangle$ oraz $\langle x^2 \rangle$** . Zwiększanie liczby pomiarów nie stabilizuje średnich a wprost przeciwnie - im większa jest liczba pomiarów tym większa jest szansa, że w danej serii wystąpi tzw. **rzadkie zdarzenie** czyli ogromna wartość zmiennej losowej $|x|$ oraz x^2 w istotny sposób wpływająca na wynik końcowy pomiaru, że jej częstość występowania jest znikoma. To właśnie rzadkie zdarzenia (czyli z grubsza mówiąc, przeloty przynajmniej o rząd wielkości dłuższe od aktualnie wykonywanych) chronią trajektorię błędzącej cząsteczki przed zamazywaniem się w wyniki ogromnej liczby przelotów, wyrzucając cząsteczkę daleko poza obszar aktual-

⁴Dokładniej rzecz biorąc, przedstawia tzw. sferyczne przeloty Weierstrassa (patrz Dodatek H).



Rysunek 6.11: Schematycznie przedstawienie przelotów Weierstrassa dla sytuacji A) i B). Wykres (a) jest opisany wykładnikiem $\beta = 2.32$, wykres (b) wykładnikiem $\beta = 1.585$, natomiast (c) wykładnikiem $\beta = 0.90$.



Rysunek 6.12: Symulacja komputerowa średniej z kwadratu sumarycznego przemieszczenia dla przelotów Weierstrassa (czas t jest dyskretny liczony kolejnymi przelotami). Wykres (a) jest opisany wykładnikiem $\beta = 1.585$, natomiast wykres (b) wykładnikiem $\beta = 2.32$. W obu przypadkach zespół statystyczny miał liczebność M kolejno równą: $n_1 = 10^5$ ($\circ$), $n_2 = 10^6$ ($\times$), $n_3 = 10^7$ ($\bullet$). Jak widać, wzrost liczebności zespołu statystycznego prowadzi (paradoksalnie) do zwiększenia amplitudy uskoków.

nie wizytowany. Tym samym następuje separacja błędów realizowanych w różnych skalach długości - będzie o tym dokładniej mowa w dalszej części.

Dla porównania na rysunku 6.12b przedstawiono w taki sam sposób sytuację normalną uzyskaną analogicznie dla przelotów Weierstrassa ale sparametryzowanych przez większą wartość $N = 5$ przy tej samej wartości $b(= 2)$ co daje $\beta = 2.32$ (wyraźnie większe od progowej wartości $\beta = 2$). Jak widać, wartości średnie $\langle |x| \rangle$ oraz $\langle x^2 \rangle$ szybko się stabilizują osiągając przewidywaną wartość teoretyczną równą odpowiednio $4/3$ oraz 4 .

6.4.6 Rzadkie, ekstremalne zdarzenia

Korzystając z wcześniejszych rozważań, które doprowadziły do wzorów (6.125) oraz (6.126), można odpowiedzieć na głębsze pytanie **jak wielkość (długość), $|x_{max}|$, tego rzadkiego, pojedynczego zdarzenia (przelotu) skaluje się z całkowitą liczbą przelotów L ?** Zauważmy, że $|x_{max}|$ jest wartością maksymalną jaką pojawiła się w trakcie tych L przelotów. Zatem dla dużej liczby przelotów L zachodzą relacje,

$$L = \sum_{j=0}^{j_{max}} N^j = \frac{N^{j_{max}+1} - 1}{N - 1} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} N^{j_{max}}, \quad (6.154)$$

gdyż $N^{j_{max}} \gg 1$, przy czym j_{max} jest największą wartością j -ego pokolenia jaka pojawiła się w trakcie tych $L(\gg 1)$ przelotów, oraz

$$|x_{max}| = b_0 b^{j_{max}}, \quad (6.155)$$

z których, po wyeliminowaniu pomocniczej wielkości j_{max} , otrzymujemy poszukiwaną zależność

$$|x_{max}| \approx A L^{1/\beta}, \quad (6.156)$$

gdzie współczynnik $A = b_0(1 - 1/N)^{1/\beta}$.

Zauważmy przy okazji, że ze wzoru (6.154) wynika⁵, iż prawdopodobieństwo, $w(x_{max})$, wystąpienia pojedynczego przelotu o maksymalnej długości $|x_{max}|$ jest równe, z dobrym przybliżeniem, $1/L$. Zatem, na podstawie powyższego określenia prawdopodobieństwa $w(x_{max})$ oraz wzoru (6.156) otrzymujemy, że

$$w(x_{max}) \approx \frac{B}{|x_{max}|^\beta}, \quad (6.157)$$

gdzie współczynnik $B = A^\beta$.

Bez trudu można wykazać (korzystając z prostego wyrażenia, $L_1 = N^{j_{max}}$ na całkowitą liczbę elementarnych przelotów L_1), że $|x_{max}|$ skaluje się analogicznie z

⁵Bardziej subtelne wyprowadzenie, prowadzące do dokładniejszego wzoru (6.121), zostało przedstawione w rozdz. 6.4.1.

L_1 przy czym współczynnik proporcjonalności jest równy jedności. Z tego powodu czasami L_1 a nie L nazywa się "masą" błędzenia przypadkowego.

Powyższe rozważania, a w tym zwłaszcza wzór (6.156), są słuszne tylko dla $\beta < 2$ (co nie wynika wprost z przeprowadzonego oszacowania) gdyż tylko wtedy rzadkie zdarzenie może odegrać ważącą rolę, w przeciwnym razie jego częstość występowania jest zbyt mała w porównaniu z częstością występowania krótszych przelotów (przypadek marginalny $\beta = 2$ wymaga osobnego potraktowania).

Zwróćmy uwagę na dwa rodzaje średnich z jakimi mamy do czynienia w tym paragrafie - w następnym omawiamy trzeci rodzaj. Pierwszy rodzaj średnich to momenty (absolutne) $\langle |x|^n \rangle_L$, $n = 1, 2, \dots$, liczone wzdłuż trajektorii błędzącej cząsteczki i zależne od całkowitej liczby przelotów L , przy czym $\langle \dots \rangle_L$ oznacza po prostu średnią arytmetyczną ze wszystkich L przelotów. W przypadku asymptotycznie dużej liczby przelotów (dla każdego n) zachodzi związek

$$\langle |x|^n \rangle_{L \rightarrow \infty} = \langle |x|^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) |x|^n, \quad (6.158)$$

gdzie $\langle |x|^n \rangle$ jest drugim rodzajem średniej, który dla $n = 1$ oraz $n = 2$ był już dyskutowany w poprzednim paragrafie. W ogólności równość średnich

$$\langle \dots \rangle_{L \rightarrow \infty} = \langle \dots \rangle, \quad (6.159)$$

to nic innego jak **własność samośredniowania**.

W niniejszym rozdziale odpowiemy na istotne pytania dotyczące pierwszego rodzaju średnich, a mianowicie **jak momenty liczone wzdłuż trajektorii skalują się z L** ? W tym celu skorzystajmy z przybliżonej zależności słusznej dla dużych wartości L usprawiedliwiającej zaniedbanie zarówno fluktuacji sekwencji przelotów jak też fluktuacji proporcji pomiędzy liczebnościami przelotów w poszczególnych rzędach. Otrzymujemy,

$$\begin{aligned} \langle |x|^n \rangle_L &= \frac{(b^n)^0 N^{j_{max}} + (b^n)^1 N^{j_{max}-1} + (b^n)^2 N^{j_{max}-2} + \dots + (b^n)^{j_{max}} N^0}{L} \\ &= \frac{N^{j_{max}}}{L} \sum_{j=0}^{j_{max}} \left(\frac{b^n}{N} \right)^j = \frac{N^{j_{max}}}{L} \frac{\left(\frac{b^n}{N} \right)^{j_{max}+1} - 1}{\frac{b^n}{N} - 1} \\ &\approx \frac{N^{j_{max}}}{L} \frac{\left(\frac{b^n}{N} \right)^{j_{max}+1}}{\frac{b^n}{N} - 1} \approx \frac{1}{L} \frac{1}{1 - \frac{N}{b^n}} (b^n)^{j_{max}}, \text{ dla } \beta < n, \end{aligned} \quad (6.160)$$

gdzie indeks j_{max} jest największą wartością rzędu (pokolenia) o numerze j jaka pojawiła się w trakcie L przelotów (patrz (6.154)); ponadto przyjęliśmy tutaj, że $j_{max} \gg 1$ (co jest nieco mocniejszym założeniem od $L \gg 1$). Zauważmy przy okazji, że ułamek $N^{j_{max}-j}/L$, $j = 0, \dots, j_{max}$, jest po prostu prawdopodobieństwem wystąpienia (wśród L przemieszczeń) takiego, które ma długość b^j .

Korzystając z powyższego wzoru oraz z wyrażenia (6.154) otrzymujemy po prostych przekształceniach,

$$\langle |x|^n \rangle_L \approx C_n L^{n/\beta-1} \approx \frac{C'_n}{L} |x_{max}|^n, \text{ dla } \beta < n, \quad (6.161)$$

gdzie współczynnik $C_n = A^n[1/(1 - N/b^n)]$ a $C'_n = C_n/A^n$; przypadek $\beta = n$ jest marginalny i dlatego nie zajmujemy się nim tutaj. Warto zdawać sobie sprawę, że zainteresowani jesteśmy przede wszystkim przypadkiem $n = 1$ oraz $n = 2$.

Dla kompletności, rozważmy jeszcze komplementarną sytuację gdy wykładnik $\beta < n$. Wówczas, ma miejsce nierówność $b^n/N < 1$, która powoduje, że wzór (6.160) przybiera postać:

$$\langle |x|^n \rangle_L = \frac{N^{j_{max}} \left(\frac{b^n}{N}\right)^{j_{max}+1} - 1}{L \frac{b^n}{N} - 1} \approx \frac{N^{j_{max}}}{L} \frac{1}{1 - \frac{b^n}{N}} \approx \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{b^n}{N}} = 2 D' \quad (6.162)$$

Poniżej, obie relacje (6.160) i (6.162) są wykorzystywane do wyznaczenia np. długości drogi przebytej przez cząstkę oraz jej sumarycznej wariancji.

6.4.7 Średnia po zespole statystycznym

Omówimy teraz dwie niezwykle ważne konsekwencje relacji skalowania (6.161). Mianowicie, odpowiemy na dwa pytania: 1) **Jak skaluje się z L średnia długość drogi jaką pokonuje cząsteczka w wyniku L przelotów?** 2) **Jak skaluje się z L średnia z kwadratu wypadkowego przemieszczenia cząsteczki w wyniku jej L przelotów?** Aby odpowiedzieć na te pytania należy najpierw określić z jakimi średnimi mamy tutaj do czynienia. W tym celu wprowadźmy **zespół statystyczny** złożony z ogromnej liczby L trajektorii (podobnych czyli stochastycznych replik), z których każda składa się z L przelotów. Mówiąc tutaj o średnich mamy na myśli średnie arytmetyczne po zespole statystyczny, które uzyskujemy w następujący sposób. Obliczamy w wyniku L przelotów, w przypadku 1), długość przebytej drogi, a przypadku 2) kwadrat wypadkowego przemieszczenia dla pierwszej trajektorii, potem dla drugiej, itd, wreszcie dla ostatniej trajektorii o numerze L i następnie obliczamy po prostu średnie arytmetyczne uzyskanych wyników. Istotnym tutaj jest to, że liczebność zespołu statystycznego trajektorii jest taka sama jak liczba przelotów z których składa się każda trajektoria. Zbudowaliśmy w ten sposób trzeci rodzaj średniej - wszystkie trzy są niezwykle przydatne w naszych rozważaniach.

Rozważmy przypadek 1), oznaczając przez $S(L)$ długość pojedynczej trajektorii cząsteczki; wspomnianą powyżej średnią możemy zapisać w postaci następującej relacji skalowania,

$$\begin{aligned} \langle S(L) \rangle_L &= \langle |x_1| \rangle_L + \langle |x_2| \rangle_L + \dots + \langle |x_L| \rangle_L \\ &= L \langle |x| \rangle_L \approx C_1 L^{1/\beta} \approx C'_1 |x_{max}|, \text{ dla } \beta < 1, \end{aligned} \quad (6.163)$$

przy czym skorzystaliśmy: a) z relacji skalowania (6.161) b) z definicji długości drogi $S(L) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_L|$, gdzie $|x_l|$, $l = 1, 2, \dots, L$, są długościami pojedynczych przelotów, będących oczywiście jakimiś potęgami współczynnika podobieństwa b , dalej z c) niemal oczywistej zależności $\langle |x_l| \rangle = \langle |x_{l'}| \rangle$, $l, l' = 1, 2, \dots, L$, (co pozwala na opuszczenie w tego typu średnich indeksu numerującego pojedynczy przelot) oraz z d) założenia, że średnia po zespole statystycznym o liczebności L z

dowolnej potęgi długości pojedynczego przelotu jest z dobrym przybliżeniem równa średniej z tej wielkości liczonej po dowolnie wybranej trajektorii składającej się z tej samej liczby L pojedynczych przelotów. Oczywiście, ze względu na nieuchronne fluktuacje, założenie to tym lepiej funkcjonuje im większa jest wartość L . To jest także powód dla którego oba typy średnich (pierwszego i trzeciego rodzaju) zostały oznaczone w taki sam sposób.

Rozważmy przypadek 2), oznaczając przez $X(L) = x_1 + x_2 + \dots + x_L$ wypadkowe przemieszczenie cząsteczki w wyniku L pojedynczych przelotów. W dalszym ciągu skorzystamy z założenia, że pojedyncze przeloty są statystycznie niezależne co prowadzi dla $n = 2$ (po skorzystaniu z wyrażenia (6.161)) do następującej relacji skalowania,

$$\langle [X(L)]^2 \rangle_L = L \langle |x|^2 \rangle_L \approx \begin{cases} C_2 L^{2/\beta} \approx C'_2 (x_{max})^2, & \text{dla } \beta < 2, \\ 2 D' L, & \text{dla } \beta > 2, \end{cases}$$

gdzie $X(L) = x_1 + x_2 + \dots + x_L$. Oba powyższe przykłady jeszcze raz wskazują na zasadniczą rolę jaką pełni wymiar samopodobieństwa β w przelotach Weierstrassa. Wreszcie, co jest może najistotniejsze, pokazują że za tymi relacjami skalowania kryje się jedno i to samo, **kluczowe zjawisko występowania rzadkich, ekstremalnych zdarzeń** otwierające nowe pole badań w dziedzinie fizyki statystycznej i jej zastosowań.

6.4.8 Rozkład Pareto-Lévy'ego

Udowodnimy teraz następujące, kluczowe

Twierdzenie Lévy'ego: Niech dana będzie funkcja postaci (6.138) dla sytuacji anormalnej ($\beta < 2$) wówczas,

$$p(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \sim \frac{1}{|x|^{d+\beta}}, \quad (6.164)$$

gdzie d jest wymiarem euklidesowym przestrzeni, w której zachodzą błędzenia; w dalszym ciągu rozważamy sytuację $d = 1$, co nie zmienia (w istocie) ogólności dowodu

Dowód jest trzyczęściowy a mianowicie dla trzech różnych zakresów β . Przytaczamy go tutaj w całości ze względu na jego centralne znaczenie dla naszego wykładu. Dla tych wszystkich zakresów naszym celem jest obliczenie transformaty Fouriera postaci,

$$p(x \rightarrow \pm\infty) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) \exp(-D'_f |k|^\beta). \quad (6.165)$$

Zauważmy, że do znalezienia *asymptotycznej* postaci $p(x)$ wystarczy skorzystać jedynie ze znajomości czynnika strukturalnego $\tilde{p}(k)$ dla $D'_f |k| \ll 1$; pozwala to na

formalne rozciągnięcie granic całkowania od plus do minus nieskończoności (czyli to co się dzieje daleko w przestrzeni odwrotnej nie ma istotnego wpływu na to co się dzieje daleko w przestrzeni prostej), ułatwiając znacznie przeprowadzenie obliczeń.

Część I: $\beta < 1$

Przekształcimy stopniowo prawą stronę wyjściowego wyrażenia (6.165)

$$\begin{aligned}
 p(x \rightarrow \pm\infty) &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \cos(k | x |) \exp(-D'_f | k |^\beta) \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{|x|} \int_0^\infty dk \left(\frac{d}{dk} \sin(k | x |) \right) \exp(-D'_f | k |^\beta) \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{D'_f \beta}{|x|} \int_0^\infty dk |k|^{\beta-1} \sin(k | x |) \exp(-|k|^\beta) \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{D'_f \beta}{|x|^{1+\beta}} \int_0^\infty dy y^{\beta-1} \sin(y) \exp\left(-D'_f \left(\frac{y}{|x|}\right)^\beta\right). \quad (6.166)
 \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć poszukiwaną, asymptotyczną postać $p(x)$ skorzystamy ze znanej relacji

$$\int_0^\infty dy y^{\beta-1} \sin(y) = \Gamma(\beta) \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right). \quad (6.167)$$

Zatem ostatecznie,

$$p(x \rightarrow \pm\infty) \approx \frac{1}{\pi} \frac{D'_f}{|x|^{1+\beta}} \Gamma(1+\beta) \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \quad (6.168)$$

przybierając tym samym postać Pareto-Lévy'ego.

Część II: $\beta = 1$

W tym marginalnym przypadku wyrażenie (6.165) przybiera prostszą postać,

$$p(x \rightarrow \pm\infty) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \exp(-ikx) \exp(-D'_f |k|). \quad (6.169)$$

Następnie, dzięki parzystości funkcji $\exp(-D'_f |k|)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 p(x \rightarrow \pm\infty) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \exp(-ikx) \exp(-D'_f |k|) \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \exp(ikx) \exp(-D'_f |k|) \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{D'_f}{(D'_f)^2 + x^2} \approx \frac{1}{\pi} \frac{D'_f}{x^2}, \text{ dla } |x| \gg (D'_f)^{1/2}. \quad (6.170)
 \end{aligned}$$

W tym przypadku, jak widać, rozkład $p(x)$ przybiera asymptotycznie postać Lorentzianu tożsamą z rozkładem Pareto-Lévy'ego.

Część III: $1 < \beta < 2$

Podobnie jak w poprzednich dwóch przypadkach, można zapisać

$$p(x \rightarrow \pm\infty) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \cos(k |x|) \exp(-D'_f |k|^\beta). \quad (6.171)$$

W dalszym ciągu, po zamianie zmiennych, otrzymujemy

$$p(x \rightarrow \pm\infty) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \cos(y) \exp(-D'_f v y^\beta), \quad (6.172)$$

gdzie podstawiliśmy $y = |x| k$ oraz $v = |x|^{-\beta}$; zauważmy, $D'_f v$ jest wielkością małą umożliwiającą rozwijanie w szereg Taylora. Mianowicie,

$$\begin{aligned} p(x \rightarrow \pm\infty) &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \exp(-D'_f v y) \cos(y) \exp(-D'_f v (y^\beta - y)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \exp(-D'_f v y) \cos(y) [1 - D'_f v (y^\beta - y) \\ &\quad + \frac{1}{2} (D'_f v)^2 (y^\beta - y)^2 + \dots]; \end{aligned} \quad (6.173)$$

w dalszym ciągu skorzystamy z zależności

$$\int_0^\infty dy \exp(-D'_f v y) \cos(y) y^{\nu-1} = \frac{\Gamma(\nu)}{((D'_f v)^2 + 1)^{\nu/2}} \cos\left(\nu \arctan\left(\frac{1}{D'_f v}\right)\right),$$

dla $\nu \geq 1$, (6.174)

która pozwala wyrazić rozkład $p(x)$ w następującej postaci asymptotycznej

$$\begin{aligned} p(x \rightarrow \pm\infty) &\approx -\frac{1}{\pi} \frac{1}{|x|} \left[\frac{D'_f v \Gamma(1+\beta)}{((D'_f v)^2 + 1)^{(1+\beta/2)}} \cos\left((1+\beta)\frac{\pi}{2}\right) + \vartheta((D'_f v)^2) \right] \\ &\approx \frac{1}{\pi} \frac{D'_f}{|x|^{1+\beta}} \Gamma(1+\beta) \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right), \end{aligned} \quad (6.175)$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy także z równoważnej postaci

$$\int_0^\infty dy \exp(-D'_f v y) \cos(y) = \frac{D'_f v}{(D'_f v)^2 + 1}, \quad \text{dla } \nu = 1, \quad (6.176)$$

oraz z przybliżenia $\arctan(z \rightarrow \infty) \approx \pi/2$. W podsumowaniu tego twierdzenia zauważmy, że dla wszystkich zakresów β (sytuacją marginalną dla $\beta = 2$ zajmujemy się w dalszej części) otrzymaliśmy w końcu identyczną asymptotyczną postać rozkładu $p(x)$; uzyskaliśmy także coś więcej wykazując nie tylko, że $p(x)$ przybiera postać Pareto-Lévy'ego w granicy dużych wartości $|x|$ ale także znajdując wyrażenia na współczynnik przedwykładniczy co ma znaczenie wtedy gdy np. porównujemy przewidywania teoretyczne z danymi doświadczalnymi.

6.5 Multifraktalne błędzenie w czasie ciągłym na gaussowskim amorficznym substracie

Nasze podejście składa się z dwóch etapów. W pierwszym (podrozdz. 6.5.1), ze względów dydaktycznych i rachunkowych, analizujemy funkcję rozdziału czasów wyczekiwania wskazując na jej nietermodynamiczny charakter. W drugim etapie (podrozdz. 6.5.2) proponujemy prostą liniową transformację tej funkcji rozdziału pozwalającą już na pełną charakterystykę multifraktalną i termodynamiczną częstościowej (dynamicznej) części błędzenia losowego w czasie ciągłym na gaussowskim amorficznym substracie - nazwa ta została usprawiedliwiona poniżej. Dodajmy, że nie tylko substraty wykładnicze ale także i gaussowskie używane są do modelowania materiałów szklistych.

6.5.1 Nietermodynamiczna multifraktalność - pouczający przykład

Przypuśćmy, że mamy do czynienia tylko z nieporządkiem wywołanym przez losowe lokalne minima energii potencjalnej substratu; niech energie te będą losowane z "wąskiego" rozkładu Gaussa

$$\rho(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}})^2}{2\sigma^2}\right). \quad (6.177)$$

gdzie $\sigma \ll \bar{\mathcal{E}}$ oraz z dobrym przybliżeniem⁶ $0 \leq \mathcal{E} \leq 2\bar{\mathcal{E}}$ zatem,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) \approx \int_0^{2\bar{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) \approx 1. \quad (6.178)$$

Stąd, rozkład wykładniczy (6.53) występujący w uśrednionej funkcji rozkładu czasów wyczekiwania (6.60) należy zastąpić przez powyższy (6.177). Wówczas, wyrażenie (6.62) przechodzi w następującą superstatystykę

$$\phi(t) = \int_0^{2\bar{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}})^2}{2\sigma^2}\right) \phi_{\mathcal{E}}(t) \quad (6.179)$$

gdzie

$$\phi_{\mathcal{E}}(t) = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) \exp\left(-\gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) t\right) = \gamma_0 \gamma^{\mathcal{E}/\sigma} \exp\left(-\gamma_0 \gamma^{\mathcal{E}/\sigma} t\right). \quad (6.180)$$

przy czym skorzystaliśmy z oznaczenia (6.57) kładąc $\Delta = \sigma$.

⁶Przybliżenie to skutkuje, jak zobaczymy, wpływem skończonego rozmiaru substratu (ang. *finite size effect*), tzn. skończonego zakresu głębokości pułapek na wynik. Wpływ ten zostanie przez nas krótko omówiony w następnym paragrafie.

Naszym wyjściowym zadaniem jest obliczenie momentu $\langle t^{q-1} \rangle$ rzędu q , gdzie q jest (na razie) dowolną liczbą rzeczywistą; wykorzystamy w tym celu powyższe wyrażenie (6.179). Zatem,

$$\langle t^{q-1} \rangle = \int_0^{2\bar{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) \langle t^{q-1} \rangle_{\mathcal{E}}, \quad (6.181)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \langle t^{q-1} \rangle_{\mathcal{E}} &= \int_0^{\infty} dt t^{q-1} \phi_{\mathcal{E}}(t) = \Gamma_{Euler}(q) \cdot \left[\gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) \right]^{-(q-1)} \\ &= \Gamma_{Euler}(q) \cdot \left(\gamma_0 \gamma^{\mathcal{E}/\sigma} \right)^{-(q-1)}, \end{aligned} \quad (6.182)$$

przy czym $\Gamma_{Euler}(q)$ jest funkcją gamma Eulera zdefiniowaną (przypomnijmy) następująco

$$\Gamma_{Euler}(q) = \int_0^{\infty} dy y^{q-1} \exp(-y), \quad (6.183)$$

czyli można przyjąć⁷, że $q > 0$.

Zauważmy, że

$$Z_q \propto \langle t^{q-1} \rangle = \int_0^{\infty} dt t^{q-1} \phi(t), \quad (6.184)$$

tzn. moment rzędu $q - 1$ można traktować, przynajmniej formalnie, jako funkcję rozdziału (ang. *partition function*) tutaj czasów wyczekiwania.

Podstawiając wyrażenie (6.182) do (6.181), otrzymujemy

$$Z_q = \frac{\langle (\gamma_0 t)^{q-1} \rangle}{\Gamma_{Euler}(q)} = \int_0^{2\bar{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{(q-1)\frac{\mathcal{E}}{\sigma}} = \int_0^{2\bar{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} \exp(G(\mathcal{E})), \quad (6.185)$$

oraz

$$G(\mathcal{E}) = -\frac{(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}})^2}{2\sigma^2} + (q-1)\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2); \quad (6.186)$$

funkcję $G(\mathcal{E})$ można łatwo przekształcić do wygodniejszej postaci:

$$\begin{aligned} G(\mathcal{E}) &= -\frac{1}{2\sigma^2}(\mathcal{E} - \mathcal{E}^*)^2 - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \\ &+ (q-1)\frac{\bar{\mathcal{E}}}{k_B \mathcal{T}} + \frac{1}{2}(q-1)^2 \left(\frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.187)$$

⁷W ogólności, zachodzi relacja $\Gamma(q) = \frac{\pi}{\Gamma(1-q)\sin(\pi q)}$ dająca osobliwości w $q = -n$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Chcąc uniknąć tych osobliwości, przyjęliśmy powyższe ograniczenie na q .

gdzie

$$\sigma \ll \mathcal{E}^* = \bar{\mathcal{E}} + (q-1) \frac{\sigma^2}{k_B \mathcal{T}} \leq 2\bar{\mathcal{E}}, \quad (6.188)$$

tzn. założyliśmy, że całka gaussowska w drugiej równości w (6.185) ma ostre maksimum w $\mathcal{E}^*$. Rzecz jasna, nierówności (6.188) nakładają ograniczenia na wykładnik potęgi q

$$\frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma} \left(1 - \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma}\right) \ll (q-1) \leq \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} \cdot \frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma}. \quad (6.189)$$

Ponieważ występująca w wyrażeniu (6.185) całka gaussowska jest (z dobrym przybliżeniem) równa 1, więc ostatecznie wyrażenie (6.185) sprowadza się do poszukiwanej przez nas postaci wieloskalowej,

$$Z_q = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\tau(q)}, \quad (6.190)$$

przy czym globalny wykładnik wieloskalowy⁸ (ang. *global multiscaling exponent*),

$$\tau(q) = (q-1)D(q) = q\eta(q) - f(\eta(q)) \leq \frac{3}{2} \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma}\right)^2 \frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma}, \quad (6.191)$$

gdzie

$$D(q) = \frac{(q-1)}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} \quad (6.192)$$

to tzw. wymiary Renyi'ego, będące tutaj liniową funkcją $q-1$. Ponadto, wprowadziliśmy kluczowe dla naszych rozważań wielkości

$$\begin{aligned} \eta(q) &= (q-1) \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma}, \\ f(\eta(q)) &= \frac{q^2}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma} \left(\eta(q) - \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} + \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} \right)^2 + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}}. \end{aligned} \quad (6.193)$$

Trzeba podkreślić, że $f(\eta)$ jest tutaj wypukłą a nie wklęsłą funkcją η (jest parabolą o ramionach skierowanych ku górze). Taki kształt wyklucza jej związek z formalizmem termodynamiki. Ten związek zostanie znaleziony dopiero w rozdz. 6.5.2, po dokonaniu transformacji zmiennej q , tzn. po przejściu do funkcji rozdziału odwrotności czasów oczekiwania czyli częstości.

⁸Dokładniej rzecz biorąc, jest to rodzina globalnych wykładników wieloskalowych indeksowana wartościami q .

Druga równość w 6.191 wprowadziła transformację Legendre’a, stosowaną już wcześniej w rozdz. 5.4.4), łączącą globalny wykładnik wieloskalowy $\tau(q)$ z widmem osobliwości (singularności⁹ ang. *spectrum of singularities*) $f(\eta(q))$ oraz (jak trzeba)

$$\begin{aligned}\frac{d\tau(q)}{dq} &= \eta, \\ \frac{df(\eta)}{d\eta} &= q.\end{aligned}\tag{6.194}$$

Dodajmy, że wielkość η jest często nazywana lokalnym wykładnikiem skalowania (ang. *local scaling exponent*).

Należy podkreślić, że zarówno $\tau(q)$ jak też widmo lokalnych wymiarów fraktalnych $f(\eta(q))$ niosą identyczną informację o układzie, gdyż są powiązane transformacją Legendre’a. Zaletą używania widma $f(\eta(q))$ jest jego prosta ”fizyczna” interpretacja mówiąca o tym jak skaluje się gęstość stanów $\rho(\eta)$. Mianowicie, korzystając z (6.177) i (6.193) otrzymujemy

$$\rho(\sigma\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{-f(\eta)}.\tag{6.195}$$

Innymi słowy, widmo f pełni rolę wykładnika fraktalnego skalującego gęstość miary zbioru punktów posiadających wspólną cechę (tutaj identyczny lokalny wymiar fraktalny) η .

Korzystając z (6.195) można wyrazić (6.190) w postaci usprawiedliwiającej traktowanie η właśnie jako lokalnego (cząstkowego) wykładnika skalującego

$$Z_q \approx \rho(\sigma\eta) \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q\eta(q)}.\tag{6.196}$$

Bardziej pogłębionej, mikroskopowej analizy tego wykładnika nie będziemy już tutaj prowadzić koncentrując się głównie na analizie związku multifraktalności z formalizmem termodynamicznym.

Należy podkreślić, że przedstawione w niniejszym podrozdziale rozważania dotyczące multifraktalności wskazują, że jest ona tutaj obecna. Jednakże podejście to jest niewystarczające do pokazania jej związku z formalizmem termodynamicznym. Taki związek podajemy poniżej w rozdz. 6.5.2 poprzez wprowadzenie funkcji rozdziału częstości.

6.5.2 Termodynamiczna funkcja rozdziału a multifraktalność

Aby powiązać multifraktalność z formalizmem termodynamicznym należy dokonać prostej liniowej transformacji zmiennej niezależnej q , mianowicie

$$\tilde{q} = 2 - q, \quad \tilde{q} < 2.\tag{6.197}$$

⁹Zwane jest ono także ’widmem lokalnych wymiarów’ (ang. *spectrum of local dimensions*).

Prowadzi to do następującej postaci funkcji rozdziału

$$\tilde{Z}_{\tilde{q}} = \frac{\langle \left(\frac{1}{\gamma_0 t}\right)^{\tilde{q}-1} \rangle}{\Gamma_{Euler}(2 - \tilde{q})} = \gamma^{\tilde{\tau}(\tilde{q})}, \quad (6.198)$$

gdzie

$$\tilde{\tau}(\tilde{q}) = -\tau(2 - \tilde{q}). \quad (6.199)$$

W wyrażeniu (6.198) przeszliśmy od skalowania czasu do skalowania częstości (odwrotności czasu). Co więcej, przetransformowana funkcja rozdziału jest (jak trzeba) unormowana, tzn. spełniającą równość $\tilde{Z}_{\tilde{q}=1} = 1$, gdyż $\tilde{\tau}(\tilde{q} = 1) = 0$ (patrz wyrażenie (6.200) poniżej).

Dzięki transformacji (6.197) oraz (6.199) wymiary Renyi'ego

$$\tilde{D}(\tilde{q}) = \frac{\tilde{\tau}(\tilde{q})}{\tilde{q} - 1} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} - \frac{\tilde{q}}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} \quad (6.200)$$

gdzie ma miejsce ograniczenie na zakres zmiennej $\tilde{q}$

$$1 - \frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma} \cdot \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} \leq \tilde{q} \ll 1 + \frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma} \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} - \frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma}, \quad (6.201)$$

przy czym zakładamy, że $\frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma} > 1$. Zauważmy, że $\tilde{D}(\tilde{q})$ jest liniowo malejącą funkcją $\tilde{q}$ zatem, jest w stanie opisać jedynie centralną, prostoliniową (z dobrym przybliżeniem) część wykresu wykładników Renyi'ego - pełniejszy jego przebieg przedstawiono na rysunku (5.6) w rozdz. 5.4.

Dysponując teraz przetransformowanym globalnym wykładnikiem wieloskalowym, możemy wyprowadzić zarówno przetransformowany lokalny wykładnik skalowania $\tilde{\eta}(\tilde{q})$ jak też przetransformowane widmo lokalnych wymiarów $\tilde{f}(\tilde{\eta})$. Mianowicie,

$$\tilde{\tau}(\tilde{q}) = (\tilde{q} - 1) \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} - \frac{\tilde{q}}{2} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} \right) = \tilde{q} \tilde{\eta}(\tilde{q}) - \tilde{f}(\tilde{\eta}(\tilde{q})), \quad (6.202)$$

gdzie $\tilde{\eta}(\tilde{q}) = -\eta(1 - \tilde{q})$, $\tilde{f}(\tilde{\eta}(\tilde{q})) = -f(\tilde{\eta})$ i mają miejsce następujące ograniczenia

$$\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} - \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} \leq \tilde{\eta}(\tilde{q}) = \frac{d\tilde{\tau}(\tilde{q})}{d\tilde{q}} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} + \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} - \tilde{q} \frac{\sigma}{k_B \mathcal{T}} \leq 2 \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} \quad \text{oraz} \quad \tilde{\eta}(\tilde{q}) \gg 1; \quad (6.203)$$

ponadto,

$$\tilde{f}(\tilde{\eta}(\tilde{q})) = -\frac{1}{2} \frac{k_B \mathcal{T}}{\sigma} \left(\tilde{\eta}(\tilde{q}) - \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} \right)^2 + \tilde{\eta}(\tilde{q}), \quad (6.204)$$

przy czym zachodzi (jak trzeba)

$$\frac{df(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}} = \tilde{q}. \quad (6.205)$$

Jak widać, transformacja od wielkości bez falki do odpowiadających im oznaczonej falką jest liniowa. Oczywiście, ograniczenia (6.203) zubożają multifraktalność zawężając jej dziedzinę, ale mimo tego multifraktalność jest tutaj wyraźnie widoczna, co pokazujemy poniżej, m.in. na rysunku 6.13.

Warto jeszcze podać następujące, przydatne własności wymiarów fraktalnych Renyi'ego, a mianowicie:

- a) $\tilde{D}(\tilde{q}) = \frac{1}{2}\tilde{\eta}(\tilde{q}) + \frac{1}{2}\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma}$
- b) $\tilde{D}(2\tilde{q}) = \tilde{\eta}(\tilde{q}) + \tilde{D}'(\tilde{q}) = \tilde{\eta}(\tilde{q}) - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{k_B\mathcal{T}}$, gdzie $\tilde{D}'$ oznacza pochodną po $\tilde{q}$
- c) jeśli $\tilde{q}_1 \geq \tilde{q}_2$ to $\tilde{D}(\tilde{q}_1) \leq \tilde{D}(\tilde{q}_2)$
- d) w zakresach określonych przez nierówności (6.201) wymiary Renyi'ego $\tilde{D}(\tilde{q}) > 0$.

Stąd, w ważnych szczególnych przypadkach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{D}\left(\tilde{q} = 1 - \frac{k_B\mathcal{T}}{\sigma} \cdot \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma}\right) &= \frac{3}{2}\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} \\ \tilde{D}(\tilde{q} = 0) &= \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{k_B\mathcal{T}} \\ \tilde{D}(\tilde{q} = 1) &= \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} \\ \tilde{D}(\tilde{q} = 2) &= \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{k_B\mathcal{T}} \\ \tilde{D}\left(\tilde{q} = 1 + \frac{k_B\mathcal{T}}{\sigma} \cdot \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} - \frac{k_B\mathcal{T}}{\sigma}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.206)$$

W dalszym ciągu **naszym celem jest analiza widma osobliwości** danego wzorem (6.204). Podkreślmy, że parametrami charakteryzującymi widmo (a także pozostałe dwie funkcje $\tilde{\tau}(\tilde{q})$ oraz $\tilde{\eta}(\tilde{q})$) są wielkości bezwymiarowe $\frac{k_B\mathcal{T}}{\sigma}$ oraz $\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\sigma}$, co pozwala uniknąć efektu rozmiarowego (ang. *finite size effect*). Po prostu, zwiększając rozmiar układu (czyli średnią głębokość minimów potencjału $\bar{\mathcal{E}}$) należy proporcjonalnie do tego zmieniać σ a stąd także $k_B\mathcal{T}$ tak, aby zachować niezmiennymi wartości wspomnianych parametrów bezwymiarowych.

Analiza widma osobliwości

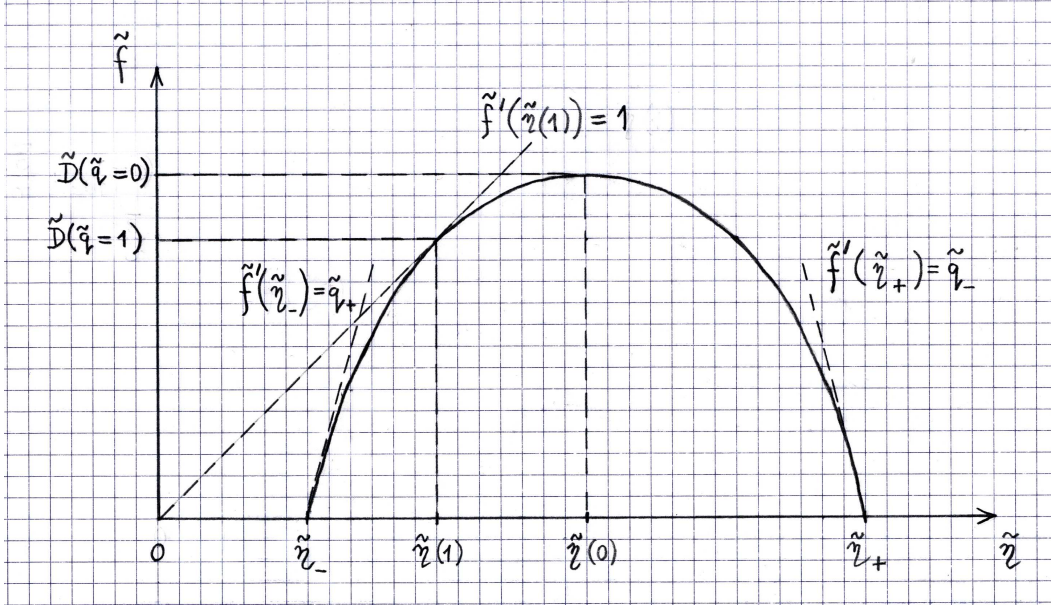
Po przeprowadzeniu prostych algebraicznych przekształceń otrzymujemy własności wykorzystane także przy konstrukcji wykresu na rysunku 6.13,

- 1) lokalny wykładnik skalowania $\tilde{\eta}(\tilde{q}) = \tilde{D}(\tilde{q}) + (\tilde{q} - 1)\tilde{D}'(\tilde{q})$
- 2) korzystając z powyższego oraz z transformacji Legendre'a (druga równość w (6.202)) można widmo singularności wyrazić następująco $\tilde{f}(\tilde{\eta}(\tilde{q})) = \tilde{D}(\tilde{q}) + \tilde{q}(\tilde{q} - 1)\tilde{D}'(\tilde{q})$
- 3) widmo singularności osiąga maksimum dla $\tilde{\eta}(\tilde{q} = 0) = \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma} + \frac{\sigma}{k_B T}$, tzn. zachodzi $\tilde{f}(\tilde{\eta}(\tilde{q} = 0)) = \tilde{D}(\tilde{q} = 0) = \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{k_B T}$,
- 4) dla $\tilde{\eta}(\tilde{q} = 1)$ widmo singularności $\tilde{f}(\tilde{\eta}(\tilde{q} = 1) = \tilde{\eta}(\tilde{q} = 1)) = D(\tilde{q} = 1) = \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma}$ a ponadto, $\frac{d\tilde{f}(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}}|_{\tilde{\eta}(\tilde{q}=1)} = 1$,
- 5) widmo singularności ma dwa różne pierwiastki $\tilde{\eta}_{\mp} = \tilde{\eta}(\tilde{q} = \tilde{q}_{\pm}) = \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma} + \frac{\sigma}{k_B T} \mp \frac{\sigma}{k_B T} \sqrt{1 + 2\frac{k_B T}{\sigma} \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma}}$, gdzie $\tilde{q}_{\pm} = \pm \sqrt{1 + 2\frac{k_B T}{\sigma} \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma}}$; stąd, rozpiętość widma osobliwości $\Delta = \tilde{\eta}_+ - \tilde{\eta}_- = \tilde{\eta}(\tilde{q}_-) - \tilde{\eta}(\tilde{q}_+) = 2\sqrt{1 + 2\frac{k_B T}{\sigma} \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma}}$. Skrajne wymiary Renyi'ego $\tilde{D}(\tilde{q}_+)$ oraz $\tilde{D}(\tilde{q}_-)$ określają granice obszaru skalowania $\tilde{Z}(\tilde{q})$, definiując zarazem rozpiętość widma osobliwości.
- 6) pochodne widma singularności w punktach skrajnych $0 \leq \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{\eta}}|_{\tilde{\eta}_-} = \tilde{q}_+ \leq +\infty$ oraz $-\infty \leq \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{\eta}}|_{\tilde{\eta}_+} = \tilde{q}_- \leq 0$ nie osiągają, jak widać, wartości, odpowiednio, $\pm\infty$ a ponadto, na mocy własności b) z poprzedniego paragrafu, $\tilde{D}(2\tilde{q}_{\pm}) = \tilde{\eta}_{\mp} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{k_B T}$.

Rysunek 6.13 przedstawia schematyczny przebieg zależności (6.204) z naniesionymi charakterystycznymi punktami (porównaj z rysunkiem 5.5). Dla uproszczenia $\tilde{f}$, $\tilde{\eta}$ oraz $\tilde{D}(\tilde{q})$ (a stąd, oczywiście, $\tilde{\tau}$) zostały podzielone przez przykładowy użyteczny czynnik skalujący $\frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma}$ przy czym oznaczenia (dla prostoty) pozostały niezmienione; dodajmy, że w takim przypadku γ została podniesiona do potęgi równej wspomnianemu czynnikowi.

Związek multifraktalności z termodynamiką dla konkretnych wielkości

W analogii do rozważań przeprowadzonych w rozdz. 5.4.4, możemy podać tabelę odpowiedniości pomiędzy wielkościami multifraktalnymi i termodynamicznymi, analogiczną do tabeli 5.2. Jak widać, w tabeli 6.2 przedstawiliśmy konkretne postaci wielkości multifraktalnych dotyczących rozważanego tutaj multifraktalnego błędzenia losowego w czasie ciągłym na substracie gaussowskim. Na szczególną uwagę zasługuje uzyskana, stosunkowo wolna, paraboliczna zależność ciepła właściwego



Rysunek 6.13: Schematyczny wykres widma osobliwości. Zasadnicze wielkości charakteryzujące analizowaną multifraktalność zostały (dla wygody) podzielone przez użyteczny czynnik skalujący $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ i zebrane w tabeli 6.2 - oznaczenia (dla prostoty) pozostały niezmiennione. Dokładniej rzecz biorąc, $\tilde{f}(\tilde{q})$, $\tilde{\eta}(\tilde{q})$ oraz $\tilde{D}(\tilde{q})$ (a stąd, oczywiście, $\tilde{\tau}(\tilde{q})$) zostały podzielone przez wspomniany czynnik; w takim przypadku, γ uległa zmianie przybierając wygodniejszą, obecną we wzorze (6.56) postać charakteryzującą prawo Hopfa-Arrheniusa lub prawo Vogela-Tammanna-Fulchera, tzn. $\gamma = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$, czyli została podniesiona do potęgi równej wspomnianemu czynnikowi). Stąd, np. wartość maksimum widma wynosi $\tilde{D}(\tilde{q}=0) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\sigma}{k_B T}$, tylko nienacznie przekraczając 1 (przypominamy, że gęstość rozkładu prawdopodobieństwa może być większa od 1). Ponadto, widać, że pochodne $|\tilde{f}'(\tilde{q}_{\mp})| = |\tilde{q}_{\pm}| < \infty$ ze względu na paraboliczny kształt widma osobliwości, chociaż często nieparaboliczne widmo osobliwości charakteryzuje się nieskończonymi wartościami tych pochodnych.

Tabela 6.2: Przyporządkowanie charakterystyk multifrakalnych wielkościom termodynamicznym

Multifraktal	Termodynamika
$\tilde{q}$	β
$\frac{\mathcal{E}}{k_B T}$	V
$\tilde{\eta}(\tilde{q}) = 1 + \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \frac{\sigma}{k_B T} - \tilde{q} \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \frac{\sigma}{k_B T}$	$\frac{U(\beta)}{V}$
$\tilde{\tau}(\tilde{q}) = (\tilde{q} - 1) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \frac{\sigma}{k_B T} - \frac{\tilde{q}}{2} \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \frac{\sigma}{k_B T} \right)$	$\frac{\beta F(\beta)}{V}$
$\tilde{f}(\tilde{\eta}(\tilde{q})) = -\frac{1}{2} \frac{k_B T}{\sigma} \frac{\sigma}{\mathcal{E}} (\tilde{\eta} - 1)^2 + \tilde{\eta}$	$\frac{S(\beta)}{V}$
$c_{\mathcal{E}/k_B T}(\tilde{q}) = -\tilde{q}^2 \frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{q}} = \tilde{q}^2 \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \frac{\sigma}{k_B T}$	$c_V(\beta)$

od odwrotności temperatury $\tilde{q}$. Zauważmy, że mamy tutaj do czynienia z dwoma temperaturami, tzn. $k_B T$ oraz $\frac{1}{\tilde{q}}$. Pierwsza wchodzi do formalizmu tylko jako ustalony parametr zewnętrzny, natomiast druga pełni rolę faktycznej temperatury multifraktalnej. Wspomniana paraboliczna zależność jest analogiczna do zależności ciepła właściwego od temperatury, np. dla paramagnetyka (patrz Krzysztof Rejmer: *Wprowadzenie do termodynamiki*, Wydawnictwo ... , Poznań 2013) czy też dla ciał amorficznych składających się z niezależnych, niskoenergetycznych podukładów dwupoziomowych (patrz Charles Kittel: *Wstęp do fizyki ciała stałego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999, tłum. z ang.).

Część IV

CTRW a dyfuzja fraktalna

Rozdział 7

Wybrane elementy CTRW

In the present work we match the biased Hierarchical Continuous-Time Random Flight (HCTRF) on a regular lattice (based on hierarchical waiting-time distribution) and the statistical Extreme Value Theory (EVT). This approach extends the understanding of the anomalous transport and diffusion (for example, found in some amorphous, vitreous solids as well as in conducting and light-emitting organic polymers). Both independent approaches were developed in terms of random-trap or valley model where the disorder of energy landscape is exponentially distributed while the corresponding mean residence times in traps obey the power-law. This type of disorder characterizes several amorphous (even used commercially) materials which makes it possible to apply the HCTRF formalism. By using the EVT we additionally show that the rare (stochastic) events are indeed responsible for the transport and diffusion in these materials.

7.1 Introduction and motivation

The variety of observed relaxation phenomena in condensed and soft matter are related to transport and/or diffusion of atoms, particles, carriers, defects, excitons and complexes [1] (and refs. therein). In fact, the transport and diffusion are regarded as a paradigm of irreversible behaviour of many ordered and disordered systems. A universal feature of a disordered system is the temporal complex pattern, where the Debye-relaxation is no longer obeyed. The sentence which we quote after Scher and Montroll [2] characterizes well the straightforward link between physics of anomalous transient-time dispersion in an amorphous substance and its application. *The development of modern photocopying machines has motivated experimental work on amorphous materials, some of which display anomalous transport properties.*

The theory of carrier transport in some amorphous insulators (such as the commercially used vitreous As_2Se_3) and in some amorphous charge-transfer complexes of organic polymers (as the commercially used trinitrofluorenone mixed with polyvinylcarbazole, TNF-PVK) provides canonical examples of

- (i) continuous-time random flights and walks, and
- (ii) broad- or long-tailed waiting-time distribution between steps.

More precisely, the generic description of the dispersive transport and diffusion [3] found in the canonical experiments on transient current in an amorphous medium (induced by flash-light [4, 5, 6, 2, 7] or voltage pulse [9] and refs. therein) is given indeed by the Hierarchical Continuous-Time Random Flight formalism¹ [10, 11, 12, 13, 14]. The principal aim of my lecture is to express this description in terms of the Extreme Value Theory (EVT) [1, 2, 3]. Such an approach shows that rare (stochastic) events are indeed responsible for the transport and diffusion in these materials.

The paper consists of two parts. The first part (Sec.7.2) includes remarks considering the basic elements of HCTRF and particularly, the averaged over disorder, hierarchical waiting-time distribution and its scale-invariance as the main property. In the second part (Sec.8.3) we develop the EVT in the context of the random-trap or valley model where disorder is due to the energetic depth of the traps (which are exponentially distributed) and by the corresponding mean residence times (which obey then the power-law).

7.2 Basic elements of the biased Hierarchical Continuous-Time Random Flight

The most spread models describing transport and diffusion in disordered substrates are based on the Continuous-Time Random Walk formalism. The major simplification in these models is that the disordered energetic landscape of the substrate can be described by an exponential distribution and incorporated into a regular lattice. In this work we consider single particle random instantaneous hops (flights) between regularly displaced valleys which have, however, different depths; the mountain peaks have all at the same energy level when a bias is absent (which justifies the name of the model), cf. Fig7.1

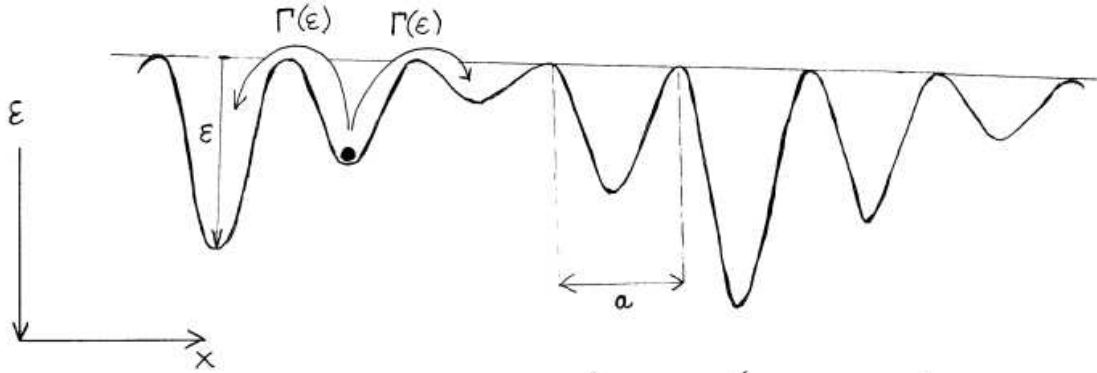
In the case when biased (constant) force F is present the potential is simply modified as it is shown in Fig.7.2.

Waiting-time distribution. The pausing or residence time t in a given trap (between the successive hops) is a stochastic variable whose statistics is defined by the normalized waiting-time distribution $\psi_\varepsilon(t)$. This basic quantity here is the sharp probability density that the particle will perform its next hop exactly at time t after having waited until this instant in a trap of depth ε . The simplest but realistic example is provided by the exponential waiting-time distribution of a local in space

¹We distinguish between particle flights and walks as the former are instantaneous while the latter ones need some time to move between the traps.

Random-trap or valley model

- $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0 \cdot \exp(-\varepsilon/k_B T)$



- $g(\varepsilon) = \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \cdot \exp(-\varepsilon/\langle \varepsilon \rangle)$

Rysunek 7.1: Schematic representation of the valley or random-trap model when bias is absent. All valleys are equally spaced, but have different depths. The mountain peaks are all the same energy.

Poisson process

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\tau(\varepsilon)} \exp\left(-\frac{t}{\tau(\varepsilon)}\right) \quad (7.1)$$

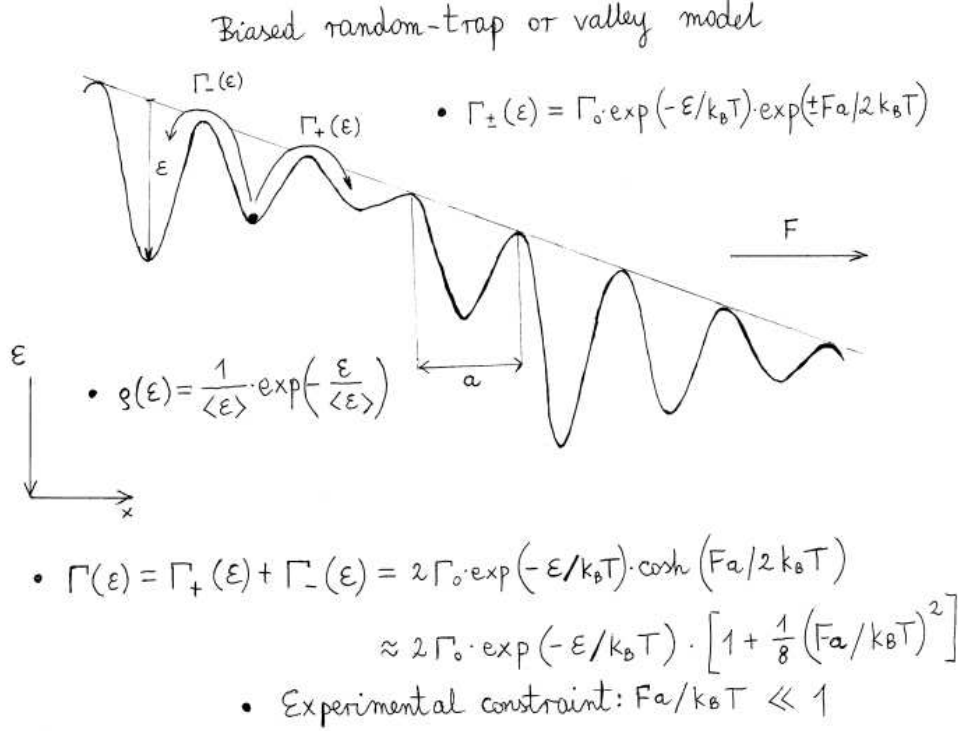
where the factor $1/\tau(\varepsilon)$ is the probability density per unit time or rate of transition to a neighbouring site; the second factor is the probability that no hop has occurred until time t .

As we consider here only thermally activated over-barrier hops in the presence of a constant external bias, we can use asymmetric transition rates in the form

$$\Gamma_\pm(\varepsilon) = \Gamma_0 \cdot \exp\left(-\beta' \cdot \left(\varepsilon \mp \frac{1}{2}Fa\right)\right), \quad (7.2)$$

where

$$\beta' = \begin{cases} (k_B T)^{-1}, & \text{for the Hopf-Arrhenius (HA) law} \\ (k_B \Theta)^{-1}, & \text{for the Vogel-Tamm-Vulcher (VTF) law} \end{cases} \quad (7.3)$$



Rysunek 7.2: Schematic representation of the valley model shown in Fig.7.1 when biased, constant force F is present. All mountain peaks are now displaced along a tangent straight line.

where k_B is the Boltzmann constant, T is the absolute temperature, and $\Theta = T - T_g > 0$, where T_g is the transition temperature to the glass phase. Note that in expression (7.2) the external force is denoted by F , the lattice constant by a and Γ_+ is the transition rate along the direction of external force while Γ_- is the one in the opposite direction. Hence, the approximate equality (in the second line) in expression

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(\varepsilon)} &= \Gamma_-(\varepsilon) + \Gamma_+(\varepsilon) = 2\Gamma_0 \cdot \exp(-\beta'\varepsilon) \cosh(\beta'Fa) \\ &\approx 2\Gamma_0 \cdot \exp(-\beta'\varepsilon) \left[1 + \frac{1}{8}(\beta'Fa)^2\right], \end{aligned} \quad (7.4)$$

gives the second-order effect in the applied field, i.e. quadratically depends on the small quantity $\beta'Fa$. Fortunately, in all our discussions we have $\beta'Fa \ll 1$ as this is an obvious experimental constraint justifying the restriction only to the first-order effect in the applied field in all our considerations.

Sojourn probability. It is useful to introduce the sojourn probability $\Psi_\varepsilon(t)$ that the particle remains at a lattice site at least until time t without any hop; and is

defined by using the waiting-time distribution

$$\Psi_\varepsilon(t) = \int_t^\infty dt' \psi_\varepsilon(t') \quad (7.5)$$

which in the case of a local Poisson process described by (7.1) assumes the simple exponential form

$$\Psi_\varepsilon(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau(\varepsilon)}\right). \quad (7.6)$$

In our model the averaging of this distribution over disorder is required to calculate the full propagator. How to perform this averaging is the essential problem considered below.

The structure factor of the biased random walk. Before we calculate the propagator we need to define the structure factor of the biased random walk. This definition requires the knowledge of the (stationary) spatial (single-hop) transition probabilities, $p_\pm$, along and against the applied force, respectively, and includes here (for simplicity) the transitions only to the nearest-neighbours. Then

$$p_\pm = \frac{\Gamma_\pm(\varepsilon)}{\Gamma_-(\varepsilon) + \Gamma_+(\varepsilon)} \approx \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2} \beta' F a\right), \quad (7.7)$$

and the corresponding spatial probability density

$$p(x) = p_+ \delta(x - a) + p_- \delta(x + a). \quad (7.8)$$

Hence, the structure factor of the biased random walk is defined as the Fourier transform of $p(x)$

$$\tilde{p}(k) = \cos(ak) - i \cdot (p_+ - p_-) \sin(ak) \approx \cos(ak) - \frac{i}{2} \beta' F a \cdot \sin(ak); \quad (7.9)$$

here again only the first-order effect in the applied field was taken into account.

The propagator. The waiting-time distribution and sojourn probability averaged over disorder are, together with the structure factor, the relevant quantities to construct the full propagator considered in this paragraph.

The motion of the particle consists of a sequence of alternative events defined by the waiting in a given trap and next the hop to the neighbouring one. Correspondingly, the propagator consists of an unrestricted superposition of the n -step partial propagators

$$P_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon}(X, t) = P_{\varepsilon=\varepsilon_0}(X, t; n=0) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon}(X, t; n) \quad (7.10)$$

where the multi-step propagators (defined as the probability density of finding a particle at position X at time t within n steps over a sequence of traps which have

depths $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon$) can be expressed as follows,

$$\begin{aligned}
P_{\varepsilon_0=\varepsilon}(X, t; n=0) &= \delta(X) \cdot \Psi_{\varepsilon_0=\varepsilon}(t), \\
P_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon}(X, t; n) &= \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \\
&\psi_{\varepsilon_0}(x_1, t_1) \psi_{\varepsilon_1}(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots \\
&\psi_{\varepsilon_{n-1}}(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \delta(X - x_n) \Psi_{\varepsilon}(t - t_n), \\
n &= 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{7.11}$$

where the full waiting-time distribution, $\psi_{\varepsilon}(x, t) \stackrel{\text{def.}}{=} p(x) \cdot \psi_{\varepsilon}(t)$, means the sharp probability density of a single displacement x just at time t when the particle stayed whole the time (from 0 to t) at a given trap. As it is seen, the terms with $n \geq 1$ are n -fold convolutions. I.e., for the n -step partial propagator the walker performs exactly n single steps while the last n th one is just under way (in general it is not finished). It should be admitted that the initial condition is not visible here because it is the same for each partial propagator. This condition has a non-stationary character and says that initially the particle was surely at the origin.

The average propagator. Now, to obtain the average propagator we should average the above expression by using the distribution $\rho_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon}$ in the factorized form, i.e. $\rho(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon) = \rho(\varepsilon_0) \rho(\varepsilon_1) \dots \rho(\varepsilon_{n-1}) \rho(\varepsilon)$, as the depths of traps are, by definition, statistically independent. The key point of our consideration is given by the exponential form of the single-trap distribution

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \cdot \exp \left(-\frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right). \tag{7.12}$$

By applying waiting-time distribution ψ_{ε} and $\rho_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon}$ in the factorized form together with expression (7.12) into (7.11) we get the average propagator in the form

$$P(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X, t; n) \tag{7.13}$$

where the partial, average n -step propagators are

$$\begin{aligned}
P(X, t; n=0) &= \delta(X) \Psi(t), \\
P(X, t; n) &= \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \\
&\psi(x_1, t_1) \psi(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots \\
&\psi(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \delta(X - x_n) \Psi(t - t_n), \\
n &= 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{7.14}$$

and the average waiting-time distributions and sojourn probability are given by

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= p(x) \cdot \psi(t), \quad \psi(t) = \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \cdot \psi_\varepsilon(t), \\ \Psi(t) &= \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \cdot \Psi_\varepsilon(t).\end{aligned}\tag{7.15}$$

After the Fourier and Laplace transformations of the convolutions (7.14) we get the geometric series which can be written in a simple, closed form

$$\begin{aligned}\tilde{P}(k, s) &= \frac{\tilde{\Psi}(s)}{1 - \psi(\tilde{k}, s)}, \\ \tilde{\psi}(k, s) &= \tilde{p}(k) \cdot \tilde{\psi}(s), \quad \tilde{\Psi}(s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s},\end{aligned}\tag{7.16}$$

where $\tilde{f}(\dots)$ means the Fourier and/or Laplace transform of function $f(\dots)$. We should find now an explicit asymptotic form of the waiting-time distribution.

7.2.1 Scaling relation obeyed by the waiting-time distribution

It can be easily found that the average waiting-time distribution, given by the second relation in (7.15) combined with (7.1), has an approximate form

$$\psi(t) \approx \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \int_0^\infty d\xi \frac{1}{N^\xi} \cdot \frac{1}{\tau_0 \cdot (\tau')^\xi} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_0 \cdot (\tau')^\xi}\right)\tag{7.17}$$

or

$$\tilde{\psi}(s) \approx \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \int_0^\infty d\xi \frac{1}{N^\xi} \cdot \frac{1}{1 + \tau_0 \cdot (\tau')^\xi \cdot s},\tag{7.18}$$

where we introduced a convenient notation

$$\xi \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\varepsilon}{\Delta}, \quad N \stackrel{\text{def.}}{=} \exp\left(\frac{\Delta}{\langle \varepsilon \rangle}\right), \quad 1 - \frac{1}{N} \approx \frac{\Delta}{\langle \varepsilon \rangle}, \quad \tau' = \exp(\beta' \Delta),\tag{7.19}$$

and assumed (for simplicity) $\Delta \ll \langle \varepsilon \rangle$.

Expression (7.18) obeys the convenient scaling relation

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\tau' \cdot s) &= N \cdot \tilde{\psi}(s) - (N - 1) \cdot \int_0^1 d\xi \frac{1}{N^\xi} \cdot \frac{1}{1 + \tau_0 \cdot (\tau')^\xi \cdot s} \\ &\approx N \cdot \tilde{\psi}(s) - (N - 1) \cdot (1 - \tau_0 \cdot s),\end{aligned}\tag{7.20}$$

which can be solved by assuming, as usual for an equation of this type, that the solution is composed of the sum of two essentially different terms, i.e. $\tilde{\psi}(s) = \tilde{\psi}_s(s) + \tilde{\psi}_r(s)$, where the singular (general) term $\tilde{\psi}_s(s)$ obeys the homogeneous part of eq.(7.20), and the regular (particular) one $\tilde{\psi}_r(s)$ obeys the (full) homogeneous eq.(7.20).

7.2.2 Explicit asymptotic form of the waiting-time distribution

For $|s| \ll 1$ we obtain the singular term

$$\tilde{\psi}_s(s) \approx -Q\left(\frac{\ln s}{\ln \tau'}\right) \cdot (\tau_0 \cdot s)^\alpha, \quad (7.21)$$

where the exponent $\alpha = \ln N / \ln \tau' = (\beta' \cdot \langle \varepsilon \rangle)^{-1}$ and the *log-periodic* function (whose period is equal to 1) reduces, in the lowest approximation (or zero-order in s -variable), to the form²

$$Q\left(\frac{\ln s}{\ln \tau'}\right) \approx C_s^0 = \frac{1 - \frac{1}{N}}{\ln N} \cdot \frac{\pi \alpha}{\sin(\pi \alpha)}. \quad (7.22)$$

The regular term (controlled by an approximate form of the inhomogeneity in eq.(7.20)) reduces, within the linear approximation in s -variable, into the form

$$\tilde{\psi}_r(s) \approx 1 - C_r^1 \cdot \tau_0 \cdot s, \quad C_r^1 = \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{\tau'}{N}}. \quad (7.23)$$

Finally, we obtain the sought waiting-time distribution in the Laplace domain for $|s| \ll 1/\tau_0$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(s) &\approx 1 - C_s^0 \cdot (\tau_0 \cdot s)^\alpha - C_r^1 \cdot \tau_0 \cdot s \\ &\approx \begin{cases} 1 - C_s^0 \cdot (\tau_0 \cdot s)^\alpha, & \text{for } \alpha < 1 \\ 1 - C_r^1 \cdot \tau_0 \cdot s, & \text{for } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.24)$$

and in the asymptotic-time domain

$$\psi(t) \approx \begin{cases} \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{1 - \frac{1}{N}}{\ln(N)} \cdot \alpha \cdot \Gamma_{Euler}(1 + \alpha) \cdot \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1-\alpha}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \langle t \rangle^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\langle t \rangle}\right), & \text{for } \alpha > 1, \end{cases} \quad (7.25)$$

(here $\langle t \rangle = \tau_0 \cdot C_r^1$) which makes it possible to consider the propagator and hence the asymptotic mean- as well as mean-square displacement in an explicit form³. (Note that for the derivation of the first expression in (7.25) for $\alpha < 1$ we used relations (7.16), (7.15), (7.5) and (7.22).)

²The derivation of the detailed form of coefficient C_s^0 by using the Mellin transformation, is given, e.g., in [11].

³In the paper we do not consider the marginal case defined by the threshold $\alpha = 1$.

7.2.3 Asymptotic form of the propagator

For $|\tau_0 \cdot s| \ll 1$ and $|k \cdot a| \ll 1$ the propagator (given by (7.16)) can assume the following explicit form

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k, s) &= \frac{1}{s + [1 - \tilde{p}(k)] \cdot \frac{s \cdot \tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)}} \\ &\approx \begin{cases} \frac{1}{s + [1 - \tilde{p}(k)] \cdot \frac{s}{C_s^0 \cdot (\tau_0 \cdot s)^\alpha}}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{1}{s + [1 - \tilde{p}(k)] \cdot \frac{1}{\langle t \rangle}}, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.26)$$

where we used the explicit asymptotic form of the waiting-time distribution (7.24). In the Fourier and time domain the above relation transforms still into the relatively simple form

$$\tilde{P}(k, t) \approx \begin{cases} E_\alpha \left(-\frac{[1 - \tilde{p}(k)]}{C_s^0} \cdot \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^\alpha \right), & \text{for } \alpha < 1 \\ \exp \left(-[1 - \tilde{p}(k)] \cdot \frac{t}{\langle t \rangle} \right), & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \quad (7.27)$$

where $E_\alpha(\dots)$ is the well known Mittag-Leffler function [3], called sometimes the generalized exponent,

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma_{Euler}(1 + n\alpha)}. \quad (7.28)$$

The Fourier transformation of the second relation in (7.27) into the real space gives the well known shifted Gaussian. The analogous transformation for $\alpha < 1$ is unknown in a closed form although it can be expressed in the integral form in terms of the (non-shifted) Gaussian and the weight given by the corresponding Fox H -function as the integrand (for details see [3] and refs. therein).

7.2.4 Explicit asymptotic form of the first and second moments

The mean displacement. Now, we are able to obtain the general formula for the average time-dependent displacement of the particle along the direction of the external field. This is the essential quantity which characterizes the drift of each particle. From (7.16) we obtain in the Laplace domain

$$\langle \tilde{X} \rangle(s) = i \frac{d}{dk} \tilde{P}(k, s) \big|_{k=0} = \langle x \rangle \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)}, \quad (7.29)$$

where the single-hop mean displacement $\langle x \rangle = a \cdot (p_+ - p_-)$. From (7.29) and (7.24) we obtain for $|s| \ll 1$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X} \rangle(s) &\approx \langle x \rangle \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{C_s^0 \cdot (\tau_0 \cdot s)^\alpha + C_r^1 \cdot \tau_0 \cdot s} \\ &\approx \begin{cases} \frac{\langle x \rangle}{C_s^0} \cdot \frac{1}{\tau_0^\alpha} \cdot \frac{1}{s^{\alpha+1}}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{\langle x \rangle}{C_r^1} \cdot \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{1}{s^2}, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.30)$$

From the above relation we easily obtain for the asymptotic time, i.e. for $t_0 \gg \tau_0$,

$$\langle X \rangle(t) \approx \begin{cases} \frac{\langle x \rangle}{C_s^0} \cdot \frac{1}{\Gamma_{Euler}(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^\alpha, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{\langle x \rangle}{\langle t \rangle} \cdot t, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \quad (7.31)$$

where $\Gamma_{Euler}(\dots)$ denotes the well-known Gamma-Euler function. Although the time-dependence of the drift below and above the threshold $\alpha = 1$ differ essentially the transition between both cases is smooth; nevertheless, we obtain for these cases essentially different drift velocities

$$V(t) = \frac{d}{dt} \langle X(t) \rangle \approx \begin{cases} \frac{\langle x \rangle}{C_s^0} \cdot \frac{1}{\Gamma_{Euler}(\alpha)} \cdot \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{1}{(t/\tau_0)^{1-\alpha}}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{\langle x \rangle}{\langle t \rangle}, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \quad (7.32)$$

Indeed, this quantity is proportional to the transient photocurrent measured in experiments made on amorphous materials mentioned in Sec.7.1.

The mean-square displacement. The mean-square displacement, involving infinitely many steps of the walker or a time-dependent variance of displacement, is the main stochastic characteristics of the diffusion process. At first, we derive this quantity in the Laplace domain

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}^2 \rangle(s) &= -\frac{d^2 \tilde{P}(k, s)}{dk^2} \Big|_{k=0} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)} \cdot \left(\langle x^2 \rangle + \langle x \rangle^2 \cdot \frac{\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)} \right) \\ &\approx \langle x^2 \rangle \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{C_s^0 \cdot (\tau_0 \cdot s)^\alpha + C_r^1 \cdot \tau_0 \cdot s} \\ &+ \langle x \rangle^2 \cdot \frac{2}{s} \cdot \left(\frac{1}{C_s^0 \cdot (\tau_0 \cdot s)^\alpha + C_r^1 \cdot \tau_0 \cdot s} \right)^2 \\ &\approx \begin{cases} \frac{\langle x^2 \rangle}{C_s^0} \cdot \frac{1}{\tau_0^\alpha} \cdot \frac{1}{s^{\alpha+1}} + \left(\frac{\langle x \rangle}{C_s^0} \right)^2 \cdot \frac{2}{\tau_0^{2\alpha}} \cdot \frac{1}{s^{2\alpha+1}}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{\langle x^2 \rangle}{C_r^1} \cdot \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{1}{s^2} + \left(\frac{\langle x \rangle}{C_r^1} \right)^2 \cdot \frac{2}{\tau_0} \cdot \frac{1}{s^3}, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Next, from (7.33) and (7.31) we obtain for the asymptotic time (i.e. for $t \gg \tau_0$)

$$\langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2 \approx \begin{cases} \frac{\langle x^2 \rangle}{C_s^0} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma_{Euler}(\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^\alpha + \left(\frac{\langle x \rangle}{C_s^0} \right)^2 \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{2}{\Gamma_{Euler}(2\alpha)} - \frac{1}{\alpha \cdot [\Gamma_{Euler}(\alpha)]^2} \right\} \cdot \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{2\alpha}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle t \rangle} \cdot t, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \quad (7.34)$$

As it is seen, the time-dependence of the mean-square displacement below and above the threshold $\alpha = 1$ differ essentially. For $\alpha < 1$ the diffusion is controlled by the drift while for the opposite case it is not.

7.3 Błądzenia fraktalne

7.3.1 Błądzenie losowe w czasie fraktalnym a model dolinowy

Jednym ze skrajnych, wielce interesujących przykładów procesu stochastycznego opisanego propagatorem $\tilde{P}(k, t)$ (patrz wyrażenie (7.27)) jest błądzenie losowe w czasie fraktalnym (patrz rozdz. 3.2). Zatem, rozważmy ten propagator dla $\alpha < 1$, czyli w postaci danej górnym wyrażeniem w (7.27). Wyrażenie to spełnia fraktalne równanie dyfuzji (2.55) otrzymane w rozdz. 2.6, gdy czynnik strukturalny błądzenia losowego $\tilde{p}(k)$ nie posiada składowej singularnej, czyli zbudowany jest tylko z części regularnej (patrz rozdz. 6.3 a tam paragraf 6.4.3) i można go przedstawić (z dobrym przybliżeniem) w postaci: $\tilde{p}(k) \approx 1 - \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle k^2$, przy czym przyjęliśmy tutaj dla prostoty znikanie dryfu $\langle x \rangle = 0$. Wówczas dla $\alpha < 1$, propagator⁴

$$\tilde{P}(k, t) \approx E_\alpha \left(-\frac{\langle x^2 \rangle}{2 C_s^0} \cdot \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^\alpha \cdot k^2 \right) = E_\alpha \left(-D_\alpha \cdot t^\alpha \cdot k^2 \right), \quad (7.35)$$

gdzie fraktalny współczynnik dyfuzji $D_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\langle x^2 \rangle}{\tau_0^\alpha} \frac{1}{C_s^0}$, przy czym współczynnik rozwinięcia części singularnej $C_s^0 (> 0)$ jest dany wyrażeniem (7.22).

Można wykazać (patrz Dodatek A), że dla asymptotycznie długiego czasu (czyli dla $t \gg \tau_0$) propagator (7.35) przyjmuje postać funkcji potęgowej:

$$\tilde{P}(k, t) \approx \frac{1}{D_\alpha \Gamma_{Euler}(1 - \alpha)} \frac{1}{k^2} \frac{1}{t^\alpha}. \quad (7.36)$$

Zatem, wykładnicza (debye'owska) relaksacja modów dyfuzyjnych w dyfuzji Ficka (normalnej) została w subdyfuzji fraktalnej zastąpiona *relaksacją spowolnioną* (potęgową - niedebye'owską).

Zauważmy, że dla $D_\alpha \cdot t^\alpha \cdot k^2 \ll 1$ funkcja Mittag-Lefflera przechodzi (z dobrym przybliżeniem) w zwykły eksponens dając

$$\tilde{P}(k, t) \approx \exp \left(-D_\alpha \cdot t^\alpha \cdot k^2 \right) \quad (7.37)$$

Z powyższego uzyskujemy samozgodnie singularną wariancję sumarycznej zmiennej losowej

$$\sigma_X^2(t) = \langle X^2(t) \rangle = \frac{2D_\alpha}{\Gamma_{Euler}(1 + \alpha)} t^\alpha, \quad (7.38)$$

identyczną z (7.34) (dla $\langle x \rangle = 0$ i $\alpha < 1$), tak jak być powinno. Ta nieliniowa zależność sumarycznej wariancji od czasu w połączeniu z postacią propagatora (7.35)

⁴Występujący tutaj propagator jest równoważny transformacie Fouriera $\tilde{f}(k, t)$ funkcji $f(x, t)$ występującej w równaniu subdyfuzji fraktalnej (2.55).

wskazuje, że mamy tutaj do czynienia właśnie z błędzeniem losowym w czasie fraktalnym.

Gdyby wykładnicza postać propagatora (7.37) była słuszna dla całej przestrzeni fourierowskiej, wówczas mielibyśmy do czynienia z popularnym *fraktalnym ruchem Browna* (ang. *Fractal Brownian Motion*) w całej przestrzeni rzeczywistej, gdyż wówczas propagator byłby dany po prostu rozkładem Gaussa o wariancji (7.38).

Na zakończenie tego paragrafu warto podać dwie przydatne postacie propagatora - obie w przestrzeni rzeczywistej. Jedną, ścisłą w postaci nieskończonego, przemiennego szeregu wystarczająco wygodnego do obliczeń numerycznych

$$P(X, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_\alpha t^\alpha}} \sum_n \frac{(-1)^n}{n! \Gamma_{Euler}(1 - \alpha(n+1)/2)} \left(\frac{X^2}{D_\alpha t^\alpha} \right)^{n/2} \quad (7.39)$$

oraz drugą, asymptotyczną

$$\begin{aligned} P(X, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D_\alpha t^\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2-\alpha}} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{(1-\alpha)/(2-\alpha)} \left(\frac{|X|}{\sqrt{D_\alpha t^\alpha}} \right)^{(1-\alpha)/(2-\alpha)} \\ &\times \exp \left(-\frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} \left(\frac{|X|}{\sqrt{D_\alpha t^\alpha}} \right)^{1/(1-\alpha/2)} \right), \end{aligned} \quad (7.40)$$

przybierającą, dla $|X| \gg \sqrt{D_\alpha t^\alpha}$, postać rozciągniętego rozkładu Gaussa.

Wreszcie, na rysunkach 7.3 i 7.4 porównano propagator $P(X, t)$ dla subdyfuzji, przykładowo z wykładnikiem $\alpha = 1/2$, z rozkładem Gaussa $G(X, t)$. Dobrze widoczne są zasadnicze różnice pomiędzy nimi.

7.3.2 Równanie dyfuzji fraktalnej Lévy'ego

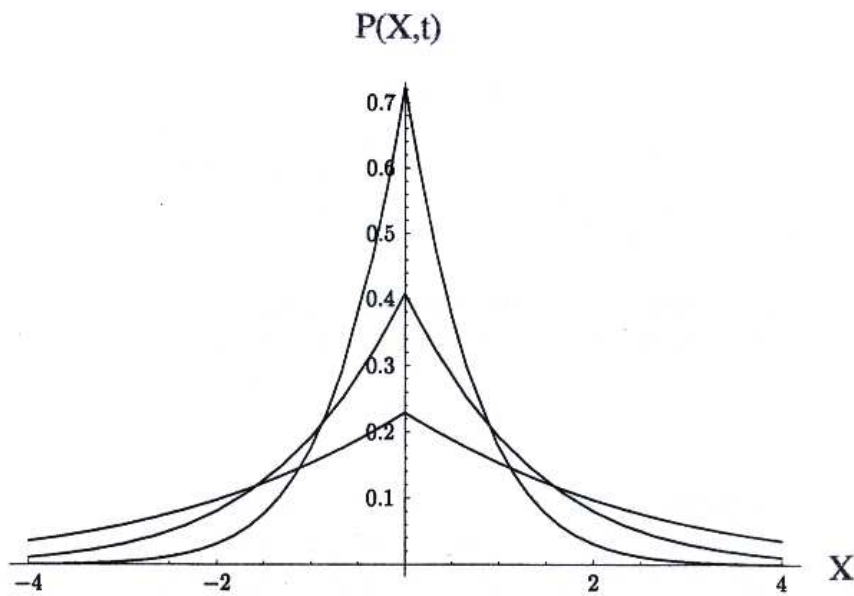
Innym skrajym, nie mniej interesującym przykładem jest proces przelotów Lévy'ego. Ma on miejsce w sytuacji, gdy $\alpha > 1$ natomiast czynnik strukturalny błędzenia losowego $\tilde{p}(k)$ zawiera składnik singularny (patrz rozdz. 6.3 a tam paragraf 6.4.3), Wówczas, dla wykładnika $\beta < 2$, wyrażenie (7.27) przechodzi w następujące:

$$\tilde{P}(k, t) \approx \exp \left(-D'_f |k|^\beta \cdot \frac{t}{\langle t \rangle} \right), \quad (7.41)$$

definiując funkcję charakterystyczną wycelowanego, symetrycznego (czyli w nieobecności dryfu) rozkładu Lévy'ego w czasie ciągłym. Można sprawdzić, że tak zdefiniowany rozkład spełnia następujące równanie dyfuzji fraktalnej Lévy'ego

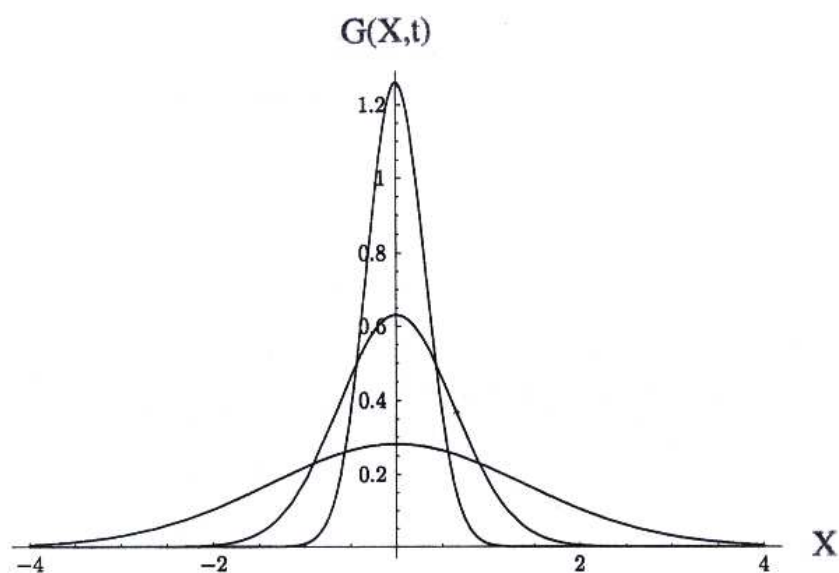
$$\frac{\partial P(X, t)}{\partial t} = D'_f {}_{-\infty} D_t^\beta P(X, t), \quad (7.42)$$

gdzie ${}_{-\infty} D_t^\beta$ jest pochodną Weyla przedstawioną w Dodatku A.



Rysunek 7.3: Wykres propagatora $P(X,t)$ dla wykładnika $\alpha = 1/2$ oraz trzech przykładowo wybranych chwil $t = 0.1, 1.0, 10.0$. Bardzo dobrze jest widoczny kształt ostrza w otoczeniu chwili początkowej $t = 0$. Nie tylko ten kształt ale także potęgowe zanikanie rozkładów odróżnia je od rozkładu Gaussa (patrz rys. 7.4).

Należy podkreślić, że oba skrajne przykłady (przedstawione w poprzednim paragrafie 7.3.1 oraz w niniejszym paragrafie) legły u podstaw, intensywnie rozwijanych w ostatnich dekadach, dwóch istotnie różnych kategorii procesów stochastycznych niespełniających Centralnego Twierdzenia Granicznego. Procesy te znalazły już ogromną liczbę ważnych zastosowań w szeroko rozumianej fizyce i poza nią (np. w ekonomii i socjologii).



Rysunek 7.4: Wykres propagatora $G(X, t)$ w postaci rozkładu Gaussa dla trzech przykładowo wybranych chwil $t = 0.05, 0.2, 1.0$. Wykresy na tym rysunku wystarczająco dobrze ukazują różnice pomiędzy rozkładem Gaussa a propagatorem stanowiącym rozwiązanie fraktalnego równania dyfuzji (2.55) i przykładowo przedstawionym na rys. 7.3.

Bibliografia

- [1] G. Zumofen, J. Klafter, and A. Blumen, Models for Anomalous Diffusion; in: Disorder Effects on Relaxational Processes. Glasses, Polymers, Proteins. R. Richert, A Blumen (Eds.). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1994. p.251 - 278.
- [2] H. Scher and E.W. Montroll, Anomalous transient-time dispersion in amorphous solids. Phys. Rev. B15 (1975) 2455 - 2477.
- [3] R. Metzler and J. Klafter, The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. Phys. Rep. 339 (2000) 1 - 77.
- [4] M.E. Scharfe, Transient Photoconductivity in Vitreous As_2Se_3 . Phys. Rev. B2 (1974) 5025 - 5034.
- [5] W.D. Gill, Drift mobilities in amorphous charge-transfer complexes of trinitrofluorenone and poly-*n*-vinylcarbazole. J.Appl. Phys. 43 (1972) 5033 - 5040.
- [6] G. Pfister, Pressure-Dependent Electronic Transport in Amorphous As_2Se_3 . Phys. Rev. Lett 33 (1974) 1474 - 1477.
- [7] G. Pfister, Dispersive Low-Temperature Transport in α -Selenium. Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 271 - 273.
- [8] G. Pfister and H. Scher, Time-dependent electrical transport in amorphous solids: As_2Se_3 . Phys. Rev. B15 (1977) 2062 - 2083.
- [9] A.J. Campbell, D.D.C. Bradley, and D.G. Lidzey, Space-charge limited conduction with traps in poly(phenylene vinylene) light emitting diodes. J. Appl. Phys. 82 (1997) 6326 - 6342.
- [10] G.H. Weiss and R.J. Rubin, Random Walks: Theory and Selected Applications; in: Advances in Chemical Physics Vol.LII. I. Prigogine and S.A. Rice (Eds.). J. Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1983. p.364 - 505.
- [11] E.W. Montroll and M.F. Shlesinger, On the wonderful world of random walks; in: Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastic to Hydrodynamics. SSM XI.

- J.L. Lebowitz and E.E. Montroll (Eds.). North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo 1984. p.1 - 121.
- [12] J.W. Haus and K.W. Kehr, Diffusion in Regular and Disordered Lattices. Phys. Rep. Phys. Rep. **150** (1987) 263 - 416.
 - [13] J.-P. Bouchaud and A. Georges, Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanics, Models and Physical Applications. Phys. Rep. 195 (1990) 127–293.
 - [14] G.H. Weiss, *A Primer of Random Walkology*, in *Fractals in Science*, eds. A. Bunde and S. Havlin, Springer–Verlag, Berlin 1995, pp.119–161.
 - [15] D. Sornette, Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2000.
 - [16] J.-P. Bouchaud and M. Potters, From Statistical Physics to Risk Management. Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001.
 - [17] Kutner R.: Extreme events as foundation of Lévy walks with varying velocity. Chem. Phys. **284** (2002) 481–505.
 - [18] A.A. Moreira, J.S. Andrade, Jr., and L.A.N. Amaral, Extremum Statistics in Scale-Free Network Models, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 268703-1 - 4.
 - [19] S. Albeverio and V. Piterbarg: *Mathematical Methods and Concepts for the Analysis of Extreme Events*, in *Extreme Events in Nature and Society*, eds. S. Albeverio, V. Jentsch, H. Kants, Springer-Verlag, Berlin 2006, pp. 47–68.
 - [20] P. Kosewski, R. Kutner: *Wykrywanie zdarzeń ekstremalnych w finansowych szeregach czasowych*, in *Nowe zjawiska na rynku finansowym*, red. T. Gruszeński, J. Bednarz, Wydawnictwo KUL, Lublin 2012.
 - [21] R. Nowak: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

Część V

Współczesna teoria oceny ryzyka rynkowego

Rozdział 8

Ryzyko w ujęciu tradycyjnym i nowoczesnym

Termin *ryzyko* pochodzi od starowłoskiego słowa *risicare* co oznacza *odwaga się*. Jak wiadomo, **ryzyko inwestycyjne można podzielić na dwie części:**

- A) rynkowe, czyli podstawowe związane z dynamiką cen akcji emitera na giełdzie
- B) pozarynkowe, za które odpowiedzialna jest sytuacja w firmie emitującej akcje oraz jej zewnętrzne uwarunkowania.

W dalszym ciągu zajmujemy się wyłącznie ryzykiem rynkowym zakładając, że te dwa rodzaje ryzyka są od siebie niezależne.

Ryzyko rynkowe można podzielić na wiele składników, na które wpływ ma szereg różnych czynników nie tylko natury ekonomicznej. Z ryzykiem rynkowym mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy, gdy ceny papierów wartościowych zależą bezpośrednio od sytuacji na rynku. Oczywiście, zależność ta jest w większym lub mniejszym stopniu stale obecna. Zatem, ryzyko rynkowe jest nieusuwalnym elementem aktywności rynkowej. Sam fakt zrozumienia tego co to jest ryzyko jest niewystarczający - aby móc racjonalnie podejmować decyzje i działać **musimy umieć mierzyć ryzyko**. Trzeba podkreślić, że brak jest powszechnie akceptowanej teorii ryzyka - każde z istniejących podejść jest niewystarczające i może prowadzić do przeszacowania albo niedoszacowania rzeczywistego ryzyka.

Miary ryzyka rynkowego dzieli się zwyczajowo na trzy grupy:

- 1) miary zmienności (ang. *volatility*), np. zmienności ceny, stopy zwrotu (lub wzrostu), rozkładu prawdopodobieństwa,
- 2) miary wrażliwości (w fizyce podatności) np. wrażliwości ceny lub stopy zwrotu (wzrostu); oznacza się je tradycyjnie literami alfabetu greckiego i nazywa skrótowo wskaźnikami greckimi (ang. *greeks*),
- 3) miary zagrożenia wyrażającej się możliwością spadku ceny lub stopy zwrotu (wzrostu), czyli możliwością wystąpienia nadmiernych strat (analizowanych np. metodą tzw. Wartości Zagrożonej Ryzykiem (ang. *Value at Risk*, *VaR*).

W niniejszych rozważaniach zajmujemy się tylko grupą trzecią, wykorzystując **podejście od strony Teorii Zdarzeń Ekstremalnych** wprowadzonej wcześniej w rozdz. 8.3.

Istnieje przynajmniej kilka powodów, dla których dotychczasowe teorie oceniające ryzyko rynkowe są niewystarczające. Teorie te bazują na Centralnym Twierdzeniu Granicznym (CTG), czyli na analizie zmienności ('volatility') rozumianej jako typowy rozrzut cen akcji bądź wielkości indeksów giełdowych wokół ich wartości przeciętnych wyrażony np. za pomocą dyspersji σ lub kurtozy κ . Tego typu podejście oznacza, że najistotniejsze informacje statystyczne zawarte są w tzw. przedziale trzysigmowym ($\pm 3\sigma$). Innymi słowy, "ogon" rozkładu nie zawiera wtedy istotnych informacji statystycznych - jest to gaussowski punkt widzenia, w którym nie ma miejsca na procesy stochastyczne typu Lévy'ego, czyli na zdarzenia rzadkie.

Procesy Lévy'ego są przeciwieństwem procesów gaussowskich gdyż mamy w nich do czynienia z tzw. rozkładami poszerzonymi gdzie najistotniejsza informacja o układzie statystycznym zawarta jest właśnie w pogrubionym "ogonie" funkcji rozkładu; prowadzi to natychmiast do nieskończonej dyspersji i kurtozy a tym samym do bezużyteczności oceny ryzyka opartej na tego typu tradycyjnych zmiennościach. Jak widać, **właściwa analiza ryzyka rynkowego wymaga innej definicji ryzyka**.

Istotą współczesnej teorii ryzyka rynkowego jest traktowanie zdarzeń ekstremalnych jako posiadających decydujący wpływ na charakter i wielkość ponoszonego ryzyka. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do podejść tradycyjnych, w których tego typu zdarzenia są po prostu ignorowane. Prowadzi to bezpośrednio do nowej, współczesnej definicji ryzyka rynkowego opartego przede wszystkim na technice kwantyli¹.

8.1 Tradycyjna analiza poziomu ryzyka

Przyjrzyjmy się nieco dokładniej roli CTG w tradycyjnej ocenie poziomu ryzyka, analizując zależną od czasu chwilową stopę zwrotu²

$$\Delta\mathcal{R}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}, \quad (8.1)$$

jakiegoś papieru wartościowego, którego cena w chwili t wynosi $X(t)$ a w chwili późniejszej $t + \Delta t$ jest $X(t + \Delta t)$; tutaj Δt jest ustalonym horyzontem czasowym (ziarnistością czasu, krokiem dyskretyzacji czasu), czyli czas $t = n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Stopa zwrotu może być zarówno dodatnia jak i ujemna - w pierwszym przypadku myślimy o niej jak o relatywnym zysku, w drugim jak o relatywnej stracie.

W dalszym ciągu zakładamy, że zmiana ceny w zadanym horyzoncie czasu Δt jest relatywnie niewielka, tzn. $|\Delta X(t)| \ll X(t)$, stąd zależna od czasu chwilowa

¹Mogę polecić tutaj książkę autorstwa Romana Nowaka pt.: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2002.

²W przypadku zwrotu na różnego rodzaju indeksach i wskaźnikach używa się często terminu *chwilowa stopa wzrostu*.

stopa zwrotu

$$\Delta\mathcal{R}(t) \approx \ln \left(\frac{X(t + \Delta t)}{X(t)} \right) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t)), \quad (8.2)$$

czyli jest, z dobrym przybliżeniem, zmianą logarytmów cen zwaną *chwilową logarytmiczną stopą zwrotu*. Zatem, chwilowa logarytmiczna stopa zwrotu jest szumem procesu stochastycznego jakim jest logarytm ceny. Wyrażenia (8.1) oraz (8.2) pozwalają na stosowanie zamiennie (w zależności od potrzeb) jednej z trzech definicji chwilowej stopy zwrotu, gdyż w wielu różnych sytuacjach wygodniej jest się posługiwać logarytmem ceny a nie samą ceną.

Zauważy, że *sumaryczna stopa zwrotu* (zwana dalej po prostu *stopą zwrotu*) dana jest w postaci sumy chwilowych stóp zwrotu

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= \frac{X(t) - X(0)}{X(0)} \approx \ln \left(\frac{X(t)}{X(0)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{X(\Delta t)}{X(0)} \frac{X(2\Delta t)}{X(\Delta t)} \cdots \frac{X((n-1)\Delta t)}{X((n-2)\Delta t)} \frac{X(n\Delta t)}{X((n-1)\Delta t)} \right) \\ &= \ln \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 + \Delta\mathcal{R}(j \cdot \Delta t)) \right) \\ &\approx \sum_{j=0}^{n-1} \Delta\mathcal{R}(j \cdot \Delta t), \end{aligned} \quad (8.3)$$

przy czym milcząco założyliśmy, że także wartość sumarycznej zmiany ceny $|X(t) - X(0)| \ll X(0)$. Jak widać, stopa zwrotu jest analogicznie zdekomponowana jak przyrost procesu

$$X(n \cdot \Delta t) - X(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta X(j \cdot \Delta t), \quad (8.4)$$

co prowadzi do analogicznych konsekwencji. Mianowicie, wynik (8.3) ma charakter zasadniczy, czyniący celowym wprowadzenie kluczowego założenia tradycyjnej analizy ryzyka traktującej **chwilowe stopy zwrotu** jak **niezależne zmienne losowe** o identycznym, niekoniecznie gaussowskim rozkładzie wymagającym jedynie aby wariancja chwilowej stopy zwrotu była skończona i niezależna od czasu (ale, w ogólności, zależna od Δt)

$$\sigma^2 = \langle [\Delta\mathcal{R}(t) - \langle \Delta\mathcal{R}(t) \rangle]^2 \rangle = \langle [\Delta\mathcal{R}(t)]^2 \rangle - m^2 < \infty, \quad (8.5)$$

podobnie jak i sama wartość średnia

$$m = \langle \Delta\mathcal{R}(t) \rangle < \infty, \quad (8.6)$$

czyli na poziomie szumu, z punktu widzenia jego wariancji i wartości oczekiwanej, czas jest traktowany jako jednorodny, czyli w sposób stacjonarny.

W związku z powyższym, do stopy zwrotu $\mathcal{R}(t)$ można zastosować CTG. Oznacza to, że dla $n \rightarrow \infty$ centrowana zmienna losowa $\mathcal{R}(n \cdot \Delta t) - \langle \mathcal{R}(n \cdot \Delta t) \rangle$ staje się zmienną gaussowską (czyli podlegającą rozkładowi Gaussa) o wariancji

$$\sigma_{\mathcal{R}}^2(n \cdot \Delta t) = n \cdot \sigma^2 \quad (8.7)$$

i wartości średniej

$$m_{\mathcal{R}}(n \cdot \Delta t) = n \cdot m. \quad (8.8)$$

Zatem, jakakolwiek miara poziomu ryzyka, $\Lambda_G \geq 0$, np. rozrzut trzysigmowy

$$\Lambda_G = 3 \cdot \sigma_{\mathcal{R}}(t) \quad (8.9)$$

lub rozrzut względny czyli tzw. współczynnik zmienności

$$Z_G = \frac{\sigma_{\mathcal{R}}(t)}{|m_{\mathcal{R}}(t)|} = \frac{\sigma}{|m|} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{n}}, \quad \sqrt{\tilde{n}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sigma}{|m|}, \quad (8.10)$$

bazują w tym podejściu na dyspersji σ (gdyż skośność dla rozkładu Gaussa znika a nadmiarowa kurtoza jest po prostu stała); oczywiście, współczynnik zmienności jako miara względna opiera się także na wartości średniej.

Często używa się także wyrażenia odwrotnego do (8.10) nazywając go *jakością inwestycji* a także *stosunkiem sygnał-szum* jak też *stosunkiem Sharpe'a*, który oznacza się przez

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def.}}{=} Z_G^{-1} \quad (8.11)$$

i zwykle określa w skali roku. Oczywiście, miary poziomu ryzyka (8.9) i (8.10) należy traktowane komplementarnie. W takim podejściu (które siłą rzeczy jest tutaj dwuparametrowe) straty i zyski są rozłożone symetrycznie wokół wielkości średniej $m_{\mathcal{R}}(t)$.

Zakres stosowalności

Poświęćmy teraz nieco więcej uwagi zakresowi stosowalności powyższego, tradycyjnego podejścia do oceny poziomu ryzyka.

1. Jak już powiedzieliśmy, straty i zyski podlegają tutaj rozkładowi symetrycznemu dlatego występują, średnio rzecz biorąc, z jednakową częstością co na ogół nie ma miejsca dla sytuacji rzeczywistych. Inaczej mówiąc, model taki jest nierealistyczny.
2. Inna niedogodność modelu opiera się na założeniu relatywnie małych zmian ceny waloru co pozostaje w sprzeczności z często obserwowanymi (zwłaszcza w ostatnich dwóch dekadach) znacznymi, skokowymi zmianami cen walorów wykraczającymi znacznie poza obszar trzysigmowy.

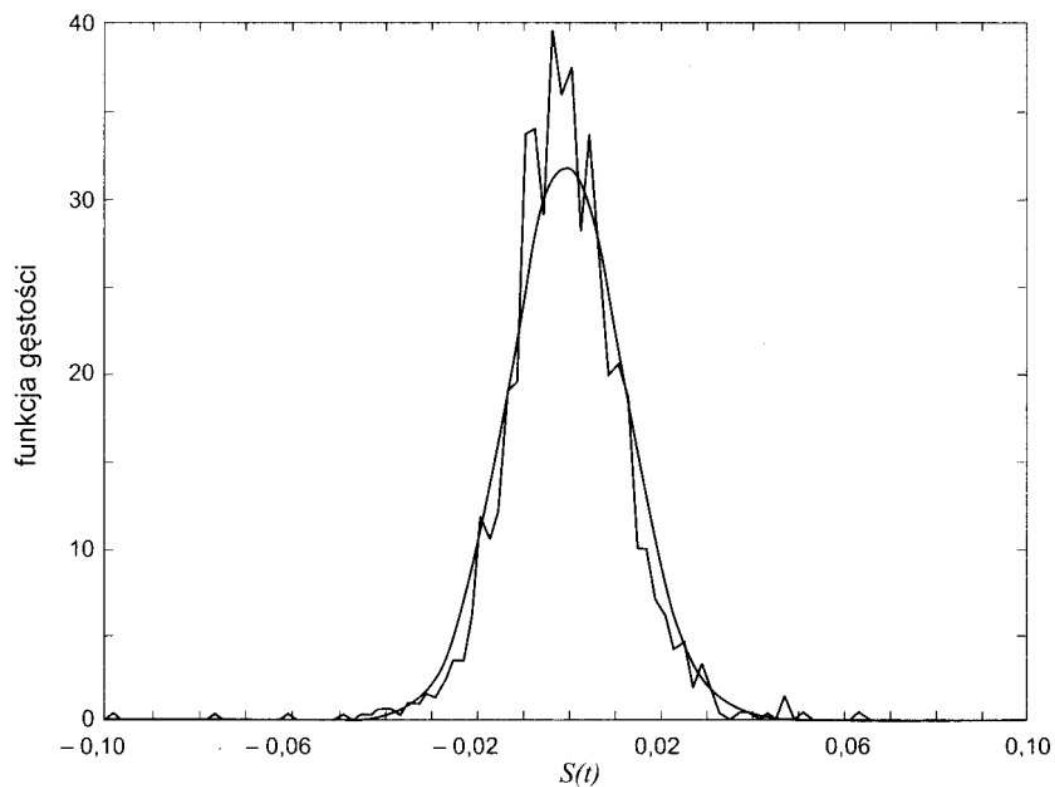
3. Ponadto, samo założenie o skończonej wartości dyspersji może być kwestionowane ze względu na istnienie zdarzeń rzadkich. Objawia się to w postaci niestabilnego zachowania estymaty dyspersji ze wzrostem rozmiaru okna czasowego (czyli liczby danych empirycznych budujących dyspersję). Zamiast stabilizowania się tej wielkości, jak to przewiduje Prawo Wielkich Liczb Bernoulliego, obserwuje się co jakiś czas uskoki, których amplituda wyraźnie wzrasta ze wzrostem wielkości okna czasowego z którego zbiera się dane. Inymi słowy, gdy wzrasta wielkość okna czasowego to tym samym wzrasta prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia rzadkiego destabilizującego estymatę dyspersji.

8.1.1 Twierdzenia graniczne na giełdzie

Tytułem wielce pouczającego przykładu, postawimy pytanie kluczowe dla tradycyjnej analizy dynamiki walorów, a mianowicie: **czy przewidywania CTG są czy też nie są obserwowane na giełdzie?** Odpowiedź na to pytanie jest złożona i zależy od tego jaki papier wartościowy lub indeks a także jaki horyzont czasowy i czasokres rozpatrujemy. Mianowicie, dla indeksu Standard & Poor 500 notowanego na Nowojorskiej Giełdzie Papierów Wartościowych (NYSE) - jednej z największych giełd świata, dla horyzontów czasowych od $\Delta t = 1$ [min.] do rzędu $\Delta t = 1$ [td]³ dane empiryczne przeskalowane za pomocą czynnika $(\Delta t)^{-1/\alpha}$ kolapsują, z dobrym przybliżeniem, do stabilnego, symetrycznego rozkładu Lévy'ego (o ile ich statystyki przeskalujemy za pomocą czynnika odwrotnego), gdzie α jest indeksem rozkładu Lévy'ego. Własność tą nazywa się Uogólnionym Centralnym Twierdzeniem Granicznym (UCTG) lub granicznym twierdzeniem Lévy'ego-Khintchine'a (TLK). Wyniki te zostały uzyskane przez R.N. Mantegę i H.E.Stanley'a (patrz praca pt.: "Scaling behaviour in the dynamics of an economic index", Nature, Vol.376, No.6 (1995) 46-49 oraz książka tych samych autorów pt.: "Ekonofizyka. Wprowadzenie", Wydawnictwa Naukowe PWN SA, Warszawa 2001). Analogiczne rezultaty otrzymali B.H.Wang i P.M.Hui dla indeksu Hang Seng giełdy w Hong Kongu (patrz praca pt.: "The distribution and scaling of fluctuations for Hang Seng index in Hong Kong stock market", The European Physical Journal Vol.20, No.20 (2001) 573-579).

Oczywiście, istnieją także walory, których np. codzienne zmiany podlegają rozkładowi Gaussa (patrz rys.8.1) i w związku z tym dają się zestandaryzować co umożliwia gaussowski kolaps danych czyli zasadniczo różny od wspomnianego powyżej. Poniżej omawiamy wnioski płynące z analizy oba rodzajów twierdzeń granicznych jakim mogą podlegać dane empirycznych dostarczane przez rynki finansowe.

³Skrót "td" jest akronimem angielskiej nazwy "trading day" czyli "dzień transakcyjny" lub "dzień handlowy".



Rysunek 8.1: Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa różnic logarytmów dziennych zmian ceny, czyli logarytmicznej stopy zwrotu, akcji $S(t) = \ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t)$, gdzie $Y(t + \Delta t)$ oraz $Y(t)$ są cenami akcji firmy Chevron notowanej na giełdzie nowojorskiej w okresie od 1989 do 1995 roku, przy czym tutaj $\Delta t = 1$ [td]. Gładka linia jest krzywą Gaussa o odchyleniu standardowym wyznaczonym z danych empirycznych (połączonych linią zygzakowatą). Jest to rozkład typowy dla tej firmy zarówno dla znacznie mniejszych jak i znacznie większych horyzontów czasowych.

8.1.2 Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne na NYSE

Jak już powiedzieliśmy, złamanie Centralnego Twierdzenia Granicznego czyli zachodzenie Uogólnionego Centralnego Twierdzenia Granicznego dla rynków finansowych pierwsi zaobserwowali Mantegna i Stanley badając indeks S&P 500 notowany dla danych szybkozmiennych o wspomnianych powyżej horyzontach czasowych oraz wspomnianym zakresie. Przedstawiono to na rys. 8.2 w postaci odpowiednich rozkładów prawdopodobieństw przy czym, w miarę wzrostu horyzontu czasowego, jak należało się spodziewać, wartość początkowa rozkładu maleje ale za to (zgodnie z normalizacją) rozwartość ramion krzywej dzwonowej rośnie. To co było zaskakujące to wzrost spłaszczenia (leptokurtyczności) czyli wzrost nadmiarowej kurtozy ze wzrostem horyzontu czasowego (np. najbardziej leptokurtyczna jest krzywa dla $\Delta t = 1000$ [min.] a najmniej dla $\Delta t = 1$ [min.]) co stoi w jawnej sprzeczności z przewidywaniem CTG, które mówi, że w miarę wzrostu horyzontu czasowego rozkład sumarycznej zmiennej losowej coraz bardziej upodabnia się do rozkładu Gaussa a więc jego leptokurtyczność maleje do zera⁴. Był to wynik, który wstrząsnął fizykami analizującymi notowania giełdowe i stał się faktycznym początkiem ekonofizyki, czyli początkiem ogromnego wzrostu zainteresowania fizyków finansowymi szeregami czasowymi.

Na rys. 8.3 przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa standaryzowanej zmiany tego indeksu Z/σ , gdzie $Z(t) \equiv Z_{\Delta t}(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$, przy czym $Y(t + \Delta t)$ oraz $Y(t)$ są wartościami indeksu S&P 500, odpowiednio, w chwilach $t + \Delta t$ i t natomiast $\sigma \equiv \sigma(\Delta t)$ jest estymatą dypersji obliczoną na podstawie przedstawionych na rysunku danych empirycznych dla wybranego horyzontu czasowego $\Delta t = 1$ [min.].

Wreszcie, na rys. 8.4 przedstawiono wspomniane na wstępie, przeskalowane statystyki indeksu S&P 500 w zależności od przeskalowanej zmiennej losowej tzn.

$$\tilde{P}(\tilde{Z}) = (\gamma\Delta t)^{1/\alpha} \cdot P_{\Delta t}(Z(\tilde{Z})), \quad \tilde{Z} = \frac{Z}{(\gamma\Delta t)^{1/\alpha}}, \quad (8.12)$$

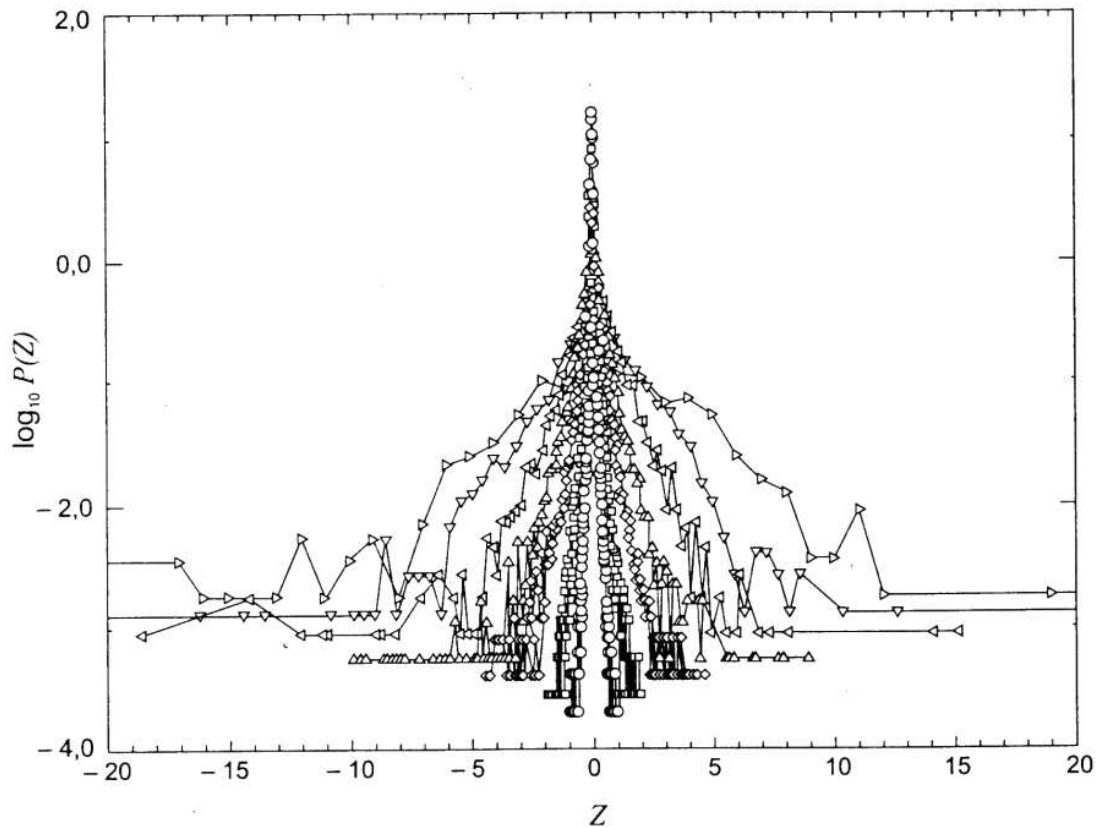
gdzie indeks α i współczynnik γ , wspólne dla wszystkich statystyk $P_{\Delta t}(Z)$, zostały wyznaczone z ich wartości dla $Z = 0$ czyli z gęstości prawdopodobieństwa powrotu do początku a dokładniej z nachylenia prostej $P_{\Delta t}(Z = 0)$ (w skali $\log-\log$) w funkcji Δt (patrz rys.8.5). Uwaga, przy wyprowadzaniu poniżej w rozdz. 8.1.3 wzorów (8.12) skorzystaliśmy z niezmienniczości prawdopodobieństw

$$\tilde{P}(\tilde{Z})d\tilde{Z} = P_{\Delta t}(Z)dZ \quad (8.13)$$

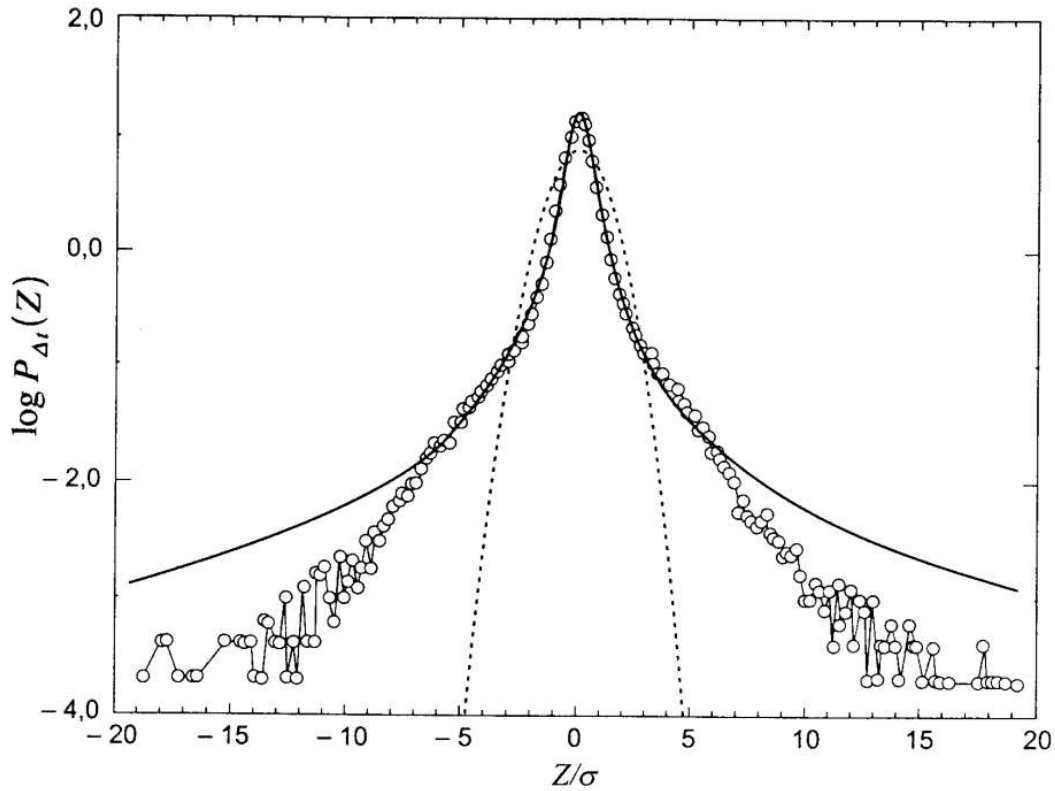
jako skalarów⁵.

⁴Oczywiście, o ile wyjściowo mieliśmy także do czynienia z rozkładem Gaussa to nadmiarowa kurtoza cały czas jest równa zeru niezależnie od wielkości horyzontu czasowego Δt .

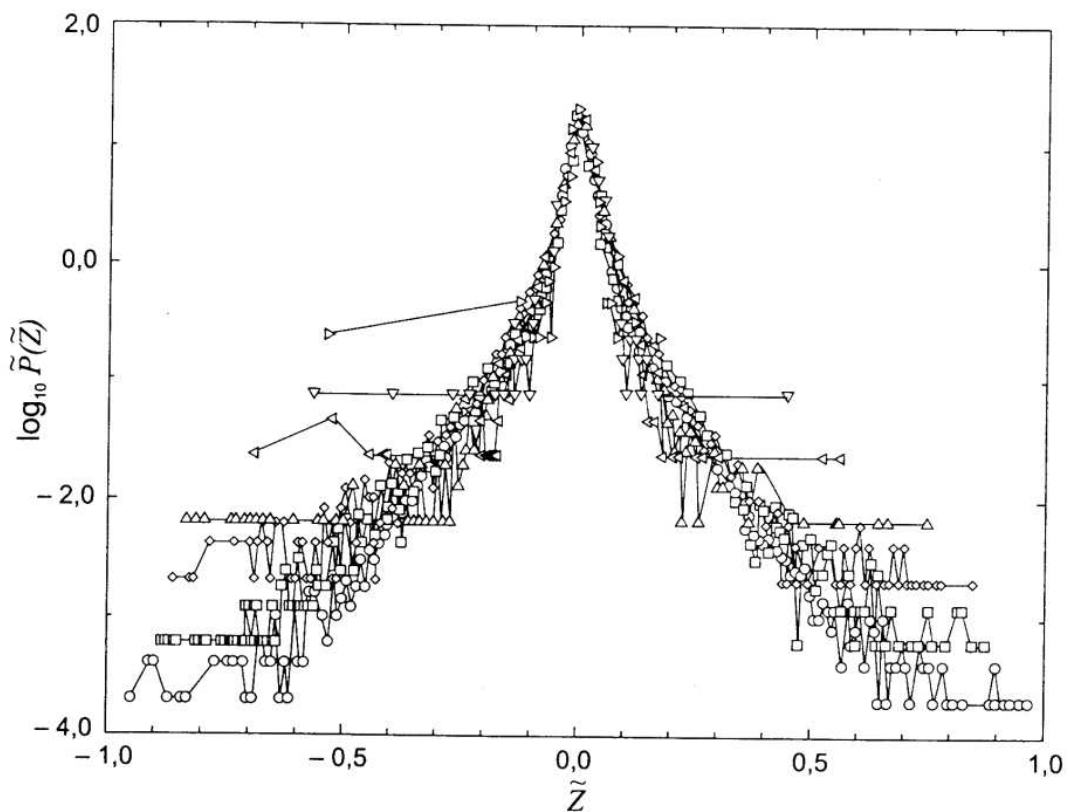
⁵W ogólności, równość (8.13) ma charakter zorientowany, tzn. $\tilde{P}(\tilde{Z}) = P_{\Delta t}(Z(\tilde{Z})) \left| \frac{d\tilde{Z}(Z)}{dZ} \right|^{-1}$.



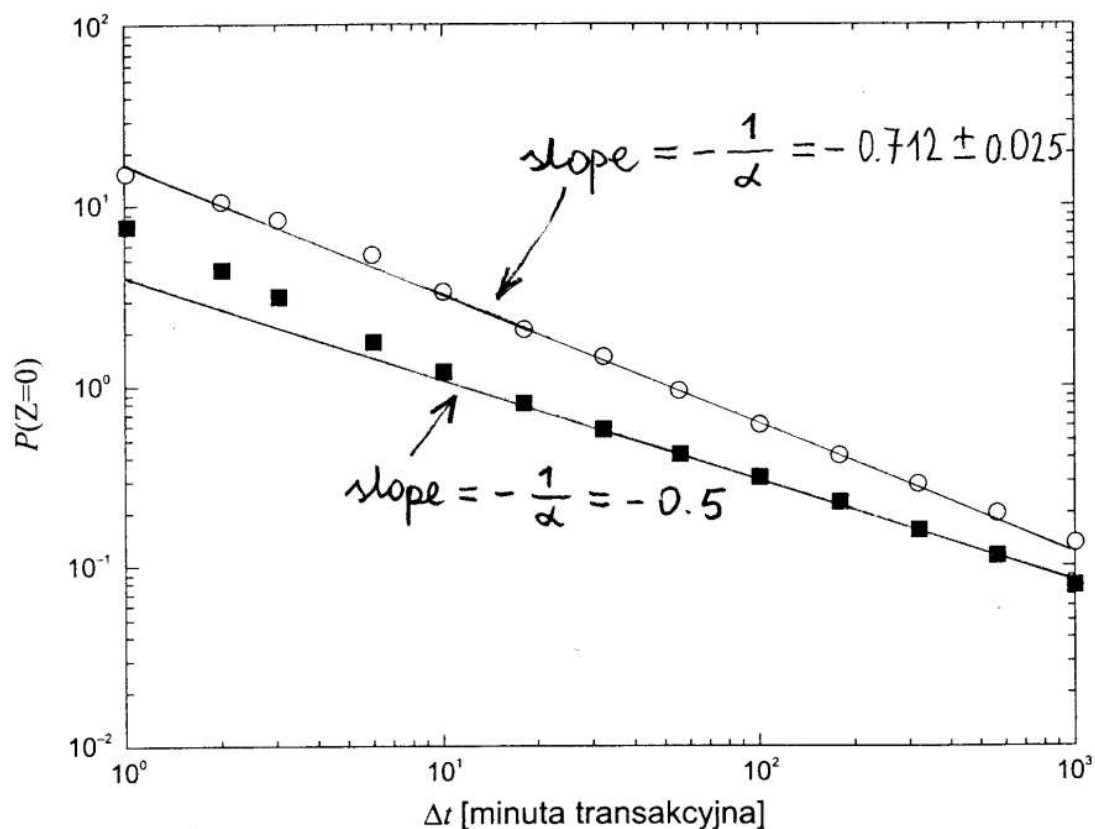
Rysunek 8.2: Porównanie rozkładów prawdopodobieństw otrzymanych dla szybkozmennych danych empirycznych dotyczących indeksu S&P 500 dla horyzontu czasowego $\Delta t = 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000$ [min.], przy czym $Z(t) \equiv Z_{\Delta t}(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$, gdzie $Y(t + \Delta t)$ oraz $Y(t)$ są wartościami indeksu S&P 500, odpowiednio, w chwilach $t + \Delta t$ i t . Zauważmy, że w zasadzie nadmiarowa kurtოza rozkładu wzrasta czyli maksimum obniża się i trochę spłaszcza (co niestety nie jest dostatecznie widoczne w przyjętej skali rysunku) a ramiona rozkładu rozchylają się w miarę wzrostu horyzontu czasowego Δt (tzn. rozkład dla $\Delta t = 1$ [min.] jest najwęższy a dla $\Delta t = 1000$ [min.] najszerszy).



Rysunek 8.3: Przykładowe porównanie rozkładów prawdopodobieństw otrzymanych dla szybkozmiennych danych empirycznych dotyczących indeksu S&P 500 dla horyzontu czasowego $\Delta t = 1$ [min.], przy czym $Z(t) \equiv Z_{\Delta t}(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$, gdzie $Y(t + \Delta t)$ oraz $Y(t)$ są wartościami indeksu S&P 500, odpowiednio, w chwilach $t + \Delta t$ i t natomiast $\sigma = 0.0508$ jest estymatą dywersji obliczoną na podstawie wszystkich przedstawionych na rysunku danych empirycznych (kółka połączone odcinkami linii). Linia ciągła przedstawia rozkład Lévy'ego o wykładniku kształtu $\alpha = 1.40$ i czynniku skalowania $\gamma = 0.00375$ (na rysunku 8.2 jest to ten najwęższy), natomiast linia kropkowana jest rozkładem Gaussa centrowanym w $Z/\sigma = 0$ i sparametryzowanym wspomnianą powyżej estymatą dywersji σ .



Rysunek 8.4: Porównanie odpowiednio zestandaryzowanych rozkładów prawdopodobieństw, $\tilde{P}$, otrzymanych dla szybkozmiennych danych empirycznych dotyczących indeksu S&P 500 dla horyzontu czasowego $\Delta t = 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000$ [min.], przy czym $\tilde{Z}(t)$ jest standaryzowaną zmienną losową. Jak widać, ma miejsce (z dobrym przybliżeniem) kolaps danych.



Rysunek 8.5: Prawdopodobieństwo powrotu do początku $P_{\Delta t}(Z = 0)$ (białe kółka) w funkcji horyzontu czasowego Δt . Nachylenie prostej (w skali log – log) utożsamiamy z wykładnikiem $1/\alpha = 0.712 \pm 0.025$ co daje $\alpha = 1.40 \pm 0.05$. Dla porównania zamieszczono wyniki dla analogicznego prawdopodobieństwa $P_G(Z = 0)$ (czarne kwadraty) otrzymanego z rozkładu Gaussa; wariancje takiego procesu wyznaczono z dostępnych danych empirycznych dla każdej wartości Δt z osobna.

8.1.3 Stabilny, symetryczny rozkład Lévy'ego

Kolaps danych uzyskany dzięki skalowaniu (8.12) (patrz rys. 8.4), gdzie indeks α uzyskano analizując prawdopodobieństwo powrotu do początku $P_{\Delta t}(Z = 0)$ (patrz rys. 8.5) wskazuje, że statystyki dla omawianych horyzontów czasowych można wyrazić za pomocą stabilnego, symetrycznego rozkładu Lévy'ego o indeksie α

$$P_{\Delta t}(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \chi_{\Delta t}(q) \cos(qZ) dq, \quad (8.14)$$

gdzie

$$\chi_{\Delta t}(q) \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(-\gamma \Delta t |q|^\alpha), \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{\tau}, \quad \Delta t = n\tau, \quad (8.15)$$

jest jego funkcją charakterystyczną (w przypadku rozkładu Gaussa, gdy $\alpha = 2$, $\gamma_0 = \sigma^2/2$). Z wyrażeń (8.14) i (8.15) otrzymujemy (po dokonaniu prostej zamiany zmiennych $q \Rightarrow \tilde{q} = (\gamma \Delta t)^{1/\alpha} q$), że prawdopodobieństwo powrotu do początku wynosi:

$$P_{\Delta t}(Z = 0) = \frac{1}{\pi} \Gamma_{Euler} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{1}{\alpha \cdot (\gamma \Delta t)^{1/\alpha}} = \frac{1}{\pi} \Gamma_{Euler} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \cdot (\gamma \Delta t)^{-1/\alpha}, \quad (8.16)$$

gdź

$$\Gamma_{Euler} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = \alpha \int_0^\infty \exp(-| \tilde{q} |^\alpha) d\tilde{q} = \int_0^\infty \exp(-y) \cdot y^{1/\alpha-1} dy, \quad (8.17)$$

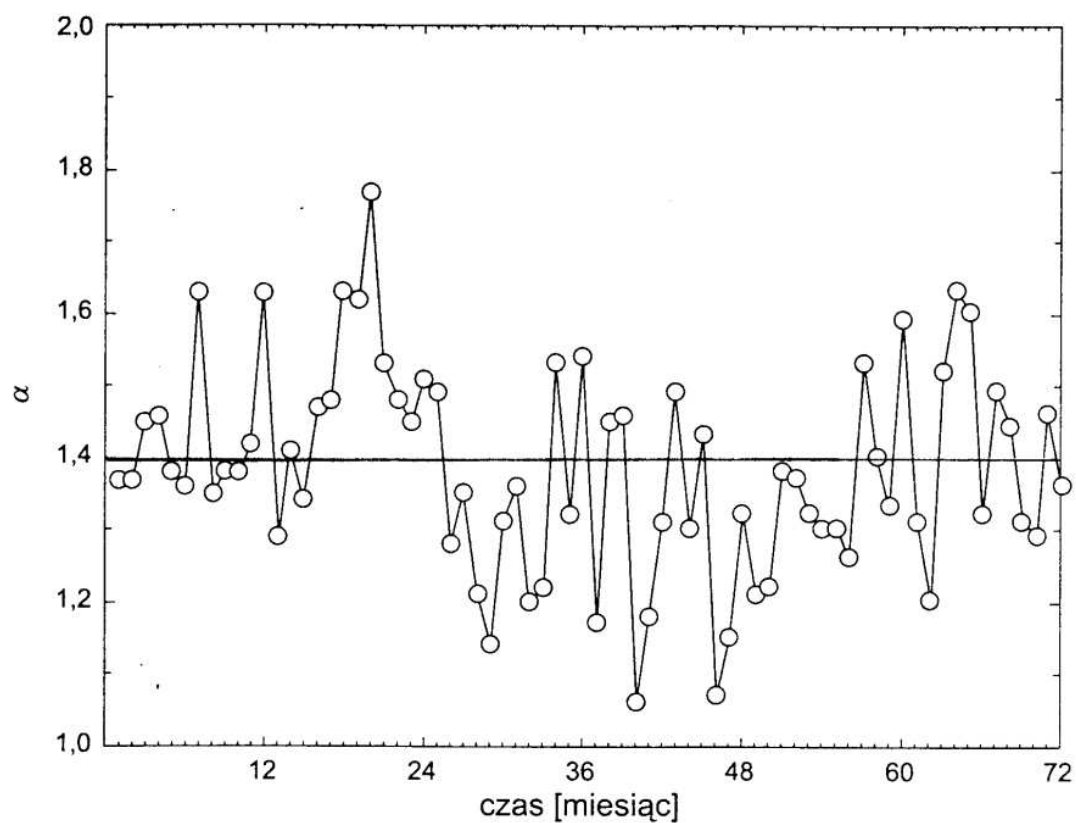
gdzie dokonaliśmy zamiany zmiennych $y = | \tilde{q} |^\alpha$. Dysponując konkretną wartością α , wyznaczamy czynnik skalujący γ z wyrażenia (8.16) i wielkości przesunięcia linii prostej (białe kółka) na wykresie (8.5).

Zauważmy, że zarówno eksponent α jak też czynnik skalujący γ zmieniają się w czasie - tutaj z miesiąca na miesiąc; te miesięczne wahania przedstawiono na rys. 8.6 i rys. 8.7. Jak widać, nawet największa wartość α jest znacznie mniejsza od 2 (typowy błąd pojedynczej wartości wykładnika α dla danego miesiąca podano w opisie rys. 8.5).

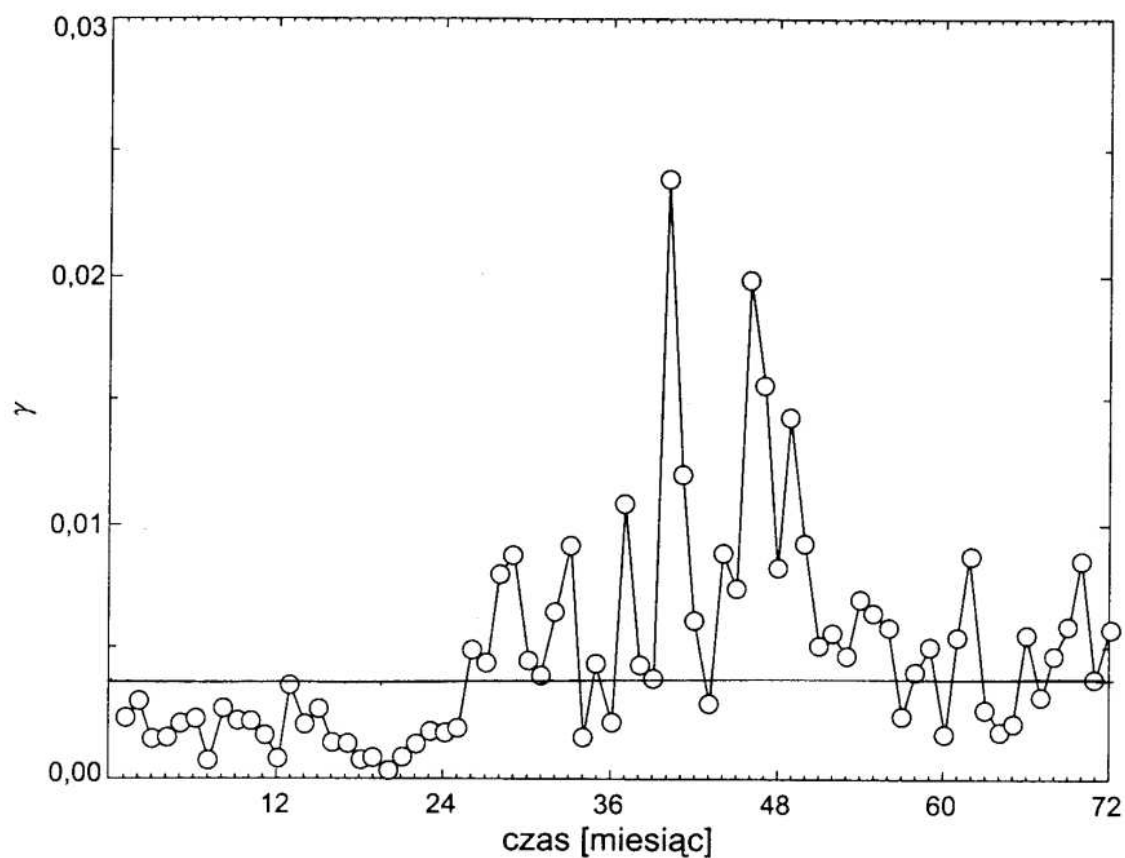
Konsekwencją zamiany q na $\tilde{q}$ jest zamiana w wyjściowej całce (8.14) zmiennej Z na $\tilde{Z} = Z/(\gamma \Delta t)^{1/\alpha}$ - dzięki temu otrzymujemy potrzebne wyrażenie

$$\tilde{P}(\tilde{Z}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-| \tilde{q} |^\alpha) \cos(\tilde{q} \tilde{Z}) d\tilde{q} \quad (8.18)$$

niezależne od Δt , przy czym jest ono powiązane z wyjściowym prawdopodobieństwem $P_{\Delta t}(Z)$ pierwszą relacją w (8.12). Zatem, opis zasadniczej części danych empirycznych za pomocą rozkładu Lévy'ego jest dowiedziony chociaż problem opisu kształtu samych "ogonów", jak też znaczny rozrzut danych na "ogonach" (patrz rys. 8.4 dla $| \tilde{Z} | \gtrsim 0.5$) jest wciąż zagadnieniem otwartym budzącym wielkie zainteresowanie. Warto podkreślić, że np. prawdopodobieństwo powrotu do początku dla rozkładu Gaussa skaluje się z wykładnikiem $\alpha = 2$ co definiuje zupełnie inny (normalny w przeciwieństwie do anomalnego) "świat statystyczny", w którym nie ma miejsca na zdarzenia rzadkie.



Rysunek 8.6: Zależność czasowa wykładnika α wyznaczona na podstawie zależności prawdopodobieństwa powrotu do początku od wielkości horyzontu czasowego (liczonego w miesiącach). Pozioma ciągła linia została poprowadzona dla przeciętnej wartości $\alpha = 1.40$.



Rysunek 8.7: Zależność czasowa czynnika skalującego γ wyznaczona na podstawie zależności prawdopodobieństwa powrotu do początku od wielkości horyzontu czasowego (liczonego w miesiącach). Pozioma ciągła linia została poprowadzona dla przeciętnej wartości $\gamma = 0.00375$.

8.2 Kolaps danych a Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne na NYSE

W roku 2006 ukazała się praca (K. Kiyono, Z.R. Struzik, Y. Yamamoto: "Criticality and Phase Transition in Stock-Price Fluctuations", Phys.Rev. Lett. **96** (2006) 068701-1-068701-4), która porównuje ze sobą przebieg indexu S&P 500 w dwóch istotnie różnych przedziałach czasowych:

- (1) zawierającym tzw. "czarny poniedziałek" ("black Monday") czyli poniedziałek 19 października 1987 roku, w którym index stracił niespodziewanie, w przeciągu ok. 10 min. blisko 1/3 swojej wartości (patrz rys. 8.8),
- (2) w obszarze nie zawierającym czarnego poniedziałku.

Na rys. 8.8 przedstawiono (w skali półlogarytmicznej) przebieg dziennych wartości (na zamknięciu $Z(t)$) indexu S&P 500 w latach 1984-1995. Okres ten jest szczególnie interesujący gdyż zawiera nie tylko tzw. czarny poniedziałek ("black Monday") 19 października 1987 roku, w którym wartość indeksu spadła o blisko 1/3, ale także przejawia wpływ wojny w Zatoce Perskiej. Oprócz tego, na rysunku tym zamieszczono wariogram pokazujący wysokoczęstotliwościowe, w 10 min. odstępach czasu, zmiany logarytmu indeksu, $Y(t) = \ln Z(t)$. Oczywiście, analiza przedstawionego tam szeregu czasowego wymaga jego wcześniejszego zdetrendowania.

Na rys. 8.9 przedstawiono (także w skali półlogarytmicznej) statystykę, $P_s(\Delta_s Z)$, zdetrendowanych zmian

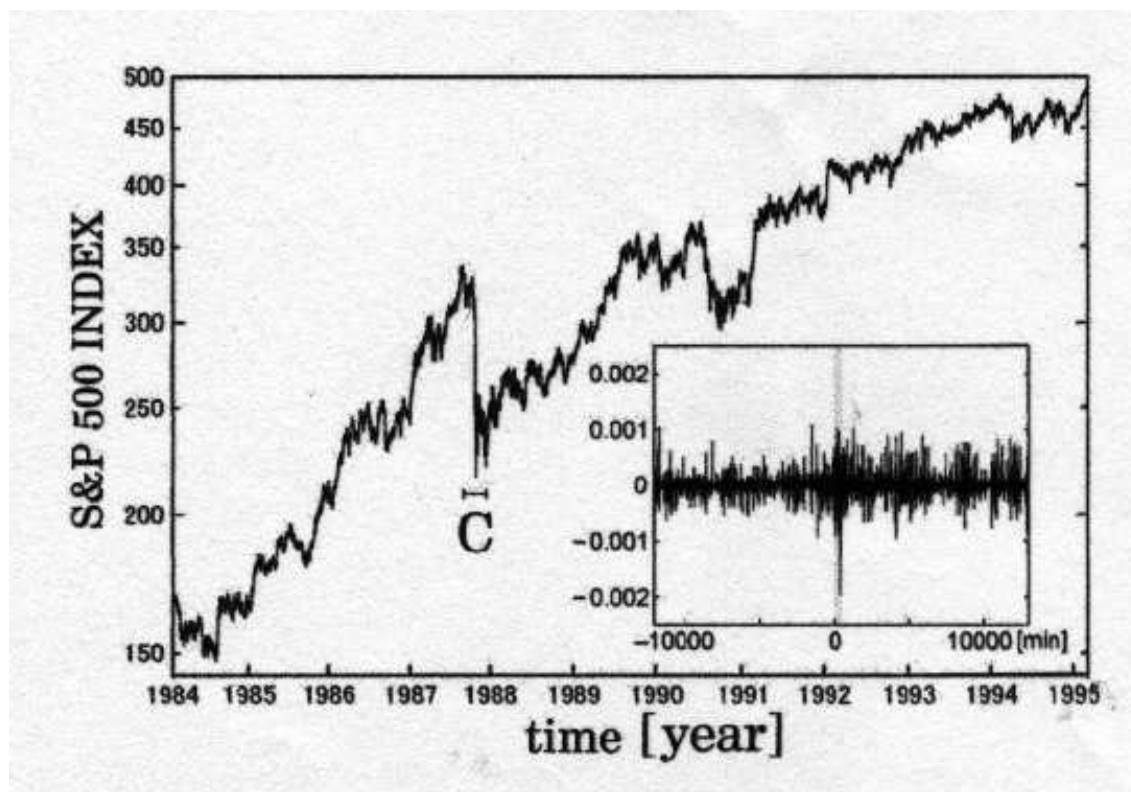
$$\Delta_s Z(t) \stackrel{\text{def.}}{=} Y^*(t+s) - Y^*(t), \quad (8.19)$$

(gdzie s jest horyzontem czasowym a gwiazdką oznaczono właśnie wielkość zdetrendowaną) dla jednego roku nie zawierającego wspomnianych powyżej szczególnych wydarzeń. Widoczne jest przejście od rozkładu niegaussowskiego do rozkładu Gaussa w miarę wzrostu horyzontu czasowego.

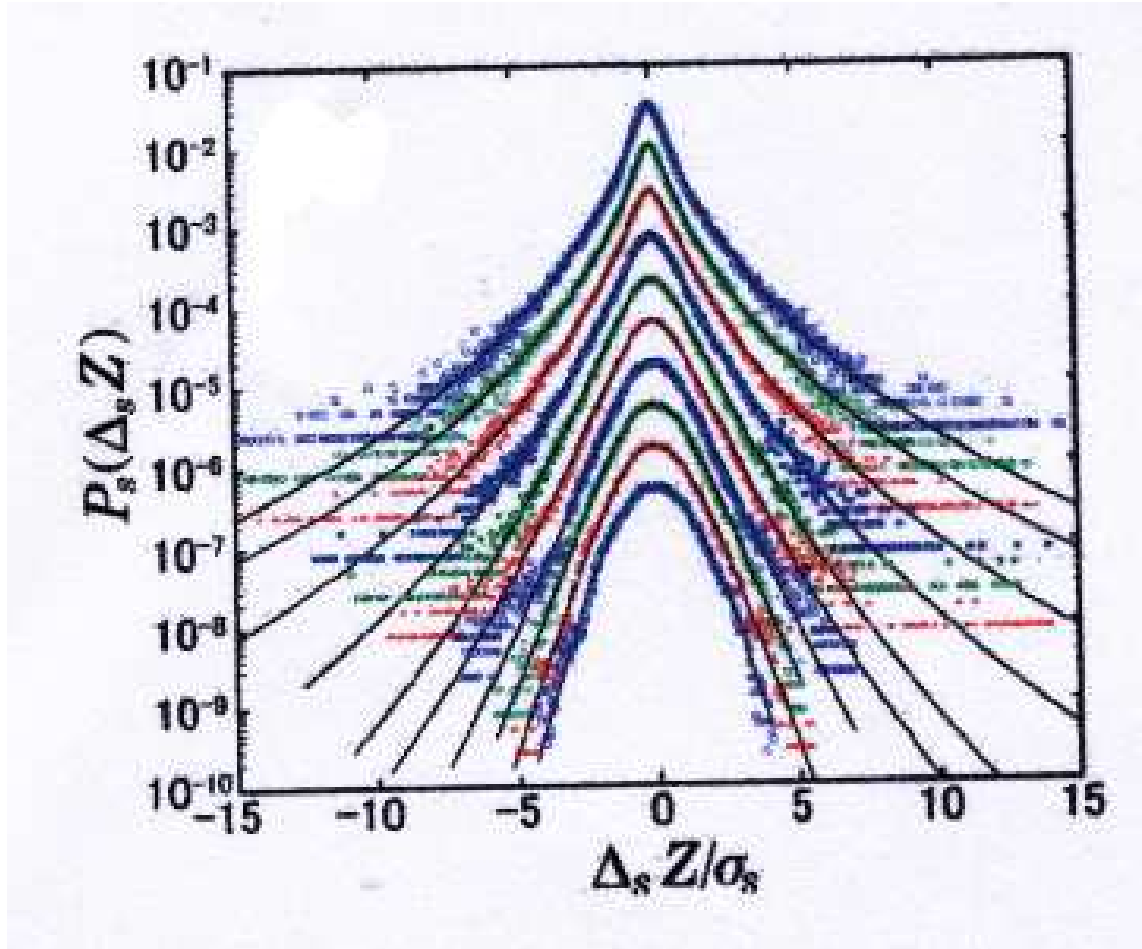
Na rys. 8.10 porównano statystykę $P_s(\Delta_s Z)$ dla dwóch kolejnych kwartałów roku 1987: rysunek po lewej stronie dotyczy kwartału bezpośrednio poprzedzającego czarny poniedziałek, natomiast rysunek po prawej stronie dotyczy czwartego kwartału tego roku zawierającego czarny poniedziałek. Jak widać, w drugim przypadku brak jest przejścia do rozkładu Gaussa - widoczne są tylko rozkłady niegaussowskie, które można (na drodze odpowiedniego przeskalowania) doprowadzić do tzw. kolapsu danych (patrz rys. 8.11); potwierdza to tym samym fakt, że mamy tutaj do czynienia z rozkładem stabilnym a więc, że na NYSE spełnione jest Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne.

8.3 Statistics of extremes

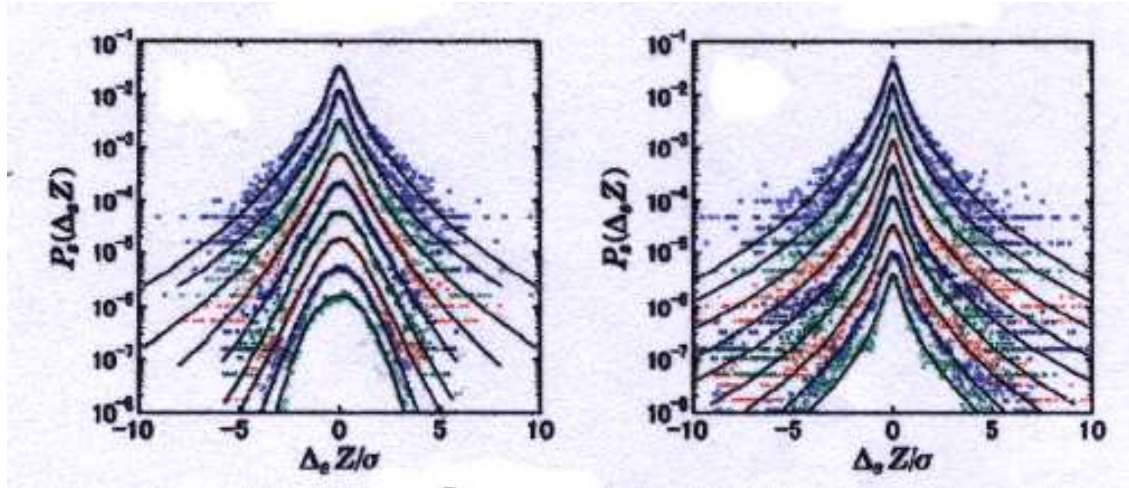
The central values and typical fluctuations are not sufficient to characterize natural systems which exhibit rare but extreme events often dominating the long-term be-



Rysunek 8.8: Dienne wartości indeksu S&P 500 w latach 1984-1996, przy czym w prawej dolnej części zamieszczono powiększony wariogram przedziału C , w którym znajduje się czarny poniedziałek widoczny w postaci najdłuższego odcinka leżącego po stronie ujemnej; szary pasek znajdujący się w centrum wariogramu ciągnący się poprzez całą jego wysokość oznacza po prostu pełny dzień transakcyjny czarny poniedziałek 19 października 1987 roku.

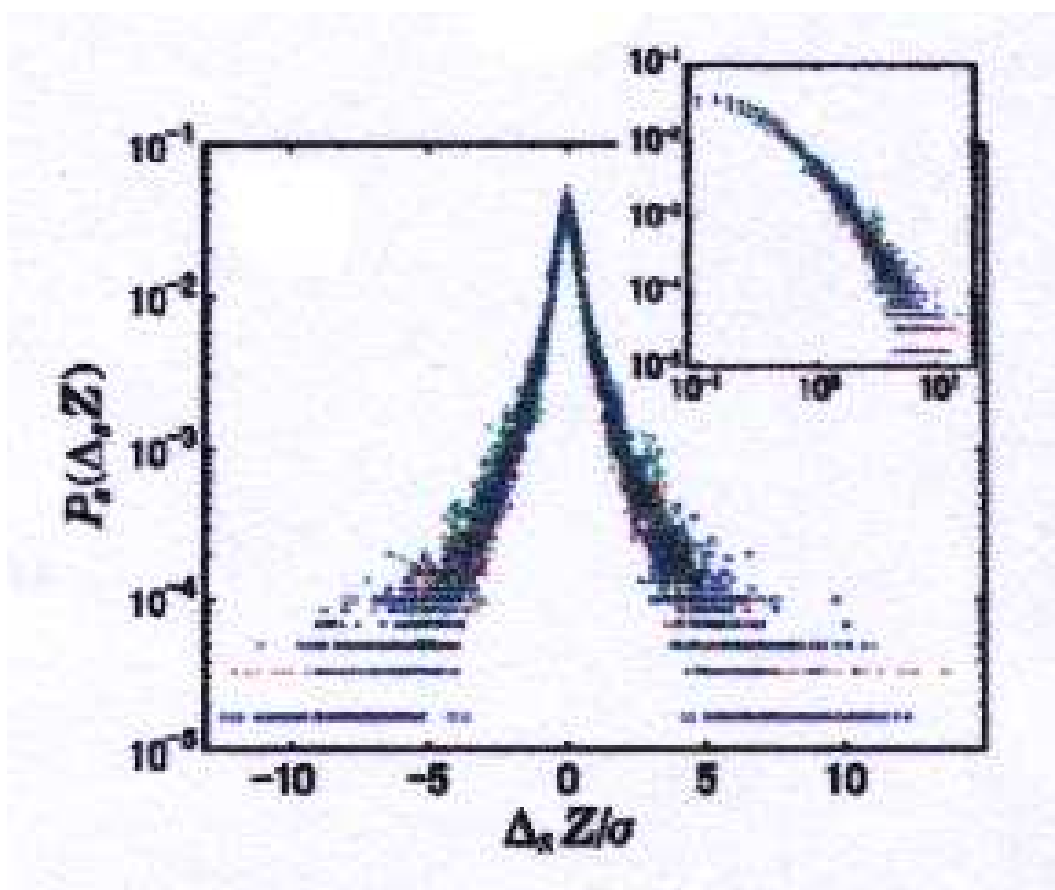


Rysunek 8.9: Statystyka $P_s(\Delta_s Z)$ zdetrendowanych zmian $\Delta_s Z$ w zależności od wielkości tych zmian po standaryzacji $\Delta_s Z / \sigma_s$ dla różnych horyzontów czasowych (idąc od góry $s = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 \text{ min.}$). Dane dla poszczególnych horyzontów czasowych zostały rozsunięte aby można je było rozróżnić.



Rysunek 8.10: Statystyka $P_s(\Delta_s Z)$ zdetrendowanych zmian $\Delta_s Z$ w zależności od wielkości tych zmian po standaryzacji $\Delta_s Z/\sigma_s$ dla różnych horyzontów czasowych (idąc od góry $s = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 \text{ min.}$) dla kwartału poprzedzającego czarny poniedziałek (rysunek po lewej stronie) i dla kwartału zawierającego czarny poniedziałek (rysunek po prawej stronie). Dane dla poszczególnych horyzontów czasowych zostały rozsunięte aby można je było rozróżnić.

haviour. Therefore the statistics of extrema is a classical subject of great interest in mathematics, physics and economical and social sciences [1, 2, 3]. In physics, extreme events have been studied in a number of fields [4] (and refs. therein) including self-organized fluctuations and critical phenomena, material fracture, disordered systems at low temperatures, and turbulence. Knowledge of extreme event statistics is of fundamental importance to predict and estimate the risk in a variety of natural and man-made phenomena such as earthquakes, changes in climate conditions, floods and large movement in financial markets. A new field where extreme statistics is of interest are complex networks [4].



Rysunek 8.11: Kolaps danych czyli statystyka $P_s(\Delta_s Z)$ zdetrendowanych zmian $\Delta_s Z$ w zależności od wielkości tych zmian po przeskalowaniu zmiennej $\Delta_s Z/\sigma_s$ i tegoż rozkładu dla kolejnych horyzontów czasowych (idąc od góry $s = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 \text{ min.}$) dla kwartału zawierającego czarny poniedziałek.

8.3.1 Twierdzenie Graniczne Maksimów

Filarem statystycznej Teorii Zdarzeń Ekstremalnych (ang. *Extreme Value Theory* w skrócie EVT zwanej też *Theory of Extreme Values*) jest Twierdzenie Graniczne Maksimów (ang. *Maximum Limit Theorem*) autorstwa Gniedenki [5, 11, 6]. Przedstawiamy je tutaj bez dowodu w wersji dla ciągłej zmiennej losowej, wskazując (w następnym paragrafie) na jego praktyczne znaczenie.

Twierdzenie 8.3.1.1 (Maximum Limit Theorem) *Niech dany będzie ciąg niezależnych, ciągłych zmiennych losowych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o identycznym rozkładzie i niech $x_n^{\max} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Jeśli istnieje ciąg zbieżny trójek liczb $(a_n(> 0), b_n, \gamma_n) \rightarrow (a(> 0), b, \gamma)$, czyli parametry odpowiedzialne, odpowiednio, za standaryzację, centralizację i kształt, a niezdegenerowana dystrybuenta graniczna*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n^{\max} \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\gamma_n} \left(\frac{x - b_n}{a_n} \right) = H_{\gamma} \left(\frac{x - b}{a} \right),$$

jest dobrze określona dla każdego x , to ta dystrybuenta może przybierać tylko jedną z trzech następujących postaci granicznych:

(i) *Frécheta*

$$H_{Fr}(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{for } x > 0, \alpha > 0. \end{cases} \quad (8.20)$$

(ii) *Gumbela*

$$H_{Gu}(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad \text{for } x \in \mathcal{R}. \quad (8.21)$$

(iii) *Weibulla*⁶

$$H_{Wei}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & \text{for } x < 0, \alpha < 0 \\ 0, & \text{for } x \geq 0. \end{cases} \quad (8.22)$$

Oczywiście, rozkłady Frécheta, Gumbela i Weibulla uzyskuje się jako pochodne odpowiednich, powyżej podanych dystrybuant, po ich górnych granicach, czyli po zmiennej x .

Warto zauważyć, że rozkłady Weibulla i Frécheta są komplementarne w takim sensie, że cała ich zmienność lokuje się na nośnikach komplementarnych. Jednakże, ich kształty różnią się istotnie (pomimo formalnego podobieństwa), gdyż określające je parametry kształtu są przeciwnego znaku.

⁶Dokładniej rzecz biorąc, jest to tzw. odwrotny rozkład Weibulla. Rozkład Weibulla [7] opisuje statystykę wartości minimalnych.

Okazuje się, że powyższe trzy dystrybuanty można wyrazić za pomocą uogólnionej dystrybuanty wartości ekstremalnych (ang. *Generalized Extreme Value Distribution*, w skrócie GEVD)

$$H_\gamma(x) = \exp\left(- (1 + \gamma \cdot x)_+^{-1/\gamma}\right), \quad (8.23)$$

gdzie $(\dots)_+ = \max(0, (\dots))$. Dziedzina tej uogólnionej dystrybuanty zależy od parametru kształtu⁷ γ w następujący sposób:

- 1) gdy $\gamma > 0$ wówczas $x \in]-1/\gamma, \infty]$ i wtedy mamy do czynienia z dystrybuantą (przesuniętego i przeskalowanego) rozkładu Fréchet’a (patrz wzór (8.20)), gdzie $1/\gamma = \alpha$;
- 2) dla $\gamma < 0$ dysponujemy $x \in [-\infty, -1/\gamma[$ i wtedy mamy do czynienia z dystrybuantą (przesuniętego i przeskalowanego) rozkładu Weibulla (patrz wzór (8.22)), gdzie $1/\gamma = \alpha$;
- 3) w przypadku $\gamma \rightarrow 0$ dziedzina x nie jest ograniczona - mamy wtedy do czynienia z dystrybuantą rozkładu Gumbela (patrz wzór (8.21)).

Należy podkreślić, że **wyznaczenie parametrów granicznych a i b a zwłaszcza parametru kształtu γ z danych empirycznych jest podstawowym, pragmatycznym zadaniem Teorii Zdarzeń Ekstremalnych.**

W rozdz. 8.3.2 przedstawiamy alternatywne, nie tak wyspecyfikowane podejście do statystyk zdarzeń ekstremalnych oparte na rozkładach bazowych, z których odlosowywane są wspomniane w Twierdzeniu 8.3.1.1 ciągi niezależnych zmiennych losowych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Wartość Zagrożona Ryzykiem a uogólniony rozkład wartości ekstremalnych

Wyznaczenie tzw. 'Wartości Zagrożonej Ryzykiem' (ang. *Value at Risk*, VaR), oznaczającej maksymalną dopuszczalną stratę, za pomocą GEVD stanowi jeden z najważniejszych sukcesów EVT - wyznaczenia tego dokonamy w niniejszym podrozdziale.

Przypuśćmy zatem, że zadaliśmy poziom ufności $1 - \alpha$ (tego typu oznaczenie⁸ stanie się jaśniejsze w rozdz. 8.1, gdzie dokładniej analizujemy własności VaR) - stowarzyszona z tym poziomem wartość dystrybuanty⁹

$$F(VaR_{1-\alpha}) = \mathcal{P}(x < VaR_{1-\alpha}) = 1 - \alpha. \quad (8.24)$$

⁷Parametr kształtu $\gamma \propto \frac{1}{\alpha}$, gdzie α to wykładnik definiujący rozkład Fréchet’a i rozkład Weibulla w Twierdzeniu 8.3.1.1.

⁸Proszę nie mylić tego, powszechnie używanego oznaczenia, z oznaczeniem wykładnika wprowadzonego w rozdz. 8.3.1.

⁹Dokładniej rzecz biorąc, przez dystrybuantę rozumiemy wyrażenie $F(VaR_{1-\alpha}) = \mathcal{P}(x \leq VaR_{1-\alpha})$ - w naszym przypadku ciągłej zmiennej losowej jest to bez znaczenia. Dodajmy, że wtedy o dystrybuancie (8.24) mówimy, że jest kwantylem rzędu $1 - \alpha$.

Możemy teraz łatwo wyznaczyć dystrybuantę wartości ekstremalnej pamiętając, że z założenia bierzemy pod uwagę tylko takie odlosowane wartości zmiennej x , jakie są nie większa od wartości progowej $VaR_{1-\alpha}$. Mianowicie, dla dostatecznie dużych wartości n , na mocy Tw. 8.3.1.1, zachodzi z dobrym przybliżeniem

$$H_\gamma\left(\frac{VaR_{1-\alpha} - b}{a}\right) \approx \mathcal{P}(x_n^{max} < VaR_{1-\alpha}) = [\mathcal{P}(x < VaR_{1-\alpha})]^n = (1 - \alpha)^n, \quad (8.25)$$

gdzie n -ta potęga występująca po prawej stronie bierze się stąd, że każda z $n \gg 1$ odlosowywanych wartości ciągu $(x_1, \dots, x_n)$ musi być mniejsza od przyjętej wartości progowej $VaR_{1-\alpha}$.

Podstawiając teraz (8.23) do lewej strony (8.25) otrzymujemy ostatecznie po prostych przekształceniach

$$VaR_{1-\alpha} \approx b + \frac{a}{\gamma} \left[(-n \ln(1 - \alpha))^{-\gamma} - 1 \right]. \quad (8.26)$$

Do analizy własności VaR i szerzej, do analizy ryzyka oraz związanych z nim strat, powrócimy w rozdz. 8.4.

8.3.2 Rozkład maksimów a rozkład bazowy - ogólna formuła

If one observes a series of L independent realizations of the same random phenomenon (or its stochastic replica), the central question of the Extreme Value Theory (EVT) imposes how to characterize the maximum observed value of random variables¹⁰ $x_{max} \stackrel{\text{def.}}{=} \max\{x_l\}_{l=1, \dots, L}$. For example, the maximum value could be the deepest trap encountered by the walker in a disordered medium (then we would have $x \equiv \varepsilon$, where ε is the energetic depth of the trap) or the longest mean residence time (called also the sojourn time of the walker) in such a trap (then we would have $x \equiv \tau$, where τ is the mean residence time).

The main goal of the EVT is to characterize x_{max} by determination of the probability distribution, $P(x_{max} = \Lambda)$, of the maximal value x_{max} , where Λ is an arbitrary threshold. In the case of dispersive transport and diffusion we apply the EVT to characterize, the mentioned above two, related, stochastic variables (ε and τ).

First, we calculate the cumulative probability distribution $\mathcal{P}(x_{max} < \Lambda)$ of the random variable x_{max} by noting that if the maximum x_{max} is smaller than Λ then all x_l 's are also smaller than this threshold and vice versa. As these random variables are independent and identically distributed (iid), we can put

$$\mathcal{P}(x_{max} < \Lambda) = [\rho_{<}(\Lambda)]^L = [1 - \rho_{>}(\Lambda)]^L, \quad (8.27)$$

by assuming the cumulative probability distribution of random variable x

$$\rho_{<}(\Lambda) = \int_{x_{down}}^{\Lambda} \rho(x) dx, \quad (8.28)$$

¹⁰We developed the Extreme Value Theory by considering continuous variables and assuming simplified notation x_{max} instead of x_n^{max} used in Sec. 8.3.1, where $n \equiv L$.

where $\rho(x)dx$ is the basic probability that the random variable x can be found in the interval $x, x + dx$, and x_{down} is the lowest value which this variable can assume. Of course, the second equality in expression (8.27) comes from the normalization of the probability density (or distribution) $\rho(\dots)$ where

$$\rho_{>}(\Lambda) = \int_{\Lambda}^{x_{up}} \rho(x)dx, \quad (8.29)$$

here x_{up} is the largest value which the variable x can assume. We set here $x_{down} \ll \Lambda \leq x_{up}$ so that the strong inequality $\rho_{>}(\Lambda) \ll 1$ is obeyed. Therefore, the second equality in expression (8.27) takes, with a good approximation, the useful form

$$\mathcal{P}(x_{max} < \Lambda) \approx \exp(-L \cdot \rho_{>}(\Lambda)). \quad (8.30)$$

In this way, we reached our second step, namely the intermediate formula useful for further transformations

$$P(x_{max} = \Lambda) = \frac{d\mathcal{P}(x_{max} < \Lambda)}{d\Lambda} \approx L \cdot \rho(\Lambda) \cdot \exp(-L \cdot \rho_{>}(\Lambda)), \quad (8.31)$$

where the notation $\rho(\Lambda) = \rho(x = \Lambda)$ and definition (8.29) have been introduced.

In the third step, we relate the number of observations (L) to the rare event. The law of large numbers tells us that one can expect to observe (typically) such events which have a probability at least equal to $1/L$. Hence, it would be surprising to encounter an event which has a probability much smaller than $1/L$. The largest event Λ_{max} , observed in a series of $L \gg 1$ iid random variables (which we call indeed the rare one), is thus given by relation

$$\rho_{\geq}(\Lambda_{max}) = \frac{1}{L}. \quad (8.32)$$

We can call the above definition of the rare event the weak one; the stronger definition (which seems to be even easier to interpret) could have the form

$$\rho(\Lambda_{max}) = \frac{1}{L}, \quad (8.33)$$

which is, however, less convenient (from the technical point of view of the general approach)¹¹. Since now we operate with two types of max-variables our aim is to find the probabilistic relation between them.

By combining eqs.(8.30), (8.31) and (8.32) we finally find the general formula for the searched distribution

$$P(x_{max} = \Lambda) \approx \frac{\rho(\Lambda)}{\rho_{\geq}(\Lambda_{max})} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_{>}(\Lambda)}{\rho_{\geq}(\Lambda_{max})}\right). \quad (8.34)$$

¹¹Note that for most cases analytically solvable both definitions give identical shapes of distributions of random variables which require only rescaling by additive and/or multiplicative constants.

It is just the above formula that we use to get the Gumbel and Fréchet distributions as well as to find a relation between them.

Warto dodać dla kompletności, że dystrybuanta (8.30) przybiera teraz postać

$$\mathcal{P}(x_{max} < \Lambda) \approx \exp \left(-\frac{\rho_{>}(\Lambda)}{\rho_{\geq}(\Lambda_{max})} \right). \quad (8.35)$$

nie tak wyspecyfikowaną jak GEVD podana w rozdz. 8.3.1.

8.3.3 The Gumbel distribution versus the Fréchet one

We assume that disordered substrate (medium) is characterized by the random-trap or valley model defined on a regular lattice. Therefore, all valleys are equally spaced but have different (energetic) depths, $\{\varepsilon > 0\}$, while the mountain peaks are all at the same energy level. It is assumed that the distribution of depths is exponential

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right) \quad (8.36)$$

which was done by many authors. The visible aspect of the random-trap model is its symmetry where (in absence of a bias) there is no tendency for the carrier to drift from any configuration of traps. Hence the carrier hops in any possible direction have an equal probability and the different hops between valleys are, of course, uncorrelated. We use the above given distribution as a basis for further considerations.

The Gumbel distribution. As we already mentioned in Sec.8.3.2, we can identify the random variables $x \equiv \varepsilon$. Moreover, from expression (8.36) we find

$$\begin{aligned} \rho(\Lambda) &= \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \exp \left(-\frac{\Lambda}{\langle \varepsilon \rangle} \right), \\ \rho_{>}(\Lambda) &= \exp \left(-\frac{\Lambda}{\langle \varepsilon \rangle} \right), \quad \rho_{\geq}(\Lambda_{max}) = \exp \left(-\frac{\Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} \right), \end{aligned} \quad (8.37)$$

required to express formula (8.34) in an explicit form. Note that the third expression (8.37) together with (8.33) gives an explicit, unique relation between the value of the rare event Λ_{max} and the number of observations L

$$\frac{\Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} = \ln(L), \quad (8.38)$$

which points to a slow (logarithmic) growth¹² with increasing L .

¹²For the stronger definition of the rare event (8.33) we obtain $\Lambda_{max}/\langle \varepsilon \rangle = \ln(L/\langle \varepsilon \rangle)$ while the Gumbel distribution (8.41) of variable u defined by (8.40) is unaffected.

By using (8.37), formula (8.34) takes an intermediate form

$$P(\varepsilon_{max} = \Lambda) \approx \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \exp \left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} \right) \exp \left(-\exp \left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} \right) \right). \quad (8.39)$$

To obtain the searched distribution in a closed, explicit form the following transformation of variable ε_{max} or Λ should be made

$$u \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\varepsilon_{max} - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} = \frac{\Lambda - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} \Rightarrow du = \frac{\Lambda}{\langle \varepsilon \rangle}; \quad (8.40)$$

hence and by expression (8.39) we finally obtain the well known Gumbel distribution

$$P(u) = \exp(-u) \exp(-\exp(-u)) \quad (8.41)$$

of the u random variable, where we tacitly use the invariance of the probability under the monotonic transformation of random variable (invariant measure); thus we used the equality

$$P(\varepsilon_{max} = \Lambda) d\Lambda = P(u) du. \quad (8.42)$$

Zauważmy, że rozkład (8.41) można otrzymać, jak trzeba, jako pochodną dystrybucyj rozkładu Gumbela danej wzorem (8.21), przy czym $u \equiv x$.

Note that the most probable value of the distribution (8.41) is $u = 0$ which shows that, paradoxally, the rare event Λ_{max} is the most probable value among ε_{max} 's. On the other hand, when $u \rightarrow \infty$ the Gumbell distribution $P(u \rightarrow \infty) \rightarrow \exp(-u)$. Hence, the distribution of random variable ε and the analogous (although asymptotic) one of variable ε_{max} are exponential. We can say that the exponential distribution is asymptotically stable with respect to the 'max' operation.

The Fréchet distribution. Now we are ready to answer the question concerning the distribution of sojourn times of the walker in traps and find (by using formula (8.34)) the distribution of its longest values present within a given series of observations. Then (as we mentioned at the beginning of Sec. 8.3.2) we assume that the random variable $x \equiv \tau$.

Accordingly, as the first step we perform the transformation

$$\begin{aligned} \varepsilon \Rightarrow \tau(\varepsilon) &= \tau_0 \exp(\beta' \varepsilon) = \tau_0 \cdot (\tau')^{\varepsilon/\Delta}, \\ \rho(\varepsilon) \Rightarrow \rho'(\tau(\varepsilon)) &= \frac{1}{\tau_0} \frac{\alpha}{(\tau/\tau_0)^{\alpha+1}} \end{aligned} \quad (8.43)$$

where we set $\tau' = \exp(\beta' \cdot \Delta)$, as we consider over-barrier jumps of a carrier (here Δ denotes the energy unit), and the exponent

$$\alpha = \frac{\ln(N)}{\ln(\tau')} = \frac{1}{\beta' \cdot \langle \varepsilon \rangle}. \quad (8.44)$$

To derive of the second equality in (8.43) we used again the invariance of the probability under the monotonic transformation of random variable (as given by the first equation of (8.43)), i.e. we used the positively oriented equality

$$\rho'(\tau)d\tau = \rho(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (8.45)$$

Note that the *exponential transformation of the random variable leads to the transformation of its (invariant) probability distribution from the exponential one to the power-law*. Conversely, the *logarithmic transformation of random variable leads to the transformation of its probability distribution from the power-law to exponential ones*.

From the second relation in (8.43) and definition (8.29) we can easily calculate the probability

$$\rho'_{>}(\Lambda) = \frac{1}{(\Lambda/\tau_0)^\alpha}. \quad (8.46)$$

and hence

$$\rho'_{\geq}(\Lambda_{max}) = \frac{1}{(\Lambda_{max}/\tau_0)^\alpha}. \quad (8.47)$$

necessary to obtain probability distribution (8.34) in an explicit form¹³. Note that by using eq. (8.32) we obtain Λ_{max} as a power-law function of L ¹⁴

$$\frac{\Lambda_{max}}{\tau_0} = L^{1/\alpha}. \quad (8.48)$$

It should be noted that the same result is obtained if we use the rare event of energy depth of traps (8.38) as a power (divided by Δ) of τ' which gives self-consistency of the approach.

By introducing formulae (8.46) and (8.47) into (8.34) we obtain after straightforward calculations

$$P(\tau_{max} = \Lambda) = \frac{1}{\Lambda_{max}} \cdot \frac{\alpha}{(\Lambda/\Lambda_{max})^{\alpha+1}} \exp(-1/(\Lambda/\Lambda_{max})^\alpha) \quad (8.49)$$

Hence we finally obtain the Fréchet distribution

$$P(u) = \frac{\alpha}{u^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{1}{u^\alpha}\right) \quad (8.50)$$

of $u \stackrel{\text{def.}}{=} \Lambda/\Lambda_{max}$ variable, where as usual we used the invariance of the probability under the monotonic transformation of random variable, i.e. we used the equality

$$P(\tau_{max} = \Lambda)d\Lambda = P(u)du. \quad (8.51)$$

¹³The Λ variable used here relates to τ and not ε one.

¹⁴By using the stronger definition (8.33) of the rare event one gets a related scaling law $\Lambda_{max}/\tau_0 = (L/(\tau_0 \cdot \alpha))^{1/(\alpha+1)}$.

Zauważmy, że rozkład ten można uzyskać, jak trzeba, jako pochodną dystrybuanty Fréchet (8.20), gdzie $u \equiv x$.

It can be easily found that the most probable value of τ_{max} is proportional to the value of the rare event Λ_{max} ¹⁵.

As it is seen, for $u \gg 1$ the Fréchet distribution is the power-law of exponent $1 + \alpha$ with the power-law correction to the scaling of exponent α since

$$P(u) \approx \frac{\alpha}{u^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{1}{u^\alpha}\right). \quad (8.52)$$

Analogously to the Gumbel distribution, we can again say that the power-law tail is asymptotically stable with respect to the 'max' operation.

Relation between the Gumbel and Fréchet distributions. The above considerations show that, when we made the transformation from the random variable ε to its exponential representation $\tau(\varepsilon)$ (cf. the first relation in (8.43)) as a result we transformed the Gumbel to the Fréchet distributions. In other words, the Gumbel distribution characterizes an additive stochastic process while the multiplicative one is characterized by the Fréchet distribution (where relation between both processes is given by the *log* operation).

8.3.4 Pictorial analysis of rank ordering

The main goal of this section is to show the decisive role of rare events in Hierarchical Continuous-Time Random Walk (HCTRW) for asymptotic many time-steps. To make our analysis more convenient we treat variable ε/Δ as a discrete one which is possible as Δ can be always assumed to be sufficiently small (i.e. by assuming $\Delta \ll \bar{\varepsilon}$). Again, we assume that $x \equiv \tau$ is our random variable distributed according to the power-law defined by the second expression in (8.43). Now, we introduce the discrete notation $j = \frac{\varepsilon}{\Delta}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, and define $N = \exp(\frac{\Delta}{\bar{\varepsilon}})$; hence, with a good approximation, $\frac{\Delta}{\bar{\varepsilon}} \approx 1 - \frac{1}{N}$, which makes the transformation to the discrete distribution

$$\rho(\varepsilon) \Rightarrow \rho''(j) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{N^j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.53)$$

and the definition of the rare event

$$\rho''(j_{max}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{N^{j_{max}}}, \quad (8.54)$$

clear¹⁶.

Hierarchical waiting-time distribution in a discrete representation. Note that our hierarchical waiting-time distribution, $\psi(t)$ (which is the basic function of the

¹⁵More precisely, $\tau_{max} = (\alpha/(1 + \alpha))^{1/\alpha} \cdot \Lambda_{max}$ and only for $\alpha \rightarrow \infty$ variable $\tau_{max} = \Lambda_{max}$.

¹⁶In the above derivation we simply exchanged $d(\frac{\varepsilon}{\Delta})$ for 1. Note that the distribution has still an exponential form and its normalization is conserved, as it should be.

HCTRW) assumes, within the above introduced discrete representation, the following useful form

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho''(j) \cdot \psi_j(t), \quad (8.55)$$

where the conditional Poisson waiting-time distribution

$$\psi_j(t) = \frac{1}{\tau_0(\tau')^j} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_0 \cdot (\tau')^j}\right), \quad (8.56)$$

and $\rho''(j)$ is the weight which plays a fundamental role in these considerations. (Of course, this discretized $\psi(t)$ conserves the normalization and scaling). For example, the sojourn time can be easily calculated by using the weight,

$$\langle t \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \rho''(j) \cdot \langle t \rangle_j, \quad \langle t \rangle_j = \tau(j) = \int_0^{\infty} t \cdot \psi_j(t) dt = \tau_0 \cdot (\tau')^j. \quad (8.57)$$

Note that the partial residence time $\langle t \rangle_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, is always finite but the total residence time is finite only when $\alpha > 1$ and equal to

$$\langle t \rangle = \tau_0 \cdot \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{\tau}{N}}; \quad (8.58)$$

otherwise it diverges which fully agrees with the result shown in Sec.2.2. Hence, to obtain $\langle t \rangle$ finite the weight $\rho''(j)$ must converge sufficiently quickly with the increase of variable j .

It is decisive for our present considerations that the ratio of successive weights

$$\frac{\rho''(j+1)}{\rho''(j)} = \frac{1}{N}, \quad (8.59)$$

be already j -independent. This means that in each single-step the residence of a carrier in a trap with sojourn time $\tau_0 \cdot (\tau')^j$ or in state (or hierarchy level) j is N times more likely than those of the next larger order $j+1$. Hence, one expects (on the average) that the walker will visit N^j traps having the shortest sojourn time τ_0 before he encounters a sufficiently deep trap with a mean residence time $\tau(j) = \tau_0 \cdot (\tau')^j$, $j = 1, 2, \dots$

Practical aims. In Fig.8.12 the schematic illustration of this essential observation is given in the form of one-dimensional hierarchically ordered time-intervals or mean residence (sojourn) times in the corresponding traps. Here

- (i) we neglect (due to the Bernoulli law of large numbers) the fluctuation of the number of hierarchy levels as well as their succession (as we calculate the summarized quantities), and

$\rho''(j+1)/\rho''(j)=1/N$

For example: $N=3, \tau'=4$

self-similarity:
 $\alpha = \ln(N)/\ln(\tau') = 0.792$

Diagram illustrating a self-similar path (fractal plot) showing the relationship between $\rho''(j+1)/\rho''(j)=1/N$ and the fractal dimension α .

For example: $N=3, \tau'=4$

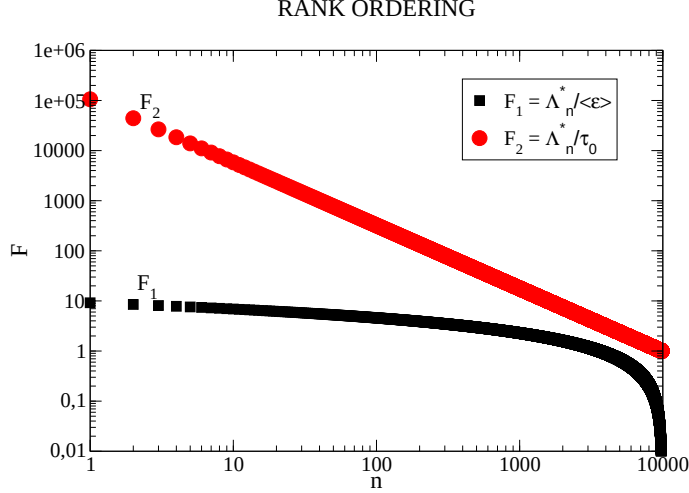
self-similarity:
 $\alpha = \ln(N)/\ln(\tau') = 0.792$

The plot shows a path with a red segment labeled "rare event: $\tau(j=2)$ " and a blue segment labeled "background event: $\tau(j=0)$ ".

(ii) plot only the length of the average time-intervals $\langle t \rangle_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$

- (1) the rank ordering of residence times,
- (2) the finite-size effect as scaling of characteristic quantities with the size of the hierarchy.

$$L(j) = N^j + N^{j-1} + \dots + N^1 + N^0 \approx \frac{1}{1 - 1/N} \cdot N^j. \quad (8.60)$$



Rysunek 8.13: The rank ordering of residence times and depths of traps described by the power-law (function F_1 , where Λ_n^* is given by eq.(8.77)) and logarithmic (F_2 , where Λ_n^* is given by eq.(8.76)) dependences, respectively.

The quantity $L(j)$ is also the total number of steps after which the walker encountered the trap with sojourn time $\tau_0 \cdot (\tau')^j$.

Now, we can set the rank $n = L(j)$ and look for the corresponding sojourn time as a function of n ranked according to its decreasing amplitude. Hence, we can write the one-to-one correspondence in the form: $n = L(j) \Leftrightarrow (\tau')^{j_{max}-j}$, where j_{max} is related to the total number of observations L ; by using relation (8.60) we can write

$$L = L(j_{max}) \approx \frac{1}{1 - 1/N} \cdot N^{j_{max}}. \quad (8.61)$$

From expressions (8.60) and (8.61) we calculate exponent $j_{max} - j$ and by introducing it into the formula for n given the above, we finally find the searched rank dependence

$$\tau(n) = \tau_0 \cdot (\tau')^{j_{max}-j} = \tau_0 \cdot \left(\frac{L}{n}\right)^{1/\alpha}, \quad (8.62)$$

which is (for large L) the power-law with exponent $-1/\alpha$. In Fig.8.13 we presented this dependence, for example, for $\alpha = 0.792$ (or $N = 3$ and $\tau' = 4$) and $L = 9841$. Eq.(8.62) shows that hierarchically organized encountered random variables lead to the power-law rank of their amplitudes. Speaking more precisely, we obtained a kind of descending devil's staircase whose average slope is asymptotically given by exponent $-1/\alpha$.

Empirical verification of the tail. The rank relation (8.62) is very useful in identifying the nature of the tails of probability distributions. The single-step procedure is as follows: one sorts in decreasing order the series of observed random variables (for example, τ 's) and one simply draws Λ_n (here equal to $\tau(n)$) as a function of n . If

variables are power-law distributed, this graph should be a straight line in a log-log plot, with a slope given by exponent $-1/\alpha$ (as shown, e.g., by expression (8.62)).

Decisive role of rare events. Our second aim is realized in connection with rare events. Now, we can prove that the (average) total time for which carrier stays in the traps encountered during L steps obeys the same scaling law with L as a rare event.

First, from (8.53) and (8.54) we easily obtain

$$\begin{aligned}\rho''_{\geq}(\Lambda) &= \sum_{j=\Lambda}^{\infty} \rho''(j) = \frac{1}{N^{\Lambda}} \Rightarrow \rho''_{\geq}(\Lambda_{max}) = \frac{1}{N^{\Lambda_{max}}} = \frac{1}{L} \\ &\equiv \Lambda_{max} = \frac{\ln(L)}{\ln(N)},\end{aligned}\quad (8.63)$$

where the second relation defines the rare event in agreement with weaker definition (8.33). Hence, we have

$$(\tau')^{\Lambda_{max}} = L^{1/\alpha}. \quad (8.64)$$

By using relations (8.61) and (8.54), we find that just j_{max} is the rare event in the stronger sense given by (8.33); thus,

$$(\tau')^{j_{max}} = [(1 - \frac{1}{N}) \cdot L]^{1/\alpha}, \quad (8.65)$$

which means that the difference $\Lambda_{max} - j_{max} = \ln N / \ln(1 - 1/N)$ is an unimportant constant.

The total time mentioned above is given by the following sum

$$\begin{aligned}\frac{t}{\tau_0} &\approx N^0(\tau')^{j_{max}} + N^1(\tau')^{j_{max}-1} + \dots + N^{j_{max}-1}(\tau')^1 + N^{j_{max}}(\tau')^0 \\ &= N^{j_{max}} \frac{(\frac{\tau'}{N})^{j_{max}+1} - 1}{\frac{\tau'}{N} - 1} \approx \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{N}} \cdot (\tau')^{j_{max}}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{1}{1-\frac{1}{N}} \cdot N^{j_{max}}, & \text{for } \alpha > 1, \end{cases}\end{aligned}\quad (8.66)$$

By introducing eq.(8.65) and eq.(8.61) into (8.66) we obtain the important relations

$$\frac{t}{\tau_0} \approx \begin{cases} \frac{(1-\frac{1}{N})^{1/\alpha}}{1-\frac{1}{N}} \cdot L^{1/\alpha}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{1}{N}} \cdot L, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases} \quad (8.67)$$

Note that both relations (8.66) and (8.67) distinguish two essentially different ranges of exponent α (the marginal case $\alpha = 1$ is not considered here). For the first range ($\alpha < 1$) we found t proportional to the rare event, i.e. it scales with the number of steps L in the same manner as the rare event; this is the main result of this section. The proportionality coefficient is called the (dimensionless) fractional residence time.

For the opposite, regular case the analogous coefficient is simply the residence time given above (cf. eq.(8.58) and second relation (7.34)).

Now, it is easy to calculate the dependence of the mean-time, $\langle t \rangle$, used by the walker for a single step, on L . For the asymptotic long L one can write the following average calculated along the L -step trajectory

$$\begin{aligned} \frac{\langle t \rangle}{\tau_0} &\approx \frac{N^{j_{max}}}{L}(\tau')^0 + \frac{N^{j_{max}-1}}{L}(\tau')^1 + \dots + \frac{N^0}{L}(\tau')^{j_{max}} \\ &\approx \begin{cases} \frac{(1-\frac{1}{N})^{1/\alpha}}{1-\frac{1}{N}} L^{\frac{1}{\alpha}-1}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{1}{N}}, & \text{for } \alpha > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (8.68)$$

Of course, this result can be obtained straightforward from expression (8.67) by deviding it simply by L .

Additional properties of rare events. It is useful to have a list of several simple properties of the rare events. The first question which we can easily answer is: how many potential rare events, l_{max} , typically appear within $L(\gg 1)$ events¹⁷? From (8.60) we immediately get (exchanging simply j for l_{max}): $l_{max} \approx \frac{\ln(L(l_{max}))}{\ln(N)}$.

The second question is: how the distance between the successive rare events increases with L ? Again from (8.60) we obtain

$$\Delta L(j) = L(j+1) - L(j) = N^{j+1} \approx (N-1) \cdot L(j); \quad (8.69)$$

i.e. this distance increases linearly with L .

The third question concerns the ratio of the value of the potential rare events and their difference. Directly from Fig.8.12 we find that this ratio is simply equal to τ' independently of L while their difference

$$\tau_0 \cdot [(\tau')^{l_{max}+1} - (\tau')^{l_{max}}] \approx \tau_0 \cdot (\tau' - 1) \cdot L^{1/\alpha}, \quad (8.70)$$

scales with L as a single rare event.

8.3.5 Generalized Extreme Value Theory

In this section we ask a more general question than in Sec.8.3.2 although we consider again a series of L independent observations of random, identically distributed variables. We can rank variables x_l , $l = 1, 2, \dots, L$, in decreasing order of their amplitude. We denote by Λ_n the n^{th} encountered value among these random variables. Hence, for example, $\Lambda_1 = x_{max}$ and $\Lambda_L = x_{min}$ (i.e. the minimal value of the variables x_l).

As the first step we are interested in the probability distribution $P_n(\Lambda_n) = P_n(x = \Lambda_n)$ of the random variable Λ_n . We can write the exact formula

$$P_n(\Lambda_n) = L \cdot C_{L-1}^{n-1} \rho(x = \Lambda_n) [\rho_{>}(\Lambda_n)]^{n-1} [\rho_{<}(\Lambda_n)]^{L-n}, \quad (8.71)$$

¹⁷The potential rare event is such an event which is the maximal one but within the given number of steps smaller than L .

where C_{L-1}^{n-1} denotes the combinatorial (or Newton binomial) factor. The product $L \cdot C_{L-1}^{n-1}$ gives the total number of ways to set Λ_n within all possible configurations of $L - 1$ elements, which remain random variables of the series. Note that for $n = 1$ the above formula simplifies to expression (8.31), as it is expected be.

In the second step we find the most probable value of Λ_n^* (for a given rank n). By differentiating probability distribution (8.71) and setting it equal to zero we obtain the formula

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \cdot \frac{d\rho(\Lambda_n)}{d\Lambda_n} \cdot \rho_{>}(\Lambda_n) \cdot \rho_{<}(\Lambda_n) &= \frac{n-1}{L} \cdot [\rho(\Lambda_n)]^2 \cdot \rho_{<}(\Lambda_n) \\ &+ \left(1 - \frac{n}{L}\right) \cdot [\rho(\Lambda_n)]^2 \cdot \rho_{>}(\Lambda_n) = 0 \end{aligned} \quad (8.72)$$

useful for further considerations particularly when $n, L \rightarrow \infty$ with fixed ratio n/L . Then the first term in (8.72) vanishes and we obtain the formula

$$\rho_{>}(\Lambda_n^*) \approx \frac{n}{L}. \quad (8.73)$$

which generalizes (8.32)¹⁸.

To complete information about distribution $P_n(\Lambda_n)$ in the vicinity of Λ_n^* we calculate, as our third step, its width σ_n . We find σ_n by using the saddle-point (or Gaussian) approximation from the second derivative of $\ln P_n(\Lambda_n)$ calculated at Λ_n^* since in this approximation one can use

$$\frac{d^2}{d\Lambda_n^2} \ln P_n(\Lambda_n) |_{\Lambda_n^*} = -\frac{1}{\sigma_n^2}. \quad (8.74)$$

Hence and from (8.71), we obtain immediately the width of the probability distribution $P_n(\Lambda_n)$ in the form

$$\sigma_n \approx \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{n}{L} \cdot (1 - \frac{n}{L})}}{\rho(\Lambda_n^*)} \quad (8.75)$$

which is more and more sharply peaked around its most probable value Λ_n^* as L tends to infinity (with fixed ratio n/L).

Two useful cases. Let's assume the case of exponential tail (given in Sec.8.3.3 by eq.(8.36)). By applying the second relation of eq.(8.37) to eq.(8.72) we obtain that

$$\Lambda_n^* \approx \langle \varepsilon \rangle \cdot \ln \left(\frac{L}{n} \right). \quad (8.76)$$

In the case of the power-law tail (given again in Sec.8.3.3 by the second equation in (8.43)) we obtain

$$\Lambda_n^* \approx \tau_0 \cdot \left(\frac{L}{n} \right)^{1/\alpha}, \quad (8.77)$$

¹⁸We used here the normalization condition $\rho_{<}(\Lambda_n) = 1 - \rho_{>}(\Lambda_n)$ which is valid for the continuous random variable.

which was already derived in Sec.8.3.4 by the simplified approach (of course, Λ_n^* present in the above formula is equivalent to $\tau(n)$ in formula (8.62)).

In Fig.8.13 we compare both the above derived results in the log-log plot (where we used $L = 9841$ and $\alpha = 0.792$). For the exponential distribution we observe an effective slope which is smaller and smaller as the rank variable n increases, i.e. the remarkable difference between both rank plots is well seen.

8.3.6 Concluding remarks

In the paper we present, in the context of amorphous materials, two essentially different types of transport and diffusion: above the temperature threshold $1/\beta' = \langle \varepsilon \rangle$ they are regular (normal) while below they are anomalous (i.e. non-Gaussian). We discuss, for these two regions, the asymptotic form of the spatial-temporal propagator, the time-dependent drift and the variance emphasizing their subdiffusive character. Moreover, we were able to show the decisive role of rare events in these anomalous types of transport and diffusion by matching the biased Hierarchical Continuous-Time Random Flight model and the Extreme Value Theory. We hope that this approach makes possible a deeper understanding of the transport and diffusion phenomena.

8.4 Nowoczesne podejście do oceny ryzyka

Przypuśćmy, że chcemy ocenić pojedynczą stratę $\Delta X < 0$ jaką moglibyśmy ponieść w horyzoncie czasowym τ , czyli np. na koniec dnia transakcyjnego (wówczas $\tau = 1$ [td]). W tym celu wprowadźmy **bazową gęstość prawdopodobieństwa strat**, $P_\tau(\Delta X)$, dla ustalonego horyzontu czasowego τ . Unormujmy ją (dla prostoty) w taki sposób, że $\int_{-\infty}^{-\Lambda_{up}} P_\tau(\Delta X) d(\Delta X) = 1$. W miarę potrzeb można wziąć pod uwagę pełniejszy sposób normalizacji, uwzględniający także zyski ($\Delta X > 0$). Tą gęstość prawdopodobieństwa należy rozumieć w taki sposób, że budująca ją statystyka empiryczna jest zbierana na koniec każdego dnia transakcyjnego τ . Oznacza to jednak, że nie bierze się tutaj pod uwagę dwóch istotnych efektów

- 1) kumulowania się strat w trakcie dnia transakcyjnego, z których każda z osobna jest mniejsza od dopuszczalnej straty, ale które w sumie przewyższają ją,
- 2) pojawienia się straty większej od dopuszczalnej w trakcie danego dnia transakcyjnego a nie na jego koniec.

Do zagadnień tych powrócimy w dalszej części tego rozdziału.

Na wstępie, dysponując rozkładem $P_\tau(\Delta X)$, określamy np. prawdopodobieństwo (absolutnej wartości) straty $-\Delta X = |\Delta X|$ nie mniejszej niż jakaś (dowolnie) ustalona przez nas dopuszczalna wielkość progowa Λ (tutaj $\Lambda \geq 0$):

$$\mathcal{P}(\Delta X \leq -\Lambda) = \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \int_{-\Lambda_{down}}^{-\Lambda} P_\tau(\Delta X) d\Delta X, \quad (8.78)$$

gdzie prawdopodobieństwo $\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)$ (wyrażane najczęściej w procentach) nosi nazwę **oceny ryzyka** (ang. *risk estimation*) lub **poziomu ufności** (ang. *confidence level*), wartość Λ nazywana jest poziomem strat (ang. *level of loss*), poziomem ryzyka (ang. *level of risk*) lub po prostu **ryzykiem** (ang. *risk*), wartość $\Lambda_{down}(\geq 0)$ jest maksymalną absolutną wartością potencjalnej straty jaką możemy ponieść, przy czym zakładamy, że $\Lambda \ll \Lambda_{down}$; w związku z tym można przyjąć, że $\Lambda_{down} \approx \infty$, co upraszcza obliczenia nie wpływając na (przybliżoną) postać ostatecznych wzorów.

W dalszym ciągu wprowadźmy w równaniu (8.78) jakąś konkretną wartość poziomu strat, którą nazwiemy 'Wartością Zagrożoną Ryzykiem', i oznaczmy przez $-\Lambda_{VaR}$ (skrót *VaR* jest akronimem angielskiej nazwy *Value at Risk*) - niech będzie to taki poziom strat, który odpowiada przyjętej ocenie ryzyka

$$\alpha = \mathcal{P}_{VaR} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{VaR}), \quad (8.79)$$

równej np. 1%. Oznacza to, że absolutna wartość straty większej lub równej stracie progowej $-\Lambda_{VaR}$ wystąpi (średnio rzecz biorąc) raz na $N = 100$ [td]; w przypadku 5% zaledwie raz na $N = 20$ [td]. Zatem, z dobrym przybliżeniem, dla $N \gg 1$, można przyjąć, że

$$\mathcal{P}_{VaR} \approx \frac{1}{N}. \quad (8.80)$$

Ogólnie rzecz biorąc, im większy jest poziom ufności tym mniejszy jest poziom strat. Zaznaczmy, że na wielkość N można patrzeć jak na średnią odległość (tutaj liczoną w dniach transakcyjnych) pomiędzy dwiema kolejnymi stratami nieprzewyższającymi tej progowej $-\Lambda$. Zatem, $1/N$ to średnia częstość występowania tych strat. Dodajmy, że badanie fluktuacji czasów międzytransakcyjnych jest jednym z ważniejszych zagadnień nie tylko ekono- i socjofizyki (patrz A. Bunde, J. Kropp, and H.J. Schellnhuber: *The Science of Disasters*, Springer-Verlag, Berlin 2002). Na tej drodze odkryto, na przykład, zjawisko grupowania się (klastrowania) dużych strat (warto tutaj przypomnieć sobie porzekadło, że "nieszczęścia chodzą parami"), co w istotny sposób wpływa na nasze rozumienie ryzyka. Co więcej, dla monofrakalnych szeregów czasowych przejawiających długookresowe korelacje, rozkład $P_{-\Lambda}(\Delta t)$ czasów międzytransakcyjnych strat nie mniejszych od $-\Lambda$ jest rozciągniętym eksponentem. Dla multifrakalnych szeregów czasowych stóp zwrotu rozkład ten przyjmuje postać q -wykładniczej funkcji Tsallisa (patrz J. Ludescher and A. Bunde: *Universal behavior of the interoccurrence times between losses in financial markets. Independence of the time resolution*, Physical Review E (2014), w druku).

Jak widać, równanie (8.79) wprowadza nas w świat parametrów pozycyjnych - kwantyli (patrz R. Nowak: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002), gdyż Wartość Zagrożona Ryzykiem, $-\Lambda_{VaR}$, jest po prostu kwantylem rzędu α . Zaletą tego podejścia jest fakt, że kwantyle dowolnego rzędu istnieją nawet wtedy gdy momenty rozkładu nie istnieją. Wydaje się, że jest ono najczęściej używanym we współczesnej ocenie ryzyka (patrz P. Jorin: *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, New York 2001).

Naszym celem jest wyznaczenie poziomu ryzyka $-\Lambda_{VaR}$ przy zadanej wielkości poziomu ufności $\mathcal{P}_{VaR}$, tzn. odwrócenie równości (8.79)

$$\Lambda_{VaR} = -\mathcal{P}_{\leq}^{-1}(\alpha) = -\mathcal{P}_{\leq}^{-1}(\mathcal{P}_{VaR}) \approx -\mathcal{P}_{\leq}^{-1}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (8.81)$$

W ogólności jest to zagadnienie rozwiązywalne tylko na drodze numerycznej jednakże dla kilku charakterystycznych przypadków można uzyskać rozwiązanie analityczne o czy mówimy poniżej. Zauważmy, że równanie (8.81) zależy w sposób globalny (sumaryczny) od nieznannej bazowej gęstości prawdopodobieństwa - jego postać jest wynikiem przyjętego modelu i musi, rzecz jasna, podlegać weryfikacji empirycznej.

8.4.1 Zasadnicze pytania

Możemy teraz postawić pytanie charakterystyczne dla Teorii Zdarzeń Ekstremalnych (ang. *Extreme Value Theory*) (patrz rozdz. IV) mianowicie, **jaka jest gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia największej pojedynczej straty, $P(-\Lambda; N)$, o zadanej wartości $-\Lambda$ w czasie równym N dni transakcyjnych?** Jak widać, w tak postawionym pytaniu właśnie $-\Lambda$ pełni rolę zdarzenia ekstremalnego. Odpowiedź na to pytanie uzyskujemy (analogicznie jak w rozdz. IV) w oparciu o założenie mówiące o statystycznej niezależności strat. Zatem,

$$\begin{aligned} P(-\Lambda; N) &= N \cdot [\mathcal{P}_{>}(-\Lambda)]^{N-1} \cdot P_{\tau}(-\Lambda) = N \cdot [1 - \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)]^{N-1} \cdot P_{\tau}(-\Lambda) \\ &\approx N \cdot P_{\tau}(-\Lambda) \cdot \exp(-N \cdot \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)), \quad N \gg 1, \end{aligned} \quad (8.82)$$

gdzie przy wyprowadzeniu przybliżonej równości w (8.82) przyjęliśmy, że prawdopodobieństwo $\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)$ jest co najwyżej rzędu 10% tzn., że mamy do czynienia ze stosunkowo dużym ryzykiem czyli stosunkowo niskim poziomem ufności. Zauważmy, że skorzystaliśmy tutaj z warunku normalizacji postaci:

$$1 = \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) + \mathcal{P}_{>}(-\Lambda), \quad \mathcal{P}_{>}(-\Lambda) = \int_{-\Lambda}^{-\Lambda_{up}} P_{\tau}(\Delta X) d(\Delta X), \quad (8.83)$$

gdzie $-\Lambda_{up}$ jest stratą minimalną.

Innymi słowy, równanie (8.82) odpowiada na pytanie jaki jest rozkład prawdopodobieństwa tego, że $-\Lambda$ jest maksymalną pojedynczą stratą jaka pojawiła się w przeciągu N dni transakcyjnych.

Wyrażenie (8.82) można zapisać w alternatywnej postaci, którą wykorzystujemy w dalszej części

$$P(-\Lambda; N) \approx \frac{P_{\tau}(-\Lambda)}{\mathcal{P}_{VaR}} \cdot \exp\left(-\frac{\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)}{\mathcal{P}_{VaR}}\right). \quad (8.84)$$

Zwróćmy uwagę, że powyższe wyrażenie jest, w istocie rzeczy, takie samo jak tamto (8.34) wyprowadzone w rozdz. IV - różnica polega tylko na tym, że straty są tutaj wyrażane liczbami ujemnymi

Postawmy teraz **zasadnicze pytanie: dla jakiej wartości $-\Lambda$ gęstość prawdopodobieństwa $P(-\Lambda; N)$ osiąga maximum?** Czyli poszukujemy najbardziej prawdopodobnej wielkości straty. W języku teorii parametrów pozycyjnych oznacza to, że poszukujemy tzw. mody zwanej też dominantą. Z równości w (8.82) otrzymujemy konieczny warunek, różniczkując ją stronami po $-\Lambda$ i przyrównując otrzymane wyrażenie do zera

$$\begin{aligned}(N-1) \cdot P_{\tau}(-\Lambda_{max}) &= \mathcal{P}_{>}(-\Lambda_{max}) \cdot \frac{d \ln(P_{\tau}(-\Lambda))}{d(-\Lambda)} \Big|_{max} \\ &\approx \exp(-\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{max})) \cdot \frac{d \ln(P_{\tau}(-\Lambda))}{d(-\Lambda)} \Big|_{max},\end{aligned}\quad (8.85)$$

który wykorzystamy do analizy wielce użytecznych przykładów.

Podkreślmy, że to właśnie wielkość Λ_{max} jest tą charakterystyką poziomu ryzyka, o którą nam chodzi - niestety, możliwości jej praktycznego wykorzystania są (jak na razie) mniejsze niż wielkości Λ_{VaR} , ze względu na trudność związaną z wyznaczeniem w jawnej postaci $\mathcal{P}_{max}(\stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{max}))$. Nie mniej, **wszędzie tam gdzie to jest tylko możliwe należy dążyć do uzyskania obu tych wielkości w jawnej (przynajmniej przybliżonej) postaci.**

Dodatkową wielkością związaną z analizą ryzyka rynkowego jest **oczekiwana wielkość straty przekraczającej VaR** (ang. *Expected Tail Loss, ETL*¹⁹). Oczywiście, wyznaczenie tego (pierwszego, cząstkowego) momentu jest możliwe tylko wtedy, gdy on istnieje. Zatem, nie jest to możliwe w sytuacji, gdy dystrybuenta rozkładu strat ma gruby ogon zanikający jak $1/(\Delta X)^2$ lub wolniej. Chociaż często pogrubione ogony zanikają szybciej niż $1/(\Delta X)^2$, a więc umożliwiają wyznaczenie *ETL*, to w dalszym ciągu nasze rozważania będą oparte głównie na pojęciu parametrów pozycyjnych (kwantyli) a nie na momentach rozkładów²⁰, gdyż takie podejście jest bardziej uniwersalne i więcej mówiące.

8.4.2 Rachunek skumulowanych strat.

Podejście dynamiczne w ramach formalizmu CTRW

Jak to zostało wskazane w poprzednim podrozdziale, zawarte tam rozważania nie uwzględniały strat wewnątrzdziennej - obecnie zajmujemy się tym nadzwyczaj ważnym zagadnieniem. Często właśnie straty wewnątrzdzienne, a w tym straty skumulowane, stanowią istotne zagrożenie dla inwestora przekraczając dopuszczalny próg przed wpływem dnia transakcyjnego. Zatem teraz, **naszym celem jest wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa warunkowego, $P(\Delta_S X, \Delta t)$, wystąpienia skumulowanej (sumarycznej) straty $\Delta_S X$ w przedziale czasu Δt pod warunkiem, że wyjściowo (w chwili początkowej) nie było żadnej straty ani zysku**

¹⁹Patrz G. Trzmiel: *Wybrane modele oceny ryzyka. Podejście nieklasyczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice 2008.

²⁰R. Nowak: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2002.

(dla uproszczenia warunek ten został opuszczony w powyższym zapisie). Ponieważ dopuszczamy tutaj zarówno straty jak i zyski więc $\Delta_S X$ może być dowolnego znaku. Rozwiązania tego problemu będziemy poszukiwać w ramach rozwiniętego w rozdz. 6.1 formalizmu CTRW, reinterpretując występujące tam zmienne. Wykorzystamy tutaj formułę (6.35) - przypomnijmy

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{1}{s} \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s) \tilde{p}(k)}, \quad (8.86)$$

teraz $\tilde{P}(k, s)$ jest transformatą Laplace'a i Fouriera rozkładu $P(\Delta_S X, \Delta t)$, wielkość $\tilde{\phi}(s)$ jest transformatą Laplace'a rozkładu $\phi(\delta t)$ pojedynczych czasów δt pomiędzy kolejnymi zdarzeniami (tutaj są nimi straty lub zyski w dowolnym zestawieniu), natomiast $\tilde{p}(k)$ jest transformatą Fouriera rozkładu $p(\Delta X)$ pojedynczej (jednokrokowej) straty lub zysku ΔX . Jak widać (mówiliśmy już o tym w rozdz. 6.1), oba rozkłady jednokrokowe $\phi(\delta t)$ oraz $p(\Delta X)$ są podstawowymi dla użytego formalizmu CTRW.

Otrzymany rozkład, $P(\Delta_S X, \Delta t)$, pozwala obliczyć trzy nadzwyczaj ważne wielkości:

- (i) prawdopodobieństwo, $\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{VaR}, \Delta_{\Lambda_{VaR}} t) = \int_{-\infty}^{-\Lambda_{VaR}} P(\Delta_S X, \Delta_{\Lambda_{VaR}} t) d(\Delta_S X)$, wystąpienia sumarycznej straty nie mniejszej niż ustalona progowa (np. nie mniejszej niż $-\Lambda_{VaR}$) w dowolnie wybranej chwili $\Delta_{\Lambda_{VaR}} t$ oraz
- (ii) prawdopodobieństwo, $F(\Delta_S X, \Delta t)$, pierwszego pojawienia się sumarycznej straty $\Delta_S X$ w chwili Δt a stąd prawdopodobieństwo, $\mathcal{F}_{\leq}(-\Lambda_{VaR}, \Delta_{\Lambda_{VaR}} t) = \int_{-\infty}^{-\Lambda_{VaR}} F(\Delta_S X, \Delta_{\Lambda_{VaR}} t) d(\Delta_S X)$, pierwszego wystąpienia sumarycznej straty nie mniejszej niż ustalona progowa (np. nie mniejszej niż $-\Lambda_{VaR}$) w dowolnie wybranej chwili $\Delta_{\Lambda_{VaR}} t$. Prawdopodobieństwo to można nazwać **dynamiczną oceną ryzyka**.

Dodajmy, tytułem uzupełnienia punktu (ii), że prawdopodobieństwo, $F(\Delta_S X, \Delta t)$, pierwszego pojawienia się sumarycznej straty $\Delta_S X$ w chwili Δt jest związane relacją

$$\tilde{F}(\Delta_S X, s) = \frac{\tilde{P}(\Delta_S X, s)}{\tilde{P}(0, s)}, \quad \text{dla } \Delta_S X \neq 0, \quad (8.87)$$

z rozkładem $P(\Delta_S X, \Delta t)$ (patrz J.W. Haus and K.W. Kehr: *Diffusion in regular and disordered lattices*, Physics Reports **150** (1987) 263-406).

Rozkład czasów pomiędzy nadmiernymi stratami

Znajdziemy teraz odpowiedź na inne ważne pytanie²¹ związane z dynamiką występowania jednorazowych strat nie mniejszych od progowej $-\Lambda$. Powyżej zajmowaliśmy

²¹Rozważania zawarte w niniejszym podrozdziale powstały z inspiracji dr Tomasza Gubca.

się stratami skumulowanymi - teraz zajmiemy się podejściem bardziej szczegółowym - jego mikroskopią. Mianowicie, chodzi o rozkład $\psi_\Lambda(\Delta_\Lambda t)$ przedziałów czasu $\Delta_\Lambda t$ pomiędzy takimi stratami (patrz rysunek 8.14) przy założeniu, że straty wyznaczamy zawsze na koniec dnia transakcyjnego²² W tym celu skonstruujemy cząstkowe, wielokrokowe (n-krokowe) reprezentacje, $\psi_\Lambda^n(\Delta_\Lambda t)$, tego rozkładu rzędu $n = 0, 1, 2, \dots$, postaci

$$\begin{aligned}\psi_\Lambda^{n=0}(\Delta_\Lambda t) &= \psi(\Delta_\Lambda t) \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda), \\ &\dots, \\ \psi_\Lambda^{n=2}(\Delta_\Lambda t) &= \int_0^{\Delta_\Lambda t} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 [\psi(t_1) \mathcal{P}_{>}(-\Lambda)] \\ &\quad \times [\psi(t_2 - t_1) \mathcal{P}_{>}(-\Lambda)] \psi(\Delta_\Lambda t - t_2) \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda), \\ &\dots,\end{aligned}\tag{8.88}$$

gdzie $0 \leq t_1 \leq t_2, \dots, \leq t_n \leq \Delta_\Lambda t$, przy czym z definicji poprzednia strata nie mniejsza od $-\Lambda$ jest tutaj ulokowana w zerze (patrz pomocniczy rys. 8.15). Zauważmy, że wyrażenie dla $n = 2$ pozwala już podać wzór na rozkład wielokrokowy dowolnego rzędu. Użyty tutaj rozkład $\psi(\Delta t)$ czasów $\Delta t = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$, pomiędzy kolejnymi stratami jest niezależny od ich wielkości. Przypomnijmy, że komplementarne prawdopodobieństwa $\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)$ i $\mathcal{P}_{>}(-\Lambda)$ zostały zdefiniowane za pomocą wzoru (8.78) i warunku normalizacyjnego (8.83). Zauważmy jeszcze, że analogiczną strategię wielokrokową stosowaliśmy już w podrozdz. 6.1.3 do obliczenia propagatorów cząstkowych a za ich pomocą sumarycznego propagatora.

Dysponując rozkładami wielokrokowymi możemy już teraz skonstruować sumaryczny rozkład

$$\psi_\Lambda(\Delta_\Lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_\Lambda^n(\Delta_\Lambda t),\tag{8.89}$$

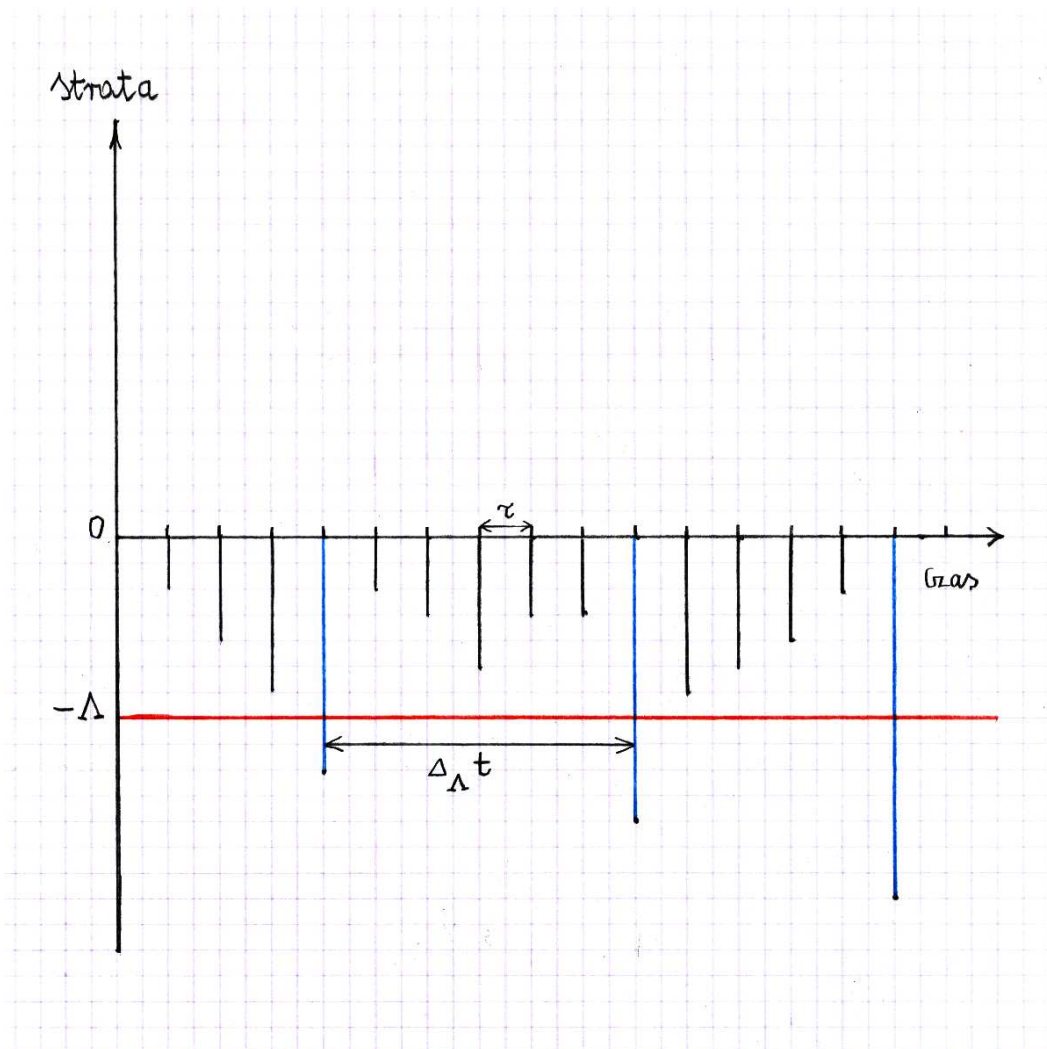
który w zmiennej Laplace'a s (sprzężonej ze zmienną $\Delta_\Lambda t$) przybiera prostą, zamkniętą postać

$$\tilde{\psi}_\Lambda(s) = \frac{\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s) [1 - \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)]} \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda),\tag{8.90}$$

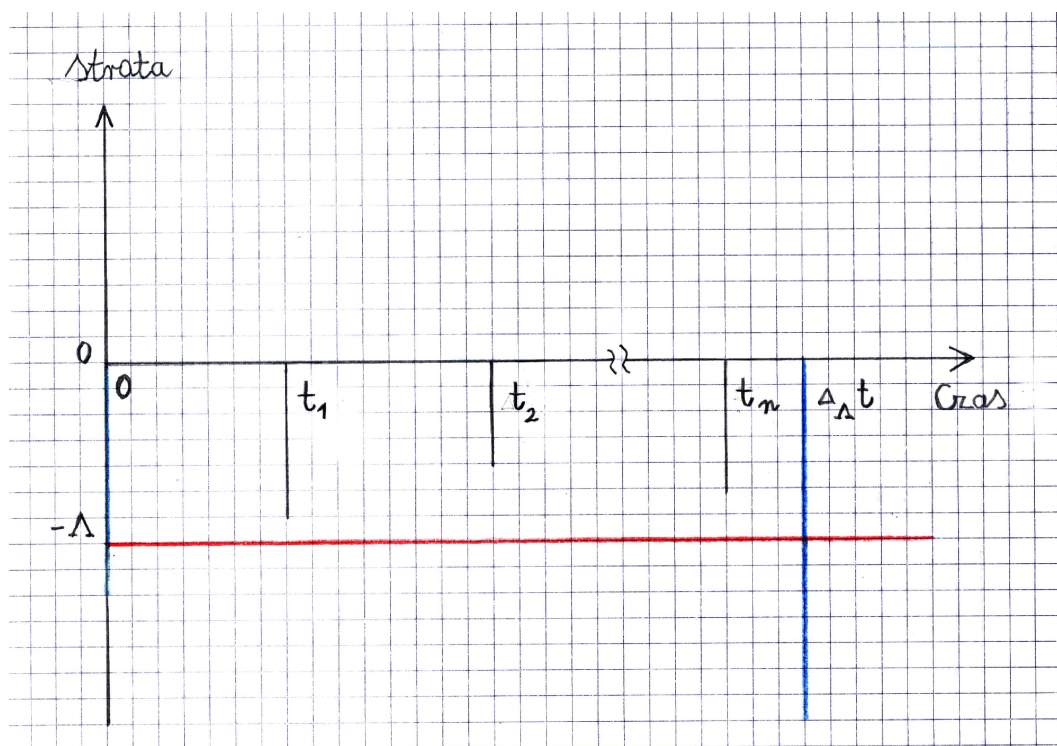
gdzie po drodze skorzystaliśmy z warunku normalizacyjnego $\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) + \mathcal{P}_{>}(-\Lambda) = 1$ oraz warunku ograniczającego $|\tilde{\psi}(s)| < 1$.

Aby zilustrować przydatność wzoru (8.90), rozważmy szczególnie prosty przypadek wykładniczej zależności rozkładu $\psi(\Delta t)$ od czasu Δt . Jego transformata Laplace'a jest postaci $\frac{1/\tau}{1/\tau + s}$ (gdzie τ jest czasem relaksacji rozkładu ψ lub, inaczej mówiąc,

²²Dzień transakcyjny ma tutaj charakter czysto umowny - ogólniej rzecz biorąc, chodzi tutaj o jednostkę transakcyjną, którą może być np. godzina transakcyjna.



Rysunek 8.14: Schematyczny wykres strat (pionowe odcinki) wyznaczanych na koniec każdego przedziału czasowego τ (tutaj dnia transakcyjnego). Zmienne odległości czasowe pomiędzy nadmiernymi stratami (niebieskie pionowe odcinki) oznaczono przez $\Delta_{\Lambda} t (\geq \tau)$.



Rysunek 8.15: Schematyczny wykres strat (pionowe odcinki) poniesionych pomiędzy dwiema kolejnymi stratami nie mniejszymi od wartości progowej równej $-\Lambda$ (pionowe odcinki zaznaczone na niebiesko). Tą wartość progową oznaczono poziomą czerwoną linią. Czasy t_j , $j = 1, 2, \dots$, oznaczają chwile w których pojawiła się kolejna j -ta strata.

średnim czasem pomiędzy kolejnymi stratami), co pozwala po prostych algebraicznych przekształceniach uzyskać także rozkład wykładniczy

$$\psi_{\Lambda}(\Delta_{\Lambda}t) = \frac{1}{\tau_{\Lambda}} \exp(-\Delta_{\Lambda}t/\tau_{\Lambda}), \quad \tau_{\Lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\tau}{\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)}, \quad (8.91)$$

ale o odpowiednio przeskalowanym czasie relaksacji τ_{Λ} . Aby być w zgodzie z rozważaniami w rozdz. 8.4 przyjmujemy, że $\tau = 1 \text{ td}$. Wielkość τ_{Λ} występująca w tym wzorze to (w istocie rzeczy) nic innego jak wielkość N występująca we wzorze (8.80). Oznacza to, że kolejne straty mogą pojawiać się zarówno wcześniej jak i później ale średnio co τ_{Λ} (co oznacza, że przedział pomiędzy kolejnymi stratami w tym przypadku fluktuuje). Oczywiście, gdy rozkład ψ ma bardziej skomplikowaną postać to otrzymanie rozkładu ψ_{Λ} staje się bardziej skomplikowane; mimo to, przydatność wzoru (8.91) jest wprost trudno przecenić.

Zauważmy, że w sytuacji gdy za próg przyjmujemy Wartość Zagrożoną Ryzykiem, Λ_{VaR} , wówczas wzór (8.91) można przepisać w formalnie prostszej postaci

$$\tilde{\psi}_{\Lambda}(s) = \frac{\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)(1 - \alpha)} \alpha. \quad (8.92)$$

Pozostaje nam jeszcze wyprowadzić związek pomiędzy rozkładem $\psi(\Delta t)$ a rozkładem podstawowym $\phi(\delta t)$. Zauważmy w tym celu (patrz rysunek 8.16), że pomiędzy kolejnymi stratami (niebieskie pionowe odcinki) może być dowolnie wiele zysków (pionowe czarne odcinki). Pozwala to ponownie wykorzystać (powyżej użytą) strategię reprezentacji wielokrokowej do opisu cząstkowych rozkładów $\psi^n(\Delta t)$ - ich suma daje $\psi(\Delta t)$. Oznacza to, że

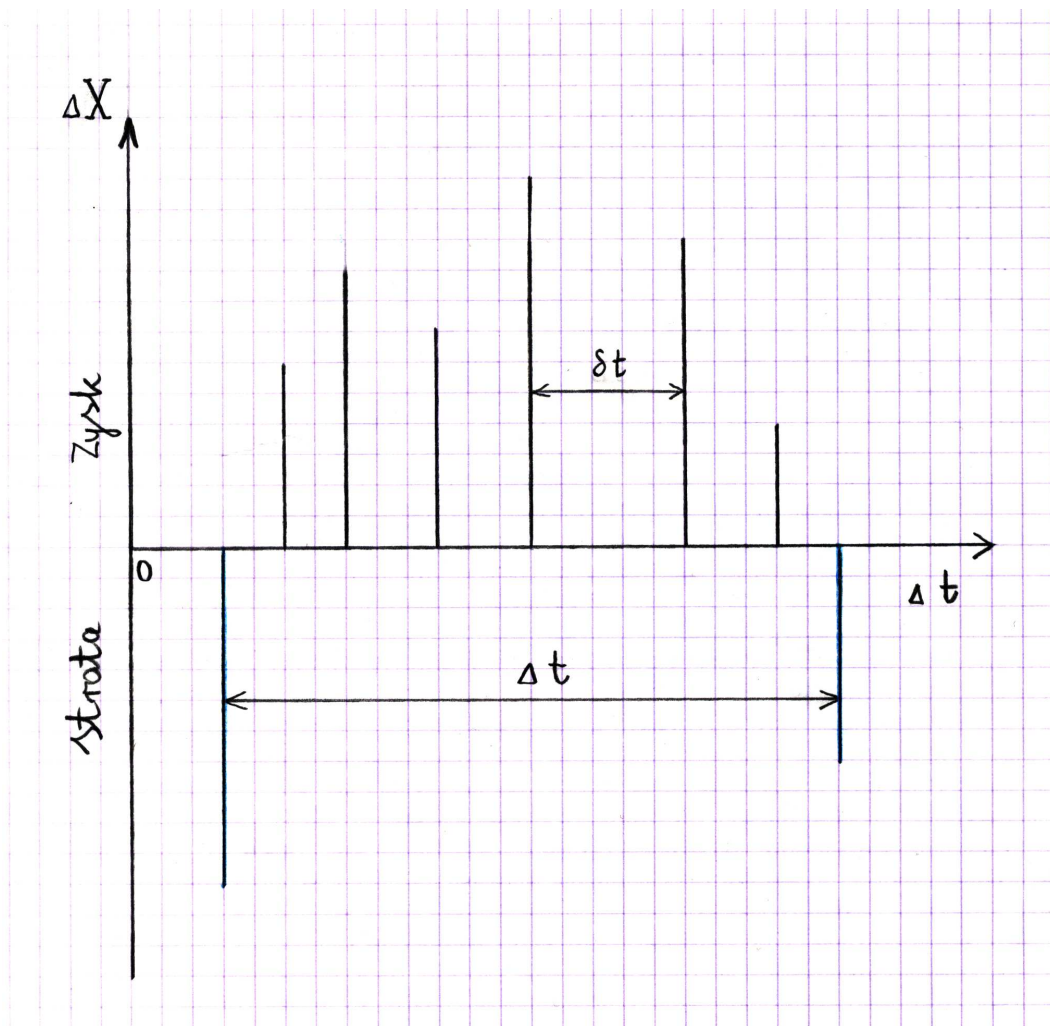
$$\tilde{\psi}(s) = \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)p_{>}} p_{\leq} = \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)(1 - p_{\leq})} p_{\leq}, \quad (8.93)$$

gdzie $p_{>} = \int_0^{\infty} p(\Delta X) d(\Delta X)$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia zysku w pojedynczym kroku czasowym, natomiast $p_{\leq} = \int_{-\infty}^0 p(\Delta X) d(\Delta X)$ straty, przy czym ma miejsce normalizacja $p_{>} + p_{\leq} = 1$. Dodajmy, że tutaj rolę rozkładu ψ występującego we wzorach (8.88) przejmuje rozkład bazowy ϕ natomiast rolę prawdopodobieństwa $\mathcal{P}_{>}(-\Lambda)$ prawdopodobieństwo $p_{>}$ (odpowiednio, rolę $\mathcal{P}_{\leq}$ komplementarne prawdopodobieństwo $p_{\leq}$).

Podstawiając wyrażenie (8.93) do (8.90) otrzymujemy ostatecznie, że

$$\tilde{\psi}_{\Lambda}(s) = \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)(1 - p_{\leq}\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda))} p_{\leq}\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda). \quad (8.94)$$

Jak widać, udało się wyrazić rozkład złożony $\tilde{\psi}_{\Lambda}(s)$ za pomocą rozkładu bazowego $\tilde{\phi}(s)$, znacznie łatwiejszego do uzyskania z danych empirycznych. Oczywiście, jest także możliwa sytuacja odwrotna gdy ze znajomości rozkładu złożonego (uzyskanego np. z danych empirycznych) wyprowadza się rozkład bazowy.



Rysunek 8.16: Schematyczny wykres chwilowych zysków (pionowe czarne odcinki) jakie mogą pojawić się pomiędzy kolejnymi stratami (pionowe czarno-niebieskie odcinki). Zmienne odległości czasowe pomiędzy nimi podkreślają dynamiczny charakter sytuacji.

Tytułem referencyjnego przykładu (ściśle związanego z poprzednim), rozważmy sytuację gdy $\phi(t)$ jest dane rozkładem wykładniczym - wtedy jego transformata Laplace'a przybiera postać $\tilde{\phi}(s) = \frac{1/\tau_0}{s + 1/\tau_0}$. Pozwala to wyrazić (8.93) i (8.94) odpowiednio

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{1/\tau_1}{s + 1/\tau_1}, \quad \tau_1 = \tau_0/p_{\leq}, \quad (8.95)$$

czyli

$$\psi(t) = \frac{1}{\tau_1} \exp(-t/\tau_1) \quad (8.96)$$

oraz

$$\tilde{\psi}_{\Lambda}(s) = \frac{1/\tau_2}{s + 1/\tau_2}, \quad \tau_2 = \tau_0/p_{\leq} \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda), \quad (8.97)$$

tzn.

$$\psi_{\Lambda}(\Delta_{\Lambda}t) = \frac{1}{\tau_2} \exp(-\Delta_{\Lambda}t/\tau_2). \quad (8.98)$$

Tytułem użytecznego przykładu rozważmy sytuację, gdy rozkład $\phi(t)$ przybiera postać daną ostatnim wyrażeniem w (6.64), która dla asymptotycznie długich czasów przechodzi w rozkład potęgowy (6.66) - jego transformata Laplace'a jest (dla $s \rightarrow 0$) dana wzorem (6.69). Ze wzoru (8.93) otrzymujemy po prostych przekształceniach, że

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma_f''} \left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^{\alpha}} \approx 1 - \frac{1}{\gamma_f''} \left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^{\alpha}, \quad \gamma_f'' = \gamma_f' p_{\leq}, \quad (8.99)$$

co oznacza, że

$$\psi(\Delta t) = \frac{\gamma_0}{p_{\leq}} \frac{\alpha \Gamma_{Euler}(1 + \alpha)}{(\gamma_0 \Delta t)^{1 + \alpha}} \quad (8.100)$$

a ze wzoru (8.94) ostatecznie, że

$$\tilde{\psi}_{\Lambda}(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma_f'''} \left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^{\alpha}} \approx 1 - \frac{1}{\gamma_f'''} \left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^{\alpha}, \quad \gamma_f''' = \gamma_f'' \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda), \quad (8.101)$$

czyli

$$\psi_{\Lambda}(\Delta_{\Lambda}t) = \frac{\gamma_0}{p_{\leq} \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)} \frac{\alpha \Gamma_{Euler}(1 + \alpha)}{(\gamma_0 \Delta_{\Lambda}t)^{1 + \alpha}}. \quad (8.102)$$

Jak widać, zarówno rozkład wykładniczy jak i asymptotycznie potęgowy są niezmiennicze (co do kształtu) ze względu na transformację CTRW (typu (8.90)). Pytanie, jakie inne rozkłady posiadają tę własność pozostaje na razie bez odpowiedzi.

Należy podkreślić, że dynamiczna ocena ryzyka może pozwolić znacząco zwiększyć bezpieczeństwo inwestowania.

8.4.3 Charakterystyczne przykłady

Omówimy teraz trzy charakterystyczne, niezwykle użyteczne przykłady dotyczące, różniących się w sposób istotny, bazowych rozkładów prawdopodobieństw. Zakładamy przy tym dla prostoty, że ograniczamy się tylko do statystyki strat czyli przyjmujemy, że wielkość Λ jest nieujemna. Ponadto, dwa pierwsze przykłady dostarczą nam rozwiązań analitycznych równania (8.81).

Przykład 1.

Przypuśćmy, że bazowy rozkład (gęstość) prawdopodobieństwa

$$P_{\tau}(-\Lambda) = \frac{1}{\langle \Lambda \rangle} \cdot \exp \left(-\frac{\Lambda}{\langle \Lambda \rangle} \right), \quad \Lambda \geq 0, \quad (8.103)$$

gdzie przeciętna (oczekiwana) wielkość strat $\langle \Lambda \rangle (> 0)$ jest możliwa do bezpośredniej estymacji na drodze empirycznej. Stąd,

$$\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \exp \left(-\frac{\Lambda}{\langle \Lambda \rangle} \right). \quad (8.104)$$

Podstawiając wyrażenia (8.103) i (8.104) do warunku (8.85) oraz korzystając z rozwinięcia $\exp(-\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{max})) \approx 1 - \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{max})$ otrzymujemy, że

$$\mathcal{P}_{max} = \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{max}) \approx \frac{1}{N} \approx \mathcal{P}_{VaR} = \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{VaR}), \quad (8.105)$$

czyli, że

$$\Lambda_{max} = \Lambda_{VaR} = -\langle \Lambda \rangle \cdot \ln(\mathcal{P}_{VaR}) = \langle \Lambda \rangle \cdot \ln(N), \quad (8.106)$$

co stanowi poszukiwane jawne rozwiązanie równania (8.81).

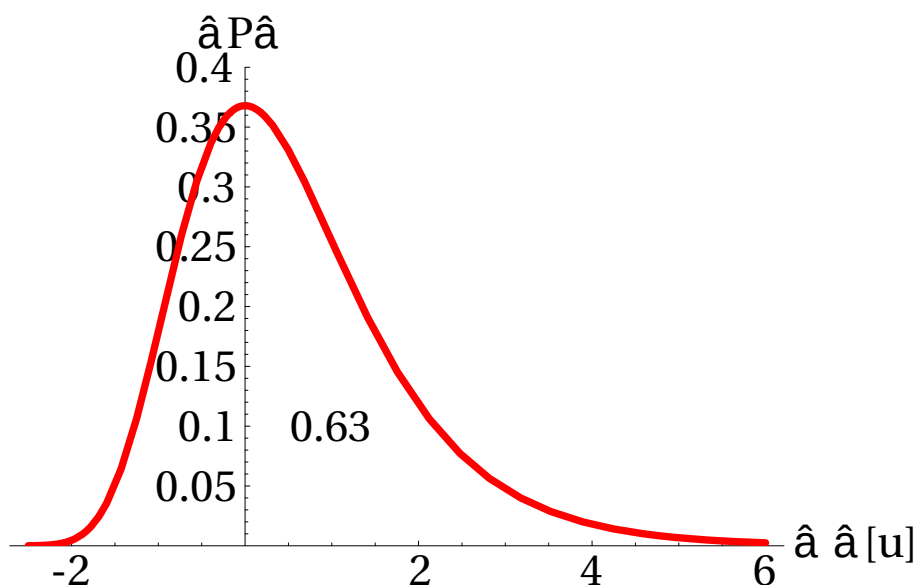
Jak widać, przy zadanej ocenie ryzyka, $\mathcal{P}_{VaR}$, odpowiadający jej poziom ryzyka, Λ_{VaR} , jest (w tym przypadku) najbardziej prawdopodobną stratą spośród wszelkich możliwych strat jakie mogą mieć miejsce w przeciągu N dni transakcyjnych i wolno (logarytmicznie) rośnie ze wzrostem N .

Jak już wspomnieliśmy (przy wyprowadzaniu wzoru (8.82)), **próg $-\Lambda$ pełni rolę zdarzenia ekstremalnego dlatego jest celowym pytaniem o jego rozkład.** Podstawiając wyrażenia (8.103) i (8.104) do wzoru (8.84) otrzymujemy, że

$$P(-\Lambda; N) \approx \frac{1}{\langle \Lambda \rangle} \cdot \exp \left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{VaR}}{\langle \Lambda \rangle} \right) \exp \left(-\exp \left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{VaR}}{\langle \Lambda \rangle} \right) \right), \quad (8.107)$$

czyli ostatecznie, po dokonaniu zamiany zmiennych $(-\Lambda - \Lambda_{VaR})/\langle \Lambda \rangle \Rightarrow u$, otrzymujemy, że

$$P(-\Lambda; N) \Rightarrow P(u) \approx \exp(-u) \cdot \exp(-\exp(-u)), \quad (8.108)$$



Rysunek 8.17: Rozkład Gumbela zdarzeń ekstremalnych dany wzorem (8.108), przy czym zmienna $u \stackrel{\text{def.}}{=} \Lambda - \Lambda_{VaR}$. Jak widać, najbardziej prawdopodobną wartością zmiennej u jest $u = 0$, czyli $\Lambda_{max} = \Lambda_{VaR}$, gdzie Λ_{max} jest najbardziej prawdopodobną wartością Λ . Jak wynika ze wzoru (8.108), wartość tego prawdopodobieństwa wynosi $P(u = 0) = 1/e \approx 0.368$. Można łatwo obliczyć, że prawdopodobieństwo straty $\Lambda \geq \Lambda_{VaR}$ wynosi dla rozkładu Gumbela 63% (co zostało zaznaczone po prawej stronie wykresu), czyli jest wyraźnie większe niż prawdopodobieństwo mniejszej straty.

czyli rozkład Gumbela (8.41) zdarzeń ekstremalnych, który omawialiśmy w rozdz. IV (patrz rysunek 8.17). Oczywiście, taki rozkład jest wynikiem wykładniczego charakteru rozkładu bazowego (8.103). Ponownie widać (nie mogło być inaczej), że najbardziej prawdopodobną wartością straty jest wartość zagrożona ryzykiem Λ_{VaR} , która jest zarazem ekstremalną wartością straty odpowiadającą przyjętej ocenie ryzyka $\mathcal{P}_{VaR}$ (patrz wzór (8.81)) oraz zdarzeniem rzadkim - zagadnienie to zostało dokładniej omówiane w rozdz. 8.3. Ponadto widać, że ma miejsce asymetria typu strata/zysk wynosząca $63/37 = 1.703$. Tego typu asymetria stanowi istotną informację dla inwestora.

Przykład 2.

Założmy teraz, że gęstość prawdopodobieństwa bazowego $P_\tau(-\Lambda)$ jest zadane (dla dużych wartości Λ) w postaci potęgowego rozkładu Pareto-Lévy'ego

$$P_\tau(-\Lambda) = \frac{\beta A^\beta}{|-\Lambda|^{1+\beta}}, \quad \beta > 0, \quad \Lambda \geq A, \quad A > 0, \quad (8.109)$$

unormowanego następująco

$$1 = A^\beta \int_A^\infty \frac{\beta}{\Lambda^{1+\beta}} d\Lambda. \quad (8.110)$$

Stąd

$$\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \frac{1}{(\Lambda/A)^\beta}, \quad (8.111)$$

gdzie A pełni rolę jednostki zwanej amplitudą ogona (ang. *tail amplitude*), w której można najprościej wyrazić Λ . Zatem, poziom ryzyka

$$\Lambda_{VaR} = A \cdot \mathcal{P}_{VaR}^{-1/\beta} = A \cdot N^{1/\beta} \quad (8.112)$$

jest potęgową funkcją poziomu ufności o wykładniku $-1/\beta$.

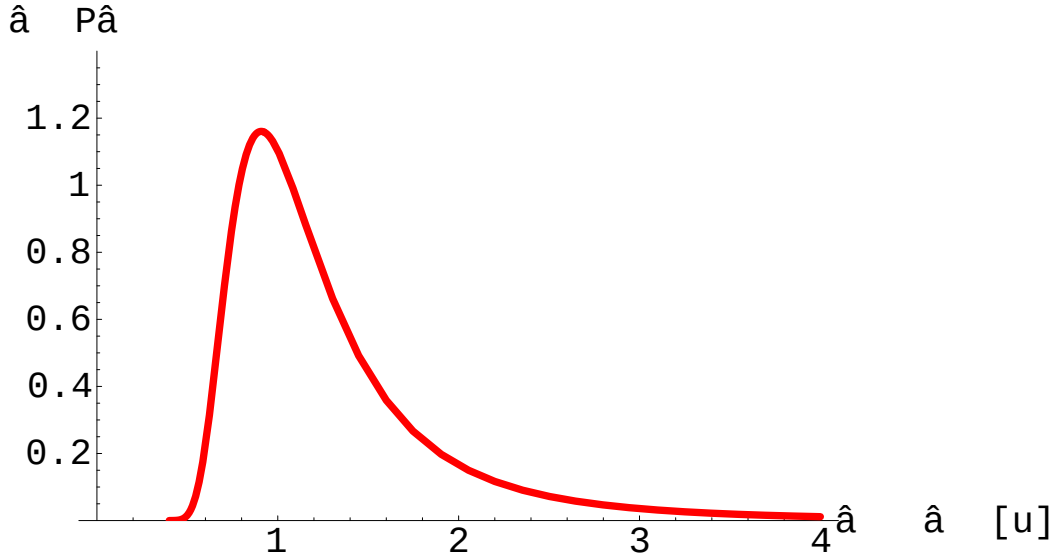
Podstawiając wyrażenia (8.109) i (8.111) do równości (8.85) oraz korzystając z (8.112) otrzymujemy po prostych przekształceniach, że dla $N \gg 1/\beta$,

$$\Lambda_{max} \approx \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^{1/\beta} \cdot \Lambda_{VaR}. \quad (8.113)$$

Inaczej niż w poprzednim przykładzie, tylko dla $\beta \gg 1$ wielkość progowa Λ_{VaR} jest (z dobrym przybliżeniem) najbardziej prawdopodobną wielkością straty. Widać więc jak ważny jest wybór modelu czyli bazowego rozkładu prawdopodobieństwa.

Odpowiemy teraz na pytanie dotyczące zamkniętej postaci rozkładu $P(-\Lambda; N)$. Podstawmy w tym celu (8.109) i (8.111) do wyrażenia (8.84)

$$P(-\Lambda; N) \approx \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\beta}{(\Lambda/\Lambda_{VaR})^\beta} \exp \left(-1/(\Lambda/\Lambda_{VaR})^\beta \right), \quad (8.114)$$



Rysunek 8.18: Rozkład Fréchet'a zdarzeń ekstremalnych dany wzorem (8.115) dla $\beta = 3$, przy czym zmienna $u \stackrel{\text{def.}}{=} \Lambda/\Lambda_{VaR}$. Jak widać, najbardziej prawdopodobna wartość zmiennej u wynosi $u_{max} = \Lambda_{max}/\Lambda_{VaR} = 0.909$ (patrz także wzór (8.113)), czyli $\Lambda_{max} < \Lambda_{VaR}$, gdzie $-\Lambda_{max}$ jest najbardziej prawdopodobną wartością największej jednorazowej straty $-\Lambda$, przy czym rozkład prawdopodobieństwa $P(u = 1) = \beta/e = 1.104$ jest tylko nieznacznie mniejszy od $P(u_{max})$. Dobrze widoczna jest też znaczna asymetria typu strata/zysk stanowiąca istotną informację dla inwestora.

co po prostej zamianie zmiennych $\Lambda \Rightarrow u = \Lambda/\Lambda_{VaR}$, tak jak to miało miejsce w rozdz.IV, otrzymujemy dyskutowany tam rozkład Fréchet'a (8.50)

$$P(-\Lambda; N) \Rightarrow P(u) = \frac{\beta}{u^{\beta+1}} \exp\left(-\frac{1}{u^\beta}\right) \quad (8.115)$$

dla zdarzeń ekstremalnych (patrz rysunek 8.18).

Zatem, nawet w przypadku gdy mamy do czynienia z rozkładem (8.109) posiadającym pogrubiony ogon, pojęcia oceny ryzyka i poziomu ryzyka są dobrze określone i pozwalają na prowadzenie skutecznej analizy danych rynkowych. **Jest to właśnie zasadnicza korzyść płynąca z takiego podejścia do problemu ryzyka rynkowego, czyli podejścia w którym posługujemy się parametrami pozycyjnymi a nie momentami rozkładu.**

Warto podkreślić, że niestety w obu charakterystycznych przykładach ma miejsce znacząca asymetria prawdopodobieństwa typu strata/zysk na rzecz straty.

Celem dokładniejszego rozważenia otrzymanych w tym przykładzie wyników wprowadźmy bazowy rozkład prawdopodobieństwa w postaci, której transformata

Fouriera jest funkcją Weierstrassa, czyli

$$P_\tau(\Delta X) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j} \delta(|\Delta X| - b_0 b^j), \quad M, b > 1, \quad (8.116)$$

dyskutowaną już przez nas w rozdz. 6.4 w kontekście przelotów Weierstrassa (czyli teraz ΔX może być dowolnego znaku). Stąd po podstawieniu do definicji (8.78) otrzymujemy natychmiast, że

$$\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \frac{1}{(\Lambda/b_0)^\beta}, \quad \beta \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\ln M}{\ln b}, \quad (8.117)$$

gdzie milcząco przyjęliśmy, iż rozważamy tylko takie wartości Λ , dla których zachodzi równość $\Lambda(j) = b_0 b^j$. W dalszym ciągu przyjmujemy, że $\frac{1}{M^j} - \frac{1}{M^{j+1}} \ll 1$ co odpowiada dużym wartościom indeksu j pozwalając, z dobrym przybliżeniem, uciąglić zmienną Λ w wyrażeniu (8.117) i wykonać różniczkowanie po zmiennej $-\Lambda$. W rezultacie otrzymujemy bazowy rozkład prawdopodobieństwa dla dużych wartości Λ

$$P_\tau(-\Lambda) \approx \frac{\beta(b_0)^\beta}{\Lambda^{1+\beta}}. \quad (8.118)$$

Jak widać, otrzymaliśmy wyrażenia równoważne odpowiednio (8.109) i (8.111), przy czym stała $A = b_0$.

Obliczmy jeszcze, tytułem pouczającego ćwiczenia, wariancję jednokrokowej zmiennej ΔX dla jednostkowego horyzontu czasowego τ

$$\begin{aligned} \sigma(\tau)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P_\tau(\Delta X) d\Delta X = (b_0)^2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{b^2}{M}\right)^j \\ &= \begin{cases} (b_0)^2 \frac{1 - \frac{1}{M}}{1 - \frac{b^2}{M}}, & \text{gdy } \beta > 2 \\ \infty, & \text{gdy } \beta < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.119)$$

Pozwoliło to powiązać tę wariancję z mikroskopowymi parametrami rozkładu M oraz b .

W dalszym ciągu (patrz podrozdz. ??) wariancja zostanie wykorzystana do porównania zależności poziomu ryzyka od poziomu ufności dla różnych postaci bazowego rozkładu prawdopodobieństwa.

Przykład 3.

Rozważmy teraz bazowy rozkład prawdopodobieństwa zadany w postaci funkcji Gaussa

$$P_\tau(\Delta X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(\tau)} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta X - \langle \Delta X \rangle}{\sigma(\tau)} \right)^2 \right), \quad (8.120)$$

przy czym teraz ΔX może być zarówno wielkością ujemną jak też dodatnią, czyli może być zarówno stratą jak też zyskiem, $\langle \Delta X \rangle$ jest przeciętną wielkością straty wyznaczaną najczęściej bezpośrednio z danych empirycznych (często jest ujemna), natomiast wariancja $\sigma^2(\tau) = \sigma_0^2 \cdot \tau$, jest (na mocy CTG) liniową funkcją czasu τ (σ_0 jest dyspersją jednodniowej straty liczonej na zamknięciu, po zespole złożonym z wielu dni transakcyjnych).

Zauważmy, że z wyrażenia (8.120), w oparciu o definicję (8.78), otrzymujemy natychmiast:

$$\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Lambda + \langle \Delta X \rangle}{\sqrt{2}\sigma(\tau)} \right), \quad (8.121)$$

gdzie (przypomnijmy)

$$\operatorname{erfc}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-y^2) dy. \quad (8.122)$$

Teraz, podstawiając (8.121) do równania (8.81) otrzymujemy, że poszukiwany poziom ryzyka dla rozkładu Gaussa

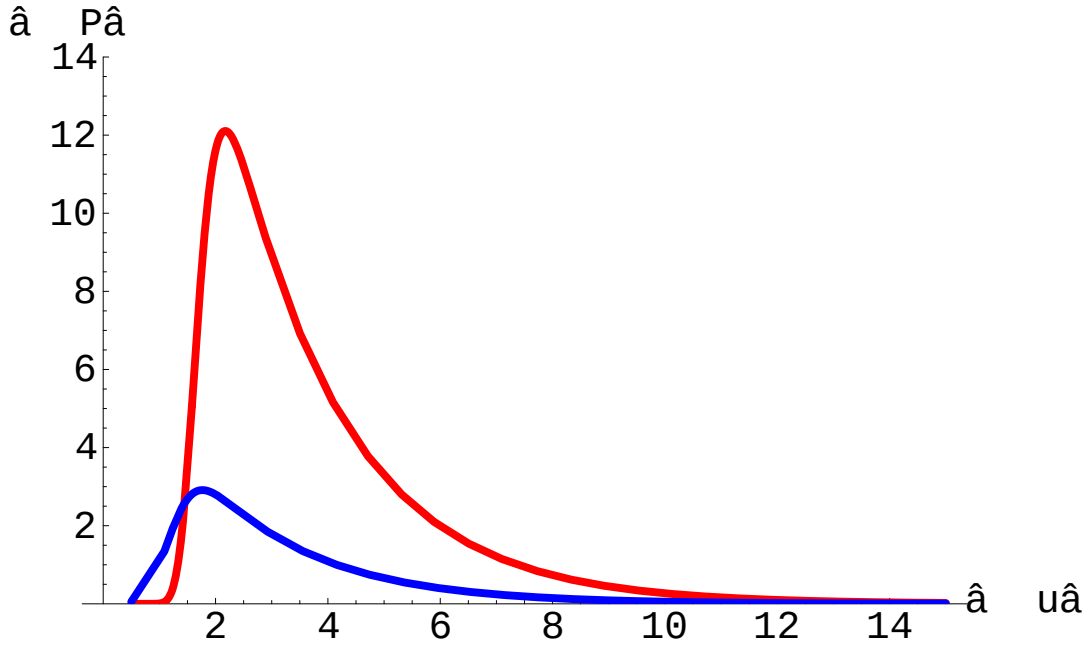
$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{VaR} + \langle \Delta X \rangle}{\sqrt{2}\sigma(\tau)} &= \operatorname{erfc}^{-1}(2\mathcal{P}_{VaR}) = \operatorname{erfc}^{-1} \left(\frac{2}{N} \right) \Leftrightarrow \\ \Lambda_{VaR} &= \sqrt{2}\sigma_0\sqrt{\tau} \cdot \operatorname{erfc}^{-1}(2\mathcal{P}_{VaR}) - \langle \Delta X \rangle \end{aligned} \quad (8.123)$$

wolno rośnie ze wzrostem wielkości horyzontu czasowego τ oraz liczbą dni transakcyjnych N (co będzie pokazane poniżej na rysunkach 8.20 i 8.21). Inaczej mówiąc, w przybliżeniu gaussowskim poziom ryzyka, jak można było się spodziewać, jest proporcjonalny do dyspersji $\sigma(\tau)$ oraz maleje w sposób monotoniczny ze wzrostem poziomu ufności $\mathcal{P}_{VaR}$ - zależność tą można wizualizować tylko na drodze numerycznej, w przeciwieństwie do omawianych wcześniej dwóch przykładów.

Co więcej, zarówno prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} P(-\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) &\approx \frac{1}{\mathcal{P}_{VaR}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(\tau)} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda + \langle \Delta X \rangle}{\sigma(\tau)} \right)^2 \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2\mathcal{P}_{VaR}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Lambda + \langle \Delta X \rangle}{\sqrt{2}\sigma(\tau)} \right) \right), \end{aligned} \quad (8.124)$$

które łatwo można wyprowadzić korzystając z ogólnego wzoru (8.84), jak też (uzyskane powyżej) wyrażenie na Λ_{VaR} a także wyrażenie na Λ_{max} wynikające bezpośrednio z równania (8.85), przybierają skomplikowane postacie. Mianowicie, $P(-\Lambda; N)$ nie daje się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych natomiast uzyskanie Λ_{max} jest możliwe tylko na drodze numerycznego rozwiązania równania przestępnego (patrz (8.123)). Jak widać, komplikuje to analizę zarówno poziomu jak też oceny ryzyka.



Rysunek 8.19: Porównanie przebiegów funkcji $P(u)$ danej wzorem (8.125) dla dwóch wartości oceny ryzyka $\mathcal{P}_{VaR} = 0.01$ (linia czerwona) i $\mathcal{P}_{VaR} = 0.05$ (linia niebieska).

Wprowadzenie zmiennej standaryzowanej $u \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Lambda + \langle \Delta X \rangle}{\sqrt{2\sigma(\tau)}}$ pozwala wyrazić rozkład (8.124) w nieco prostszej postaci

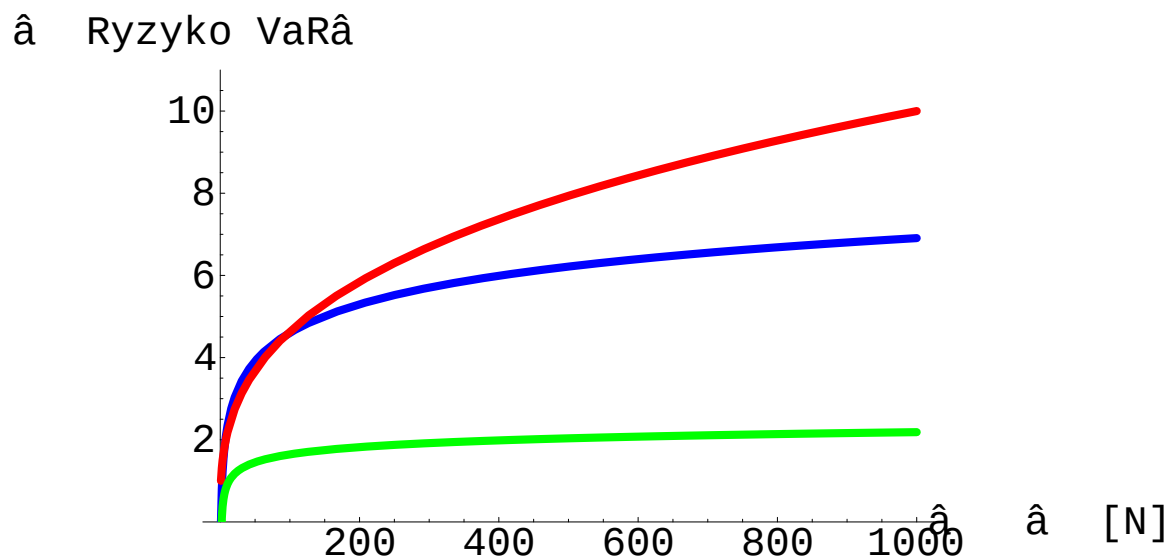
$$P(-\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) \Rightarrow P(u) = \frac{1}{\mathcal{P}_{VaR}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \exp\left(-\frac{1}{2\mathcal{P}_{VaR}} \operatorname{erfc}(u)\right). \quad (8.125)$$

Jak widać, wprowadzenie zmiennej standaryzowanej u sprowadziło rozkład do prostszej, jednoparametrowej postaci, przy czym parametrem jest wielkość $\mathcal{P}_{VaR}$ odgrywająca kluczową rolę w teorii ryzyka. Mimo wszystko, rozkład ma nadal zbyt skomplikowaną postać dla prowadzenia rozważań o charakterze analitycznym.

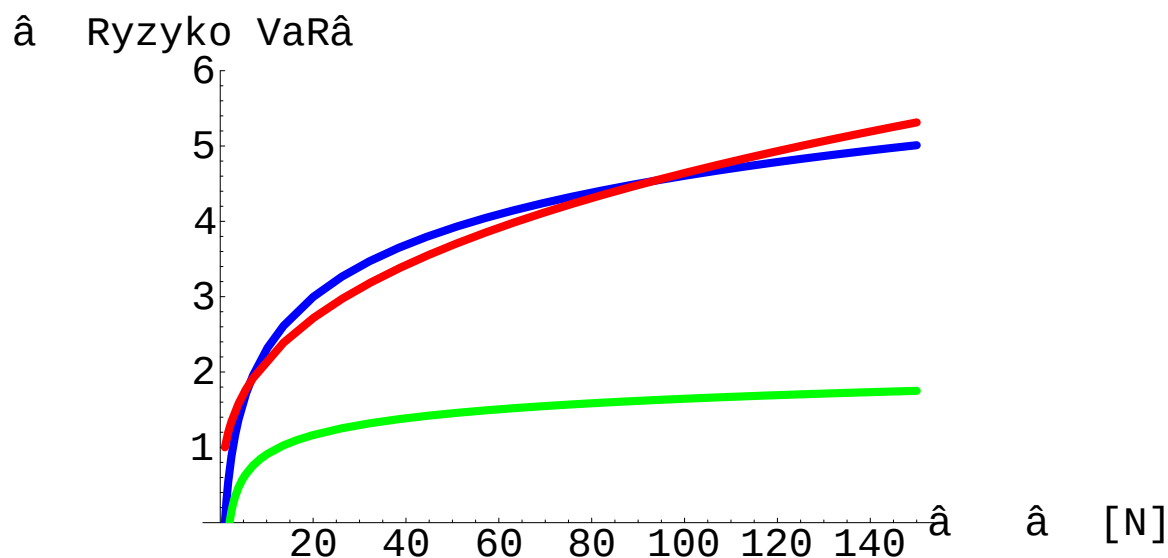
Na rysunku 8.19 porównano przebiegi funkcji $P(u)$ danej powyższym wzorem (gdzie przyjęto $u > 0$) dla dwóch wartości oceny ryzyka $\mathcal{P}_{VaR} = 0.01$ (linia czerwona) i $\mathcal{P}_{VaR} = 0.05$ (linia niebieska). Widać, że prawdopodobieństwo najbardziej prawdopodobnej straty w pierwszym przypadku jest znacznie większe niż w drugim. Co więcej, strata ta w pierwszym przypadku jest wyraźnie większa niż w drugim. Innymi słowy, inwestowanie według oceny ryzyka $\mathcal{P}_{VaR} = 0.01$ (dopuszczonej przez Bazyleę II) jest wyraźnie bardziej ryzykowne niż według $\mathcal{P}_{VaR} = 0.05$ (dopuszczonej przez Bazyleę I).

Niestety, równanie pozwalające wyznaczyć u_{max} jest teraz równaniem przestępnym, możliwym do rozwiązywania tylko na drodze numerycznej

$$2\sqrt{\pi}\mathcal{P}_{VaR} u_{max} = \exp\left(-u_{max}^2\right). \quad (8.126)$$



Rysunek 8.20: Porównanie zależności trzech wartości zagrożonych ryzykiem od liczby dni transakcyjnych $1 \leq N \leq 1000$ dla trzech przedstawionych powyżej rozkładów: linia czerwona wzór (8.112), linia niebieska wzór (8.106) i linia zielona wzór (8.123). Jak widać, dla dużej liczby dni transakcyjnych wartość zagrożona ryzykiem dla rozkładu potęgowego (linia czerwona) szybciej rośnie w porównaniu z pozostałymi dwoma rozkładami (wykładniczym - linia niebieska i Gaussa - linia zielona).



Rysunek 8.21: Porównanie zależności trzech wartości zagrożonych ryzykiem od liczby dni transakcyjnych $1 \leq N \leq 150$ dla trzech przedstawionych powyżej rozkładów: linia czerwona wzór (8.112), linia niebieska wzór (8.106) i linia zielona wzór (8.123).

Otrzymuje się je z ogólnego równania (8.85) po wykorzystaniu (8.120) i (8.121). Istnienie tak różnych równań jak (8.123) i (8.126) wskazuje na to, że Λ_{VaR} i Λ_{max} są dwiema zasadniczo różnymi wielkościami różniącymi się także od $\langle \Delta X \rangle$. Świadczy to o komplikacji i nieprzejrzystości jaką wprowadzałby rozkład Gaussa gdyby chciano go stosować do analizy ryzyka rynkowego.

Należy podkreślić, że w ogólności nie istnieje liniowa zależność pomiędzy poziomem ryzyka Λ_{VaR} a zmiennością $\sigma(\tau)$ nawet jeżeli ta ostatnia wielkość jest skończona. Dysponujemy jedynie nierównością Czebyszewa, będącą najlepszą z oszacowań

$$\mathcal{P}_{VaR} \leq \frac{\sigma^2(\tau)}{(\Lambda_{VaR})^2} \Leftrightarrow \Lambda_{VaR} \leq \sigma_0^2 \cdot \tau \mathcal{P}_{VaR}^{-1/2}, \quad (8.127)$$

przy czym druga z nierówności może być przydatna do oszacowania górnej wartości Λ_{VaR} - jej zaletą jest nadzwyczajna efektywność (oczywiście o ile σ_0 istnieje).

8.5 Podsumowanie tabelaryczne

Podsumowanie przedstawiamy w postaci zbiorczej tabeli 8.5 pokazującej jawne relacje pomiędzy wielkościami charakteryzującymi ryzyko w omawianych przez nas przykładach. Termin 'brak' występujący w tabeli oznacza, że brak jest jawnej rela-

Tabela 8.1: Zestawienie jawnych relacji określających poziom ryzyka Λ_{VaR} .

Przykład No.	Jawna relacja $\Lambda_{VaR}(\sigma, \mathcal{P}_{VaR})$	Jawna relacja $\Lambda_{max}(\Lambda_{VaR})$
1	$\Lambda_{VaR} \approx -\sigma \ln \mathcal{P}_{VaR}$	$\Lambda_{max} = \Lambda_{VaR}$
2	$\Lambda_{VaR} = A \mathcal{P}_{VaR}^{-1/\beta}$	$\Lambda_{max} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{1/\beta} \Lambda_{VaR}$
3	$\Lambda_{VaR} = \sqrt{2} \sigma \operatorname{erfc}^{-1}(2\mathcal{P}_{VaR}) - \langle \Delta X \rangle$	brak

cji pomiędzy Λ_{max} i Λ_{VaR} . Łatwo się o tym można przekonać zestawiając równanie (8.123) z (8.126). Zatem, podkreślimy raz jeszcze, posługiwanie się rozkładem Gaussa w analizie ryzyka opartej na parametrach pozycyjnych jest niecelowe.

8.5.1 Kanoniczny algorytm symulacji kwantyli - prawdopodobieństwo strat a VaR

W niniejszym podrozdziale przedstawiony jest kanoniczny, prosty algorytm Monte Carlo (MC) umożliwiający obliczanie na drodze symulacji numerycznej kwantyli dowolnego rzędu wybranej wielkości²³ a w tym zwłaszcza dopuszczalnej wartości

²³Patrz Ph. Jorion: *Value At Risk. The New Benchmark for Managing Financial Risk (Third Edition)*, podrozdz. 12.2.1, 12.2.4, 12.2.5, McGraw-Hill, New York 2007, oraz P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, podrozdz. 9.1.2 a tam paragraf *Monte Carlo Simulation*, str. 489-491, Springer Science+Business Media, LLC, New York 2004.

Tabela 8.2: Ranking symulowanych strat

Strata	Krotność
$\Lambda_T^{j_1}$	$N_T^{j_1}$
$\Lambda_T^{j_2}$	$N_T^{j_2}$
$\dots$	$\dots$
$\Lambda_T^{j_{n-1}}$	$N_T^{j_{n-1}}$
$\Lambda_T^{j_n}$	$N_T^{j_n}$

narażonej na ryzyko, czyli VaR. **Algorytm ten stanowi punkt wyjścia wszystkich innych** - przedstawiamy go tutaj przykładowo dla strat. Ponadto, podajemy zasadniczy powód, dla którego w praktyce należy stosować algorytmy ulepszone - omawiamy te, które mogą być szczególnie przydatne.

Przykładowy algorytm dla strat

W pierwszej kolumnie tabeli 8.5.1 wypisano przykładowo ranking absolutnych wartości strat portfela $\Lambda_T^j = |V^j(T) - V^j(T - \Delta t)|$, $j = 1, 2, \dots, n$, jakie zanotowano w wybranej chwili T dla różnych trajektorii j symulowanych metodą MC w przedziale czasu $[T - \Delta t, T]$, wielkości $V^j(T - \Delta t)$ oraz $V^j(T)$ są tutaj wartościami portfela dla j -ej trajektorii odpowiednio w chwili $T - \Delta t$ i T . Ranking oznacza, że mamy tutaj do czynienia z uszeregowaniem "według wzrostu" absolutnych wartości strat, tzn. $\Lambda_T^{j_1} < \Lambda_T^{j_2} < \dots < \Lambda_T^{j_{n-1}} < \Lambda_T^{j_n}$, gdzie j_i jest numerem wysymulowanej trajektorii. Na przykład, gdy $j_1 = 7$ to znaczy, że najmniejszą, pierwszą w kolejności stratę zanotowano dla trajektorii numer 7, którą w związku z tym usytuowano w tabeli 8.5.1 na miejscu pierwszym, itd, itp. Zatem, indeks i mówi, że strata $\Lambda_T^{j_i}$ jest i -tą co do wielkości stratą. W drugiej kolumnie tabeli przedstawiono krotności występowania poszczególnych strat. Występowanie krotności większych od 1 oznacza, że dla niektórych trajektorii odnotowano jednakowe straty. Zatem, $N \geq \sum_{i'=1}^n N_T^{j_{i'}}$, gdzie N jest liczbą wszystkich wysymulowanych trajektorii (zarówno tych, dla których odnotowano straty jak i takich, dla których zanotowano zyski), natomiast n jest całkowitą liczbą różnych wartości strat.

Wyznaczenie kwantyla rzędu $1 - p$, czyli wielkości x_p ²⁴, sprowadza się do wykonania dwóch następujących kroków,

- 1) sumowania po kolei wszystkich krotności (idąc od dołu tabeli ku górze) tak długo jak długo spełniony jest warunek:

$$p \geq \frac{\max_i \left[\sum_{i'=0}^i N_T^{j_n-i'} \right]}{N}, \quad (8.128)$$

²⁴Stosujemy tutaj oznaczenie zaczerpnięte z książki P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*.

przy czym operacja $\max_i$ oznacza, że wybierane jest największe i , dla którego warunek (8.128) jest jeszcze spełniony. Pójście o krok dalej i dołączenie do sumy krotności $N_T^{j_{n-i-1}}$ zmieniłoby ten warunek na nierówność ostrą skierowaną w przeciwną stronę - jest to realizowane w drukim kroku.

- 2) Dzięki znalezieniu w pierwszym kroku indeksu i , odczytujemy w tabeli 8.5.1 wielkość strat $\Lambda_T^{j_{n-i-1}}$ oraz $\Lambda_T^{j_{n-i}}$ jakie wyznaczają, odpowiednio, dolną i górną granice przedziału ufności wewnątrz którego mieści się (z określonym prawdopodobieństwem) prawdziwa wartość poszukiwanego kwantyla. Prawdopodobieństwo to można obliczyć²⁵ z rozkładu dwumianowego, wykorzystując własność statystycznej niezależności strat (patrz podrozdz. 8.4.1).

Oczywiście, jeżeli na tej drodze chcemy wyznaczyć $VaR_{1-\alpha}$ należy przyjąć w powyższej procedurze $p = \alpha$. Jak widać, (w tej konwencji) $VaR_{1-\alpha}$ jest po prostu kwantylem rzędu $1 - \alpha$.

Jeżeli przedstawiona powyżej procedura pozwala zadowalająco oszacować na drodze symulacji MC zarówno skumulowane prawdopodobieństwo strat $P(\Lambda > x_p)$ jak też prawdziwą wartość x_p , to powinny być spełnione następujące, zdroworozsądkowe warunki

- a) wielkość przedziału ufności $\Lambda_T^{j_{n-i}} - \Lambda_T^{j_{n-i-1}}$ wewnątrz którego może się znajdować prawdziwa wartość poszukiwanego kwantyla powinna być dużo mniejsza od $\Lambda_T^{j_{n-i}}$,
- b) obie strony równości (8.128) powinny się od siebie różnić o małą wyższego rzędu; to samo powinno dotyczyć analogicznej (nie wypisanej tutaj w jawnej postaci) nierówności dla prawdopodobieństwa dopełniającego $1-p$ (bazującego zarówno na sumie wszystkich zysków jak też na sumie strat liczonej od góry tabeli 8.5.1 w dół aż do x_p).

Wskazemy teraz dlaczego spełnienie wprost powyższych dwóch warunków (czyli poprzez proste zwiększanie liczby symulowanych trajektorii) może prowadzić do nieefektywnej metody Monte Carlo oraz co należy zrobić aby przywrócić jej efektywność.

Problem dużej dyspersji estymaty wielkości x_p

Traktując straty jak wielkości statystycznie niezależne można, korzystając z rozkładu dwumianowego oraz stosując przybliżenie punktu siodłowego (ang. *saddle-point*

²⁵Ścisłej rzecz biorąc, oblicza się "pojemniejsze" prawdopodobieństwo. Jeżeli jest ono, z dokładnością do małej wyższego rzędu, równe $1 - p$ to można je traktować jak poziom ufności. Jeżeli tak nie jest, należy odpowiednio zwiększyć liczbę symulowanych trajektorii; patrz P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, podrozdz. 9.1.2, paragraf *Quantile Estimation*, str. 491.

*approximation*²⁶), wyznaczyć dyspersję estymaty poszukiwanego kwantyla. Przybiera ona następującą postać²⁷,

$$\sigma_p \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\rho(x_p^*)}, \quad (8.129)$$

gdzie ρ jest gęstością prawdopodobieństwa wystąpienia pojedynczej starty (albo zysku) natomiast x_p^* jest (zależną od N) estymatą wielkości x_p . Zwykle, gęstość ta maleje ze wzrostem N szybciej niż $1/\sqrt{N}$. Na przykład, gdy ρ ma postać wykładniczą wówczas $\rho(x_p^*) \sim 1/N$, natomiast gdy ρ jest funkcją potęgową o wykładniku potęgi α to $\rho(x_p^*) \sim 1/N^{1+1/\alpha}$. Zatem najczęściej, **dyspersja σ_p rośnie ze wzrostem N , a nie maleje jak byśmy chcieli**. Jest to sytuacja paradoksalna, wymagająca wprowadzenia metod redukujących dyspersję.

8.5.2 Wybrane metody redukcji dyspersji

Metody redukcji dyspersji, które omawiamy poniżej opierają się na traktowaniu strat w sposób przybliżony, uwzględniając co najwyżej wyrazy kwadratowe w niezależnych zmiennych stochastycznych obciążonych ryzykiem. Takie podejście pozwala (dzięki faktoryzacji Choleskiego) na wyrażenie strat za pomocą nieskorelowanych zmiennych normalnych. Dzięki temu oraz wykorzystaniu rozwinięcia kumulantowego, znalezienie rozkładu tych strat, a stąd VaR, jest znacznie ułatwione.

Paraboliczne przybliżenie delta-gamma

²⁶Przybliżenie to jest także znane pod nazwą metody największego spadku (ang. *steepest-descent method*).

²⁷Patrz M. Kozłowska, R. Kutner: *Anomalous transport and diffusion versus extreme value theory*, Physica A 357 (2005) 282-304; .

Bibliografia

- [1] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2000.
- [2] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001.
- [3] Kutner R.: *Extreme events as foundation of Lévy walks with varying velocity*, J. Chem. Phys. **284** (2002) 481–505.
- [4] A.A. Moreira, J.S. Andrade, Jr., and L.A.N. Amaral, *Extremum Statistics in Scale-Free Network Models*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 268703-1–4.
- [5] S. Albeverio and V. Piterbarg: *Mathematical Methods and Concepts for the Analysis of Extreme Events*, in *Extreme Events in Nature and Society*, eds. S. Albeverio, V. Jentsch, H. Kants, Springer-Verlag, Berlin 2006, pp. 47–68.
- [6] P. Kosewski, R. Kutner: *Wykrywanie zdarzeń ekstremalnych w finansowych szeregach czasowych*, in *Nowe zjawiska na rynku finansowym*, red. T. Gruszeński, J. Bednarz, Wydawnictwo KUL, Lublin 2012.
- [7] R. Nowak: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

Część VI

Dodatki

Dodatek A

Pochodna fraktalna dowolnego stopnia - definicja Riemanna Liouville'a

W niniejszym dodatku przedstawimy definicję Riemanna-Liouville'a pochodnej fraktalnej (czyli ułamkowej). Podejście składa się z trzech kroków.

Krok pierwszy: definicja ujemnej pochodnej całkowitej stopnia $-n$.

Jak już wspomnieliśmy w rozdz.2.4 ujemna pochodna stopnia -1 to po prostu pojedyncza całka Riemanna (patrz wzór (2.30)). Naturalnie, pochodna stopnia całkowitego $-n$ (gdzie n jest liczbą naturalną) to całka n -krotna; zatem,

$$\frac{d^{-n}f(t)}{dt^{-n}} = \int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_0^{t_1} dt_0 f(t_0) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t dt' \frac{f(t')}{(t-t')^{1-n}}, \quad (\text{A.1})$$

co stanowi punkt wyjścia ogólniejszej definicji.

Krok drugi: definicja ujemnej pochodnej fraktalnej stopnia $-\alpha$.

Bezpośrednim uogólnieniem pochodnej stopnia $-n$ na pochodną dowolnego ujemnego stopnia $-\alpha$ (gdzie α jest dodatnią liczbą rzeczywistą) jest zastąpienie w ostatniej całce po prawej stronie wyrażenia (A.1) znajdującej się tam silni $(n-1)!$ przez $\Gamma_{Eulera}(\alpha)$ oraz wykładnika n przez α . Wówczas możemy wprowadzić definicję

$$\frac{d^{-\alpha}f(t)}{dt^{-\alpha}} \stackrel{def.}{=} \frac{1}{\Gamma_{Eulera}(\alpha)} \int_0^t dt' \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}}; \quad (\text{A.2})$$

warto wiedzieć, że w przypadku ogólniejszym, gdy dolna granica całkowania może być różna od zera, stosuje się oznaczenie

$${}_aD_t^{-\alpha}f(t) \stackrel{def.}{=} \frac{1}{\Gamma_{Eulera}(\alpha)} \int_a^t dt' \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}}, \quad (\text{A.3})$$

skąd dla $a = 0$ mamy oczywiście

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{d^{-\alpha} f(t)}{dt^{-\alpha}}. \quad (\text{A.4})$$

Teraz możemy już odpowiedzieć na pytanie: jak zdefiniować pochodną fraktalną stopnia α ?

Krok trzeci: definicja pochodnej fraktalnej stopnia $\alpha > 0$.

Odpowiedź na postawione powyżej pytanie jest już bardzo prosta. Wystarczy bowiem n razy zróżniczkować pochodną fraktalną stopnia $\alpha - n (< 0)$

$${}_aD_t^\alpha f(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^{\alpha-n} f(t)), \quad (\text{A.5})$$

co stanowi definicję Riemanna-Liouville'a pochodnej fraktalnej (dodatniego stopnia rzeczywistego). W dalszym ciągu używać będziemy tej pochodnej jedynie dla $a = 0$. Inny wykorzystywany szczególny przypadek to gdy $a = \infty$ - wtedy nazywa się ona pochodną fraktalną Weyla. Oczywiście, z tego punktu widzenia zarówno równanie relaksacji fraktalnej (2.33) jak i dyfuzji fraktalnej (2.55) są niejednoznaczne ze względu na dowolność wyboru dolnej granicy całkowania.

A.1 Podstawowe własności pochodnej fraktalnej

Podamy teraz szereg własności pochodnej fraktalnej, które umożliwią nam operowanie tym narzędziem wielce użytecznym w analizie procesów niegaussowskich.

Po pierwsze, zauważmy, że dowolna pochodna fraktalna funkcji potęgowej wynosi

$${}_0D_t^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma_{Euler}(\mu + 1)}{\Gamma_{Euler}(\mu + 1 - \alpha)} t^{\mu-\alpha} \quad (\text{A.6})$$

skąd

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha \exp(t) &= {}_0D_t^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{\Gamma_{Euler}(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m-\alpha}}{\Gamma_{Euler}(m+1-\alpha)} \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma_{Euler}(1-\alpha)} {}_1F_1(1, 1-\alpha, t). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Przy okazji warto zaznaczyć, że pochodna fraktalna Weyla daje (podobnie jak zwykła pochodna)

$${}_\infty D_t^\alpha \exp(t) = \exp(t), \quad (\text{A.8})$$

dla dowolnego rzeczywistego α .

Po drugie, pokażemy czemu równa jest transformata Laplace'a pochodnej fraktalnej.

Dodatek B

Obliczenie średniej nadwyżki $\langle \Delta n \rangle$

Aby wyznaczyć średnią nadwyżkę $\langle \Delta n \rangle$ podstawmy najpierw wzór (3.2) do (3.1) - daje to wyrażenie przejściowe

$$\begin{aligned}\langle \Delta n \rangle &= \frac{1}{2^n} \sum_{\Delta n > 0}^n \Delta n \left(\frac{n}{\frac{n+\Delta n}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\Delta n > 0}^n \Delta n \exp \left(\ln n! - \ln \left(\frac{n+\Delta n}{2} \right)! - \ln \left(\frac{n-\Delta n}{2} \right)! \right) \quad (\text{B.1})\end{aligned}$$

dobrze nadające się do kolejnych, niezbędnych przekształceń.

W tym celu korzystamy ze wzoru Stirlinga postaci:

$$\ln n! \approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \Theta(n^{-1}), \quad (\text{B.2})$$

zakładając przy tym, że $n \gg 1$ oraz $\frac{|\Delta n|}{n} \ll 1$. Zatem,

$$\begin{aligned}\langle \Delta n \rangle &\approx \sum_{\Delta n > 0}^n \Delta n \exp \left(-\frac{n}{2} \left(1 + \frac{\Delta n}{n} \right) \left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^3 \right) \right) \times \\ &\times \exp \left(\frac{n}{2} \left(1 - \frac{\Delta n}{n} \right) \left(\frac{\Delta n}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^3 \right) \right) \times \\ &\times \exp \left(\ln \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\Delta n}{n} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\Delta n}{n} \right) - \ln \sqrt{2\pi} \right). \quad (\text{B.3})\end{aligned}$$

Rozwijając w szereg, do trzeciego stopnia w $\Delta n/n$, funkcję $\ln$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3, \quad (\text{B.4})$$

możemy wyrażenie (B.3) przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}\langle \Delta n \rangle &\approx \left(\frac{2}{\pi n} \right)^{1/2} \sum_{\Delta n > 0}^n \Delta n \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta n^2}{n} + \frac{1}{2} \frac{\Delta n^2}{n^2} \right) \\ &\approx \left(\frac{2}{\pi n} \right)^{1/2} \sum_{\Delta n > 0}^n \Delta n \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta n^2}{n} \right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{n}, \quad (\text{B.5})\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość została otrzymana dzięki przejściu od sumy po n do odpowiadającej jej, ważonej połówkową całką gaussowską. Przy okazji zaznaczmy, że powyższe wyprowadzenie sprowadziło się po prostu (przy narzuconych ograniczeniach) do przejścia od rozkładu dwumianowego do rozkładu Gaussa.

Dodatek C

Metoda Punktu Siodłowego

Metoda Punktu Siodłowego (ang. *Saddle-Point Approximation*) zwana także Metodą Największego Spadku¹ (ang. *Steepest Descent Method*). Metoda ta pozwala na przybliżone obliczenie szerokiej klasy całek.

Zatem, niech wyznaczenia wymaga całka

$$I = \int \exp(-NF(x))dx, \quad (\text{C.1})$$

dla której funkcja $F(x)$ ma minimum w punkcie siodłowym $x = x^*$, czyli punkt ten jest określony za pomocą równości $F'(x^*) = 0$, przy czym druga pochodna w tym punkcie² $F''(x^*) > 0$. Rozwińmy funkcję $F(x)$ w szereg Taylora w punkcie $x = x^*$. Otrzymujemy,

$$I \approx \exp(-NF(x^*)) \int \exp[-NF''(x^*)(x - x^*)^2/2]dx. \quad (\text{C.2})$$

Jak widać, sprowadziliśmy obliczenie wyjściowej całki (C.1) do wyznaczenia całki gaussowskiej. Ostatecznie, dla $N \gg 1$ możemy z dobrym (kontrolowanym) przybliżeniem napisać, że

$$I \approx \exp(-NF(x^*)) \sqrt{\frac{2\pi}{NF''(x^*)}}. \quad (\text{C.3})$$

Widać, że tak obliczona **całka I jest obarczona tym mniejszym błędem im dyspersja $1/\sqrt{NF''(x^*)}$ funkcji $NF(x)$ jest mniejsza**. Dlatego właśnie potrzebne było tutaj przyjęcie dużej wartości N .

¹Metoda ta jest też znana pod nazwą Przybliżenia Parabolicznego (ang. *Parabolic Approximation*) czasami nazywa się ją też Metodą Stacjonarnej Fazy (ang. *Method of Stationary Phase*).

²Punkt ten nazywamy siodłowym a nie po prostu minimum, gdyż w niewidocznych tutaj (dla prostoty) zmiennych może w tym punkcie być maximum.

Dodatek D

Własności funkcji rozkładu czasów oczekiwania

Po pierwsze, rozważamy sytuację dla krótkich czasów tzn. gdy $\gamma_0 t \ll 1$; wówczas funkcję wykładniczą w funkcji podcałkowej można rozwinąć w szereg potęgowy, ograniczając się tylko do trzech pierwszych wyrazów,

$$\begin{aligned}\phi(t) &\approx \frac{\gamma_0 \alpha}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}} \int_0^{\gamma_0 t} y^\alpha \left(1 - y + \frac{1}{2} y^2\right) dy \\ &= \gamma_0 \alpha \left[\frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{2+\alpha} \gamma_0 t + \frac{1}{2} \frac{1}{3+\alpha} (\gamma_0 t)^2 \right] \\ &= \gamma_0 \frac{\alpha}{1+\alpha} \exp\left(-\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \gamma_0 t\right).\end{aligned}\tag{D.1}$$

Widać, że $\phi(t=0) = \gamma_0 \frac{\alpha}{1+\alpha}$ jest nieznikającą, skończoną wartością. Ponadto, z (D.1) wynika, że trzeci wyraz rozwinięcia jest znacznie mniejszy od drugiego co oznacza, że funkcja $\phi(t)$ maleje (z dobrym przybliżeniem) liniowo z czasem dla krótkich czasów.

Po drugie zauważmy, że dla $0 \leq \alpha \leq 1$ oraz $y \geq 1$ funkcja podcałkowa podlega prostemu oszacowaniu

$$\exp(-y) \leq y^\alpha \exp(-y) \leq y \exp(-y),\tag{D.2}$$

przy czym dla $\alpha \neq 0, 1$, obie równości zachodzą jednocześnie tylko dla skrajnych wartości $y = 1$ albo $y = \infty$. W ogólności dla $m \leq \alpha \leq m+1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, ma miejsce oszacowanie

$$y^m \exp(-y) \leq y^\alpha \exp(-y) \leq y^{m+1} \exp(-y);\tag{D.3}$$

dalsze rachunki prowadzimy tylko dla przypadku $m = 0$, pozostawiając sytuację dowolnego naturalnego m zainteresowanemu Czytelnikowi. Należy zaznaczyć, przypadki marginalne $\alpha = m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, można obliczyć wprost (patrz poniżej, na zakończenie przykładowy rachunek dla $\alpha = 1$).

Z relacji (D.2) otrzymujemy dla $\gamma_0 t \geq 1$ oszacowanie całkowite,

$$\int_{\gamma_0 t}^{\infty} \exp(-y) dy \leq \int_{\gamma_0 t}^{\infty} y^{\alpha} \exp(-y) dy \leq \int_{\gamma_0 t}^{\infty} y \exp(-y) dy, \quad (\text{D.4})$$

przy czym dla $\alpha \neq 0, 1$, obie równości zachodzą jednocześnie tylko w granicy $\gamma_0 t \rightarrow \infty$; z (D.4) wynika poszukiwane oszacowanie

$$\exp(-\gamma_0 t) \leq \int_{\gamma_0 t}^{\infty} y^{\alpha} \exp(-y) dy \leq 2 \exp(-\gamma_0 t). \quad (\text{D.5})$$

Co więcej, zgodnie z definicją funkcji Γ mamy,

$$\int_0^{\gamma_0 t} y^{\alpha} \exp(-y) dy = \Gamma(1 + \alpha) - \int_{\gamma_0 t}^{\infty} y^{\alpha} \exp(-y) dy. \quad (\text{D.6})$$

Dalej, korzystając z oszacowania (D.5) oraz równości (D.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Gamma(1 + \alpha) - 2 \exp(-\gamma_0 t) &\leq \int_0^{\gamma_0 t} y^{\alpha} \exp(-y) dy \\ &\leq \Gamma(1 + \alpha) - \exp(-\gamma_0 t). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Stąd, dla asymptotycznie długiego czasu (czyli $\gamma_0 t \gg 1$) mamy z dobrym przybliżeniem

$$\int_0^{\gamma_0 t \gg 1} y^{\alpha} \exp(-y) dy \approx \Gamma(1 + \alpha). \quad (\text{D.8})$$

Zatem, przy tych warunkach uzyskujemy z dobrym przybliżeniem, że

$$\phi(t) \approx \gamma_0 \alpha \Gamma(1 + \alpha) \frac{1}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}}. \quad (\text{D.9})$$

Zauważmy, że zależność (D.9) jest spełniona dla dowolnego, nieujemnego wykładnika α przy czym w dalszym ciągu główny nurt naszych zainteresowań dotyczy przypadku $\alpha < 1$.

Przypadek marginalny $\alpha = 1$. Całkując przez części całkę stojącą (w trzeciej równości) w wyrażeniu (6.64) otrzymujemy, że

$$\int_0^{\gamma_0 t} y^{\alpha=1} \exp(-y) dy = 1 - \exp(-\gamma_0 t). \quad (\text{D.10})$$

Zatem dla $\gamma_0 t \gg 1$, $\phi(t)$ przybiera natychmiast asymptotyczną postać

$$\phi(t) \approx \frac{\gamma_0}{(\gamma_0 t)^2}, \quad (\text{D.11})$$

która wynika także z wyrażenia (D.9) (uzyskanego na znacznie dłuższej drodze).

Po trzecie, omawiamy przypadek pośredni gdy $\alpha \lesssim \gamma_0 t \lesssim 1$ (w dalszym ciągu rozważamy sytuacje dla których $\alpha < 1$). Ze wzoru (6.66) widać, że funkcja ϕ jest iloczynem funkcji malejącej (potęgowo w czasie) i rosnącej (w czasie, danej w postaci całkowitej). Można zatem poszukiwać takiego czasu, dla którego funkcja rozkładu ϕ posiada lokalne maksimum.

Dodatek E

Ścisła funkcja rozkładu czasów oczekiwania

Punktem wyjścia jest przedstawienie poniższej funkcji wykładniczej za pomocą transformaty Mellina (patrz, Harry Bateman, Arthur Erdély, "Tables of Integral Transforms", Vol.I, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1954),

$$\exp\left(-\gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right)t\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \Gamma(s) \exp\left(\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}} s\right), \quad 0 < c = \Re s < 1. \quad (\text{E.1})$$

Następnie, podstawiając (E.1) do (6.62) otrzymujemy,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \gamma_0 \alpha \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \Gamma(s) \int_0^\infty d\left(\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}(1 + \alpha - s)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \gamma_0 \alpha \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 + \alpha - s}, \quad 0 < c = \Re s < 1. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Wprowadzając powiększający się kontur K przedstawiony na rys...., którego góra (K_u), prawy bok (K_r) oraz podstawa (K_d) odsuwają się do nieskończoności, można całkę w (E.2) zamienić na całkę konturową

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 + \alpha - s} = -\frac{1}{2\pi i} \gamma_0 \alpha \oint_{K^\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 + \alpha - s} \quad (\text{E.3})$$

gdzie K^∞ jest konturem K , który uległ nieskończonemu powiększeniu (orientacja całki konturowej jest ujemna stąd znak "−" stojący po prawej stronie równości). Skorzystaliśmy tutaj z faktu, że gdy $x \rightarrow \infty$ (gdzie $s = x + iy$) wówczas,

$$\int_{K_r} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 + \alpha - s} \rightarrow 0, \quad (\text{E.4})$$

gdyż $(\gamma_0 t)^{-x-iy} \rightarrow 0$ (gdy $x \rightarrow \infty$) dla $\gamma_0 t > 1$; czyli powyższa całka na prawym brzegu (boku) konturu (prostokąta) K_r znika gdy brzeg ten oddala się do nieskończoności. Ponadto skorzystaliśmy z własności mówiącej, że gdy $|y| \rightarrow \infty$ wówczas,

$$\int_{K_{u,d}} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 + \alpha - s} \rightarrow 0. \quad (\text{E.5})$$

Dowód powyższej własności wynika bezpośrednio z asymptotycznego przedstawienia funkcji $\Gamma(s(=x+iy))$ dla $|y| \rightarrow \infty$ (patrz, I.M. Ryżyk i I.S. Gradsztajn, "Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów", PWN, Warszawa 1964),

$$|\Gamma(x+iy)| \rightarrow (2\pi)^{1/2} |y|^{x-1/2} \exp(-\frac{\pi}{2} |y|), \quad (\text{E.6})$$

w którym czynnik wykładniczy decyduje o zanikaniu ze wzrostem $|y|$ przy ustalonym x .

Zatem, naszym zadaniem jest teraz obliczenie całki konturowej po prawej stronie równości (E.3); można to przeprowadzić korzystając z metody residuów (patrz, Krzysztof Maurin, "Analiza. Cz.II. Wstęp do analizy globalnej", PWN, Warszawa 1971). Zauważmy w tym celu, że jedyny biegun funkcji podcałkowej (oznaczymy ją przez F) jaki znajduje się na dodatniej osi rzeczywistej to zero mianownika $1+\alpha-s$ tzn. biegun funkcji F jest w punkcie $s_0 = 1+\alpha$. Ponadto, jak widać biegun ten jest rzędu pierwszego.

Metoda residuów mówi, że wspomniana powyżej całka konturowa

$$\oint_{K^\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1+\alpha-s} = -2\pi i \text{Res } F(s_0), \quad (\text{E.7})$$

gdzie $\text{Res } F(s_0)$ to residuum funkcji podcałkowej F w punkcie s_0 . Metoda residuów podaje przepis pozwalający wyznaczyć residuum w punkcie będącym np. biegunem rzędu pierwszego mianownika, jest to następująca granica

$$\text{Res } F(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} ((s-s_0)F(s)). \quad (\text{E.8})$$

Obliczenie powyższej granicy jest natychmiastowe i daje

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s-s_0)F(s) = -(\gamma_0 t)^{-1-\alpha} \Gamma(1+\alpha). \quad (\text{E.9})$$

Wreszcie, podstawiając kolejno (E.9) do (E.8), następnie (E.8) do (E.7) a to do (E.3) możemy za pomocą takiego przekształconego wyrażenia zapisać ostatecznie (E.2) w postaci (D.9)

$$\phi(t) \approx \gamma_0 \frac{\alpha \Gamma(1+\alpha)}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}}, \quad (\text{E.10})$$

wyprowadzonej na alternatywnej drodze w Dodatku D.

Dodatek F

Funkcja rozkładu czasów oczekiwania Weierstrassa-Mandelbrota

I. Metoda bezpośrednia. Wyprowadzimy ścisłą postać funkcji rozkładu czasów oczekiwania Weierstrassa-Mandelbrota, korzystając z transformaty Mellina oraz metody całkowania przez residua. Takie podejście pozwoli na bezpośrednie uzyskanie potęgowego zaniku funkcji rozkładu $\phi(t)$ w zależności od czasu t bez potrzeby wykonywania dwukrotnej transformaty Laplace'a, raz wyjściowej prostej do przestrzeni odwrotnej i drugi raz (na zakończenie procedury) powrót do przestrzeni prostej za pomocą odwrotnej transformaty Laplace'a. Jest to podejście oryginalne, alternatywne w stosunku do istniejącego już w literaturze.

Nasz wywód rozpoczniemy od funkcji rozkładu danej wyrażeniem (6.98)

$$\phi(t) = \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{M}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j} \gamma^j \exp(-\gamma_0 \gamma^j t). \quad (\text{F.1})$$

Korzystając z transformaty Mellina funkcji wykładniczej (patrz, Harry Bateman, Arthur Erdélyi, "Tables of Integral Transforms", Vol.I, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1954),

$$\exp(-\gamma_0 \gamma^j t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \Gamma(s) \gamma^{-js}, \quad 0 < \Re s = c < 1, \quad (\text{F.2})$$

można funkcję rozkładu daną wyrażeniem (F.1) przekształcić do postaci

$$\phi(t) = \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{M}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \Gamma(s) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma^{1-s}}{M}\right)^j, \quad (\text{F.3})$$

którą dalej przekształcamy korzystając z faktu, iż dla $\gamma < 1$ oraz $M > 1$ zawsze można dobrać liczbę $0 < c < 1$ tak aby wartość ilorazu kolejnych składników szeregu

geometrycznego (występującego w (F.3)), czyli $|\gamma^{1-s}/M| = \gamma^{1-c}/M$, była mniejsza od jedności. Zatem, wyrażenie (F.3) przybiera postać

$$\phi(t) = \gamma_0(1 - \frac{1}{M}) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}}, \quad (F.4)$$

którą w dalszym ciągu przekształcamy korzystając z metody residuów (patrz, Krzysztof Maurin, "Analiza. Cz.II. Wstęp do analizy globalnej", PWN, Warszawa 1971). Zatem, wprowadźmy kontur prostokątny $K(=K_l + K_u + K_r + K_d)$ na płaszczyźnie zespolonej schematycznie przedstawiony na rys.... Wykażemy, że

$$\int_{c-i\infty}^{c+\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}} = - \oint_{K^\infty} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}}, \quad (F.5)$$

gdzie całkowanie po prawej stronie powyższej równości przeprowadzono wzdłuż konturu K , którego prawy bok oraz podstawa i górna krawędź oddalają się do nieskończoności (stąd oznaczenie K^∞) ponadto, orientacja całki konturowej jest ujemna (stąd znak " - " przed nią). Po pierwsze zauważmy, że gdy $x \rightarrow \infty$ wówczas,

$$\int_{K_r} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}} \rightarrow 0, \quad (F.6)$$

gdzie $s = x + iy$, gdyż $\gamma_0 t > 1$ i $(\gamma_0 t)^{-x-iy} \rightarrow 0$ gdy $x \rightarrow \infty$; czyli powyższa całka na prawym brzegu (boku) konturu (prostokąta) K_r zanika gdy brzeg ten oddala się do nieskończoności.

Po drugie wykażemy, że gdy $|y| \rightarrow \infty$ wówczas,

$$\int_{K_{u,d}} ds (\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}} \rightarrow 0. \quad (F.7)$$

Dowód powyższego twierdzenia wynika bezpośrednio z asymptotycznego przedstawienia funkcji Γ dla $|y| \rightarrow \infty$ (patrz, I.M. Ryżyk i I.S. Gradsztajn, "Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów", PWN, Warszawa 1964),

$$|\Gamma(x + iy)| \rightarrow (2\pi)^{1/2} |y|^{x-1/2} \exp(-\frac{\pi}{2} |y|). \quad (F.8)$$

Zatem, naszym zadaniem jest teraz obliczenie całki konturowej po prawej stronie równości (H.16); można to przeprowadzić korzystając z metody residuów. Zauważmy w tym celu, że jedyne bieguny funkcji podcałkowej jakie znajdują się po dodatniej stronie osi rzeczywistej to zera mianownika $1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}$ czyli

$$1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M} = 0 \Rightarrow s_n = 1 + \alpha - \frac{2\pi i}{\ln(\gamma)} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (F.9)$$

gdzie przez s_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, oznaczono poszukiwane bieguny. Ponadto, jak wiadać bieguny te są rzędu pierwszego. Metoda residuów mówi, że wspomniana powyżej całka konturowa

$$-\oint_{K^\infty} ds(\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}} = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Res } F(s_n), \quad (\text{F.10})$$

gdzie $\text{Res } F(s_n)$ to residuum funkcji podcałkowej, którą oznaczyliśmy tutaj przez F , w punkcie s_n . Metoda residuów podaje m.in. przepis jak wyznaczyć residuum w punkcie będącym biegunem rzędu pierwszego mianowicie, jest to następująca granica

$$\text{Res } F(s_n) = \lim_{s \rightarrow s_n} [(s - s_n)F(s)]. \quad (\text{F.11})$$

W naszym przypadku, obliczenie tej granicy sprowadza się w zasadzie do obliczenia granicy poniższego wyrażenia,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}} &= \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{1 - \frac{1}{M} \exp((1 - s_n) \ln(\gamma)) \exp((s_n - s) \ln(\gamma))} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{1 - \exp((s_n - s) \ln(\gamma))} = \frac{1}{\ln(\gamma)}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Stąd oraz ze (F.11), (F.10), (H.16) i (F.4) otrzymujemy wreszcie,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -\gamma_0 \left(1 - \frac{1}{M}\right) \oint_{K^\infty} ds(\gamma_0 t)^{-s} \frac{\Gamma(s)}{1 - \frac{\gamma^{1-s}}{M}} \\ &= -\frac{\gamma_0}{\ln(\gamma)} \left(1 - \frac{1}{M}\right) (\gamma_0 t)^{-1-\alpha} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s_n) (\gamma_0 t)^{\frac{2\pi i}{\ln(\gamma)} n} \\ &= -\frac{\gamma_0}{\ln(\gamma)} \left(1 - \frac{1}{M}\right) (\gamma_0 t)^{-1-\alpha} \times \{ \Gamma(s_0) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma(s_n) (\gamma_0 t)^{\frac{2\pi i}{\ln(\gamma)} n} + \Gamma(s_{-n}) (\gamma_0 t)^{\frac{-2\pi i}{\ln(\gamma)} n}] \}. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Można wykazać na drodze numerycznej, że (dla $\gamma_0 t > 1$)

$$\Gamma(s_0) \gg \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma(s_n) (\gamma_0 t)^{\frac{2\pi i}{\ln(\gamma)} n} + \Gamma(s_{-n}) (\gamma_0 t)^{\frac{-2\pi i}{\ln(\gamma)} n}]; \quad (\text{F.14})$$

dowód analityczny, jak dotychczas, nie jest znany. Rys.... przedstawia ... Zatem, z dobrym przybliżeniem można zapisać

$$\phi(t) \approx -\frac{\gamma_0}{\ln(\gamma)} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \Gamma(1 + \alpha) (\gamma_0 t)^{-1-\alpha}. \quad (\text{F.15})$$

Dodatek G

Użyteczne transformaty Laplace’a

Wyprowadzimy wzór na transformatę Laplace’a $\tilde{\phi}(s) (\stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathcal{L}_s(\phi(t)))$ funkcji rozkładu czasów oczekiwania. W tym celu skorzystamy z pomocniczej relacji,

$$\mathcal{L}_s \left(-\frac{d}{dt} \Phi(t) \right) = \Phi(0) - s\tilde{\Phi}(s), \quad (\text{G.1})$$

spełnionej dla dowolnej, różniczkowalnej funkcji Φ posiadającej transformatę Laplace’a $\tilde{\Phi}(s)$ (patrz, I.M. Ryżyk i I.S. Gradsztajn, ”Tablice, sum, szeregów i iloczynów”, PWN, Warszawa 1964).

Z (6.66) widać, że dla $t \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \phi(t) &\approx \frac{k_B \mathcal{T} \Gamma(1+\alpha)}{\gamma_0^\alpha \mathcal{E}} \frac{1}{t^{1+\alpha}} = -\frac{k_B \mathcal{T} \Gamma(1+\alpha)}{\alpha \gamma_0^\alpha \mathcal{E}} \frac{d}{dt} (t^{-\alpha} + \text{const}) \\ &= -\frac{d}{dt} \Phi(t), \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

gdzie asymptotyczna postać funkcji

$$\Phi(t) \approx \frac{k_B \mathcal{T} \Gamma(1+\alpha)}{\alpha \gamma_0^\alpha \mathcal{E}} (t^{-\alpha} + \text{const}), \quad (\text{G.3})$$

posiada dla $\alpha < 1$ transformatę Laplace’a daną wzorem (patrz, I.M. Ryżyk i I.S. Gradsztajn, ”Tablice, sum, szeregów i iloczynów”, PWN, Warszawa 1964),

$$\tilde{\Phi}(s) \approx \frac{k_B \mathcal{T} \Gamma(1+\alpha)}{\alpha \gamma_0^\alpha \mathcal{E}} \left(\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} + \frac{\text{const}}{s} \right), \quad (\text{G.4})$$

Z relacji (G.1), (G.2) oraz (G.4) wynika, że

$$\tilde{\phi}(s) = \mathcal{L}_s \left(-\frac{d}{dt} \Phi(t) \right) = \Phi(0) - \frac{k_B \mathcal{T} \Gamma(1+\alpha)}{\alpha \gamma_0^\alpha \mathcal{E}} (\Gamma(1-\alpha) s^\alpha + \text{const}). \quad (\text{G.5})$$

Stałą const należy wybrać tak aby funkcja rozkładu ϕ spełniała warunek normalizacji (6.61), który można wyrazić w postaci

$$\tilde{\phi}(s=0) = 1. \quad (\text{G.6})$$

Stąd oraz z (G.5) wynika, że

$$const = (\Phi(0) - 1) \left(\frac{k_B \mathcal{T} \Gamma(1 + \alpha)}{\alpha \gamma_0^\alpha \mathcal{E}} \right)^{-1} \quad (\text{G.7})$$

Z powyższego oraz ze (G.5) otrzymujemy ostatecznie, że

$$\tilde{\phi}(s) = 1 - \frac{\pi \alpha}{\sin(\pi \alpha)} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha, \quad (\text{G.8})$$

gdzie milcząco skorzystaliśmy z pomocniczych wzorów

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k_B \mathcal{T}}{\mathcal{E}}, \\ \Gamma(1 + \alpha) &= \alpha \Gamma(\alpha), \\ \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) &= \frac{\pi}{\sin(\pi \alpha)}. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Wprowadzając bezwymiarowy współczynnik

$$\gamma'_f = \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi \alpha}, \quad (\text{G.10})$$

możemy (G.8) zapisać następująco,

$$\tilde{\phi}(s) = 1 - \frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha. \quad (\text{G.11})$$

Przy okazji zauważmy, że ze (G.2) otrzymujemy

$$\Phi(t) = \Phi(0) - \int_0^t dt' \phi(t'). \quad (\text{G.12})$$

Wybierając stałą $\Phi(0) = 1$ (co na mocy (G.7) daje $const = 0$) oraz korzystając z warunku normalizacji (6.61), otrzymujemy, że

$$\Phi(t) = \int_t^\infty dt' \phi(t'), \quad (\text{G.13})$$

stając się tym samym gęstością prawdopodobieństwa przetrwania cząsteczki w jakiejś dolinie potencjału przynajmniej przez czas t ; jest to funkcja, która odgrywa wspomagającą, ważną rolę w modelu błędzenia cząsteczki w czasie ciągłym. Z (G.12) oraz (G.11) wynika bezpośrednio (patrz, I.M. Ryżyk i I.S. Gradsztajn, "Tablice, sum, szeregów i iloczynów", PWN, Warszawa 1964), że transformata Laplace'a

$$\tilde{\Phi}(s) = \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{s} = \frac{1}{\gamma_0 \gamma'_f} \left(\frac{\gamma_0}{s} \right)^{1-\alpha}. \quad (\text{G.14})$$

Z powyższego oraz z (6.88) widać, że średni czas oczekiwania

$$\langle t \rangle = \tilde{\Phi}(s = 0) \quad (\text{G.15})$$

jest, dla $\alpha < 1$, nieskończony.

Dodatek H

Sferyczne przeloty Weierstrassa

Dla sferycznych przelotów Weierstrassa w czasie dyskretnym część przestrzenna $p(\vec{x})$ gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia się cząsteczki o wektor $\vec{x}$ w wyniku pojedynczego przelotu posiada własność sferycznej symetrii,

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{S_d |\vec{x}|^{d-1}} p_0(|\vec{x}|), \quad (\text{H.1})$$

spełniając warunek normalizacji

$$\int d\vec{x} p(\vec{x}) = \int_0^\infty d|\vec{x}| p_0(|\vec{x}|) = 1 \quad (\text{H.2})$$

gdzie $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ jest powierzchnią $d - 1$ wymiarowej hipersfery o promieniu jednostkowym (gdzie d jest wymiarem przestrzeni Euklidesowej). Zauważmy, że $S_{d=3} = 4\pi$, $S_{d=2} = 2\pi$, $S_{d=1} = 2$. W dalszym ciągu przyjmujemy, analogicznie jak dla jednowymiarowych przelotów Weierstrassa, że

$$p_0(|\vec{x}|) = \frac{N-1}{N} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N^j} \delta(|\vec{x}| - b^j); \quad (\text{H.3})$$

widać, że w szczególnym przypadku $d = 1$, $p(x) = p_0(x)/2$ (gdzie dla uproszczenia opuściliśmy oznaczenie „ $\rightarrow$ ”).

Tytułem pouczającego przykładu, wyznaczamy czynnik strukturalny sferycznych przelotów Weierstrassa dla $d = 3$. Z definicji,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\vec{k}) &= \int d\vec{x} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) p(\vec{x}) \\ &= \frac{2\pi}{S_d} \int_0^\infty d|\vec{x}| \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \exp(-i|\vec{x}||\vec{k}|\cos(\vartheta)) p_0(|\vec{x}|) \\ &= \int_0^\infty d|\vec{x}| \left(\frac{\pi}{2|\vec{x}||\vec{k}|} \right)^{1/2} J_{1/2}(|\vec{x}||\vec{k}|) p_0(|\vec{x}|), \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

gdzie przez $J_{1/2}(z)$ oznaczono, jak zwykle, funkcję Bessela (walcową pierwszego rodzaju).

Natomiast, dla sytuacji ogólnej (d -wymiarowej) otrzymujemy,

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\vec{k}) &= \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int_0^\infty d|\vec{x}| \left(\frac{1}{2}|\vec{x}||\vec{k}|\right)^{1-d/2} J_{d/2-1}(|\vec{x}||\vec{k}|) p_0(|\vec{x}|) \\ &= \frac{N-1}{N} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{N^j} \left(\frac{|\vec{k}|b^j}{2}\right)^{1-d/2} J_{d/2-1}(|\vec{k}|b^j),\end{aligned}\quad (\text{H.5})$$

gdzie przez $J_{d/2-1}(z)$ oznaczono funkcję Bessela (walcową pierwszego rodzaju).

W tym miejscu, podobnie jak dla przypadku jednowymiarowego, rodzi się **pytanie o warunki w jakich uzyskana powyżej postać czynnika strukturalnego da się przedstawić w postaci zamkniętej?** Aby odpowiedzieć na to pytanie zauważmy, że $\tilde{p}(\vec{k})$ spełnia niejednorodne równanie skalowania postaci,

$$\tilde{p}(b\vec{k}) = N\tilde{p}(\vec{k}) - (N-1)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{2}|\vec{k}|\right)^{1-d/2} J_{d/2-1}(|\vec{k}|). \quad (\text{H.6})$$

Rozwiązanie tego równania (podobnie jak to robiliśmy dla równania (6.129) w rozdz. 6.4.2) poszukujemy w postaci sumy

$$\tilde{p}(\vec{k}) = \tilde{p}_{reg}(\vec{k}) + \tilde{p}_{sing}(\vec{k}), \quad (\text{H.7})$$

przy czym rozwiązanie regularne (normalne, ogólne) $\tilde{p}_{reg}(\vec{k})$ spełnia równanie niejednorodne (H.6) a rozwiązanie singularne $\tilde{p}_{sing}(\vec{k})$ jednorodną część tego równania. Jak zwykle, postać rozwiązania ogólnego jest narzucona przez niejednorodność.

H.1 Rozwiązanie regularne

Zatem, korzystając z rozwinięcia funkcji Bessela pierwszego rodzaju

$$J_{d/2-1}(|\vec{k}|) = \frac{|\vec{k}|^{d/2-1}}{2^{d/2-1}} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{|\vec{k}|^{2l}}{2^{2l} l! \Gamma\left(\frac{d}{2} + l\right)} \quad (\text{H.8})$$

możemy przyjąć rozwiązanie $\tilde{p}_{reg}(\vec{k})$ w postaci szeregu potęgowego zawierającego także tylko parzyste potęgi zmiennej $|\vec{k}|$ a mianowicie,

$$\tilde{p}_{reg}(\vec{k}) = 1 + \sum_{j=1}^\infty (-1)^j \frac{1}{j!} a_j |\vec{k}|^{2j}, \quad (\text{H.9})$$

gdzie a_j , $j = 1, 2, \dots$, są poszukiwanymi współczynnikami (wprzedzając nieco nasze rozważania, przyjęliśmy $a_0 = 1$). Podstawiając (H.8) i (H.9) do (H.6) i porównując

współczynniki przy tych samych potęgach $|\vec{k}|$, otrzymujemy (po prostych algebraicznych przekształceniach) poszukiwane wyrażenie na współczynnik,

$$a_j = \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + j\right)} \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{b^{2j}}{N}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{H.10})$$

Na przykład, ograniczając się jedynie do wyrazów co najwyżej kwadratowych w $|\vec{k}|$ otrzymujemy,

$$\tilde{p}_{reg}(|\vec{k}|) \approx 1 - D' |\vec{k}|^2, \quad D' = a_1 = \frac{1}{2d} \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{b^2}{N}}, \quad (\text{H.11})$$

co stanowi uogólnienie wyrażeń (6.131) i (6.132) słusznych w jednym wymiarze na dowolną liczbę wymiarów $d \geq 1$.

H.2 Rozwiązanie singularne

Rozwiązanie singularne, $\tilde{p}_{sing}(\vec{k})$, można od razu zapisać w postaci analogicznej do (6.133) z pomocniczym wyrażeniem (6.135) (gdzie zamiast $|k|$ należy podstawić $|\vec{k}|/2$) i wykładnikiem danym wzorem (6.136), gdyż spełnia ono równanie formalnie identyczne do (6.130), Współczynniki A_j (dla procesu przelotów Wierstrassa zachodzącego w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów $d \geq 1$) wyznaczamy poniżej, korzystając z ogólnej metody wykorzystującej transformatę Mellina i całkowanie przez residua.

W szczególnym przypadku ograniczenia się tylko do stałego współczynnika A_0 , otrzymujemy

$$\tilde{p}_{sing}(\vec{k}) \approx -D'_f |\vec{k}|^\beta, \quad D'_f = A_0, \quad (\text{H.12})$$

co jest formalnie identyczne z drugim wyrażeniem w równaniu (6.138) (dla $\beta < 2$).

H.2.1 Pełna postać rozwiązania singularnego

Strategia postępowania polega na dokonaniu najpierw transformaty Mellina funkcji (H.5) a następnie (po przeprowadzeniu odpowiednich obliczeń) obliczenie odwrotnej transformaty Mellina. Na tej drodze wydobędziemy z funkcji (H.5) pełne rozwiązanie singularne.

Przypomnijmy na wstępie, że transformata Mellina (TM) funkcji $f(x)$ jest zdefiniowana następująco

$$\tilde{f}(s) (\equiv \mathcal{M}[f; s]) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx, \quad (\text{H.13})$$

gdzie s jest zmienną zespoloną. Natomiast, odwrotna transformata Mellina (TM^{-1}) przybiera bardziej skomplikowaną, ale nadzwyczaj użyteczną postać

$$f(x) \left(\equiv \mathcal{M}^{-1}[\tilde{f}; x] \right) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) x^{-s} ds, \quad 0 < c < 1, \quad 0 < \Re s \leq c \quad (\text{H.14})$$

Zauważmy, że TM zastosujemy do funkcji $f(x) = x^{-\nu/2} J_\nu(2x^{1/2})$, gdzie $J_\nu(\dots)$ jest funkcją Bessela (walcową pierwszego rodzaju). Transformata Mellina tej funkcji wynosi $\tilde{f} = \Gamma(s)/\Gamma(\nu - s + 1)$, $0 < \Re s < 2^{-1}\Re\nu + 3/4$. W naszym przypadku obowiązuje następujące podstawienie: $\nu = d/2 - 1$, $2x^{1/2} = |\vec{k}| b^j \equiv x = \left(\frac{1}{2} |\vec{k}| \right)^2 b^{2j} \equiv (x^{1/2})^{1-d/2} = \left(\frac{1}{2} |\vec{k}| b^j \right)^{1-d/2}$. Wykorzystując powyższe, możemy naszą funkcję (H.5) wyrazić w następujący sposób:

$$\tilde{p}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{N-1}{N} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{2} |\vec{k}| \right)^2\right)^s} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} - s\right)} \frac{1}{1 - (Nb^{2s})^{-1}} ds, \quad (\text{H.15})$$

gdzie wykorzystaliśmy przemienność sumowania (występującego we wzorze (H.5)) i całkowania we wzorze (H.14)), gdyż zarówno całka jak i suma są zbieżne. Ponadto, zamiast sumowania szeregu geometrycznego wyraz po wyrazie, po prostu, wstawiliśmy odpowiednią sumę szeregu geometrycznego. Podkreślmy, że całkowanie we wzorze (H.15) wykonamy za pomocą residuów, dzięki ułokowaniu biegunów funkcji podcałkowej w lewej półpłaszczyźnie (patrz rysunek H.1) i założeniu (w dalszym ciągu), że $\frac{1}{2} |\vec{k}| < 1$.

Wykażemy teraz, że całka w (H.15) znika na lewym brzegu konturu i na jego dolnej i górnej krawędzi. Jej znikanie na lewym brzegu wynika wprost z powyższego założenia. Natomiast wzór

$$|\Gamma(s = x + iy)| \rightarrow \sqrt{2\pi} |y|^{x-1/2} \exp\left(-\frac{\pi |y|}{2}\right), \quad |y| \rightarrow \infty, \quad (\text{H.16})$$

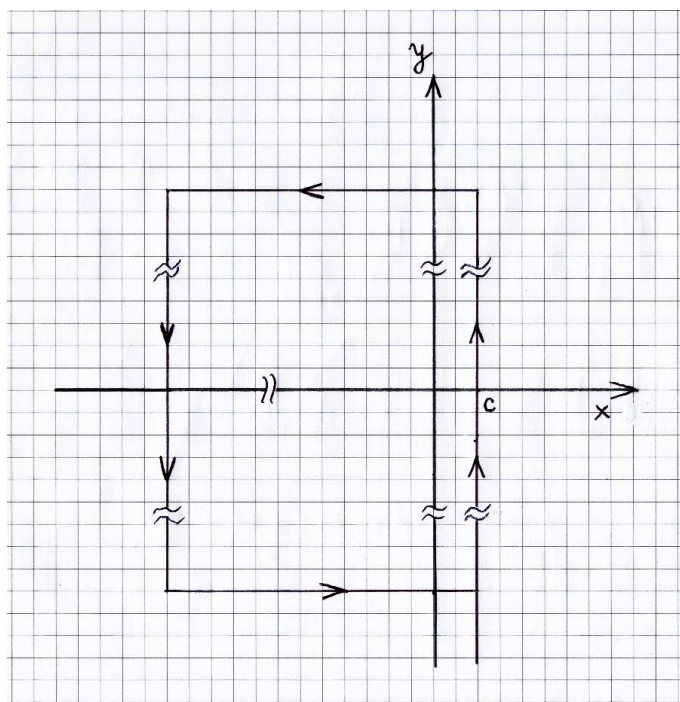
pokazuje bezpośrednio, jak zanika zarówno stosunek gam Eulera $\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{d}{2}-s)} \rightarrow |y|^{2x-d/2}$ występujący w funkcji podcałkowej w wyrażeniu (H.15), za nim pełna funkcja podcałkowa a stąd i całka, gdy górna i dolna krawędź konturu oddalają się nieograniczenie.

Zatem, możemy zapisać, że

$$\tilde{p}(\vec{k}) = \sum_{s_0} \mathcal{R}es F(s_0), \quad (\text{H.17})$$

gdzie prawa strona powyższej równości oznacza sumę residuów związaną ze wszystkimi biegunami funkcji podcałkowej $F(s)$.

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem tych biegunów oraz związanymi z nimi residuami.



Rysunek H.1: Prostokątny, zamknięty, rozbiegający się kontur całkowania przedstawiony na płaszczyźnie zespolonej $s = x + iy$.

H.2.2 Bieguny i residua

Bieguny funkcji podcałkowej są dwojakiego rodzaju:

- a) całkowite ujemne wraz zerem, będące biegunami funkcji $\Gamma(s)$,
- b) zespolone (za wyjątkiem jednego rzeczywistego), stanowiące bieguny funkcji $1/(1 - (Nb^{2s})^{-1})$.

W przypadku a) bieguny można łatwo znaleźć pamiętając, że $\Gamma(s) = \pi/(\Gamma(1-s)\sin(\pi s))$. Stąd, $s_0 = -l$, $l = 0, 1, 2, \dots$.

W przypadku b) bieguny wyznaczamy z równości:
 $N = (b^2)^{-s_0} = \exp(-s_0 \ln b^2 + 2\pi i n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Czyli, $s_0 = -\frac{1}{2}\beta + \frac{\pi i n}{\ln b}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Teraz przypomnijmy, że residuum (pierwszego rzędu - ale tylko z takimi residuami mamy tutaj do czynienia) dowolnej funkcji zespolonej $F(s)$ zmiennej zespolonej s wyznacza się z prostego wzoru

$$\mathcal{R}es F(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} F(s)(s - s_0). \quad (\text{H.18})$$

Zatem,

$$\mathcal{R}es \Gamma(s_0) = \frac{(-1)^l}{l!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{H.19})$$

Residua te prowadzą bezpośrednio do wyrażenia (H.9) z pomocniczym (H.10), czyli do rozwiązania regularnego - nie możemy go więc tutaj brać pod uwagę.

Rozważmy teraz przypadek b). Korzystając ze wzoru (H.18) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \mathcal{R}es \frac{1}{1 - (Nb^{2s_0})^{-1}} &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{s - s_0}{1 - \frac{b^{-2s_0}}{N} b^{-2(s-s_0)}} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{s - s_0}{1 - b^{-2(s-s_0)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{s - s_0}{1 - \exp(-2(s-s_0) \ln b)} = \frac{1}{2 \ln b}, \end{aligned} \quad (\text{H.20})$$

gdzie wykorzystaliśmy równość $\frac{b^{-2s_0}}{N} = 1$, obecną powyżej w objaśnieniach przypadku b).

W świetle powyższego, pełne rozwiązanie singularne przyjmuje postać,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{sing}(\vec{k}) &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{2 \ln b} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{2} |\vec{k}| \right)^\beta \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\beta + \frac{\pi i n}{\ln b}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{1}{2}\beta - \frac{\pi i n}{\ln b}\right)} \exp\left(-2\pi i n \frac{\ln\left(\frac{1}{2} |\vec{k}| \right)}{\ln b}\right), \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

co, w połączeniu z pełnym rozwiązaniem regularnym (H.9) i wyrażeniem (H.10), daje pełne rozwiązanie $\tilde{p}(\vec{k})$.

Dodatek I

Ścisły czynnik strukturalny dla jednowymiarowych przelotów Weierstrassa

Wyprowadzimy ścisłą postać czynnika strukturalnego dla jednowymiarowego błędzenia Weierstrassa, korzystając z transformaty Mellina oraz całkowania przez reszdu, czyli postępując analogicznie jak dla sferycznych przelotów Weierstrassa (patrz Dodatek H) ale bez wyjściowego rozłożenia poszukiwanego rozwiązania na część regularną i singularną.

Naszym wyjściowym wzorem jest (6.128). Ponieważ transformata Mellina funkcji $\cos(|k|b^j)$ wynosi $(b^j)^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)$, więc poszukiwany czynnik strukturalny można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}\tilde{p}(k) &= \frac{N-1}{N} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |k|^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) (Nb^s)^{-j} ds \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |k|^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \frac{1}{1-(Nb^s)^{-1}} ds.\end{aligned}\quad (\text{I.1})$$

Postać ta pozwala już na obliczenie całki metodą reszduów dla $|k| < 1$. Zaznaczmy, że druga równość została uzyskana dzięki zamianiam sumowania z całkowaniem, co było możliwe ponieważ obie są zbieżne.

W tym celu, podobnie jak w Dodatku H, otaczamy bieguny funkcji podcałkowej (oznaczymy ją podobnie jak w poprzednim Dodatku przez $F(s)$) znajdujące się w lewej półpłaszczyźnie, prostokątnym rozbiegającym się konturem (patrz rysunek H.1). Znikanie całki na dolnej i górnej krawędzi konturu wynika bezpośrednio ze wzoru (H.16) natomiast na lewej krawędzi z faktu, że prowadzimy obliczenia przy założeniu $|k| < 1$.

Mamy (podobnie jak poprzednio) dwa rodzaje biegunów: pierwszy pochodzący od iloczynu funkcji $\Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)$ i drugi od funkcji $\frac{1}{1-(Nb^s)^{-1}}$. Pierwszy zbiór biegunów dany jest wyrażeniem (H.19), gdzie l (dzięki $\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)$) przebiega tylko liczby

parzyste, natomiast drugi wyrażeniem (analogicznym do tego dotyczącego przypadku b) w Dodatku H) $s_0 = -\beta + \frac{2\pi i n}{\ln b}$, $n = 0, \pm 1, \pm 1, \dots$. Pozostaje jeszcze tylko problem znalezienia residuów dla obu rodzajów biegunów. Postępując analogicznie jak w Dodatku H, otrzymujemy odpowiednio $\frac{(-1)^l}{(2l)!}$, $l = 0, 1, 2, \dots$, oraz $\frac{1}{\ln b}$. Ostatecznie, pełna postać czynnika strukturalnego składa się z dwóch zasadniczo różnych wyrażeń

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{b^{2j}}{N}} |k|^{2j} + |k|^{\beta} \frac{1 - \frac{1}{N}}{\ln b} \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma\left(-\beta + \frac{2\pi i n}{\ln b}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(-\beta + \frac{2\pi i n}{\ln b}\right)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{2\pi i n}{\ln b} \ln |k|\right), \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

jawnie zawierająca zarówno część regularną (opartą o pierwszy nieskończony szereg) jak i singularną (opartą o drugi).

Powyższy wzór oraz formuła na $\tilde{p}(\frac{1}{2} | \vec{k} |)$ z Dodatku H są kluczowymi dla przełożeń Weierstrassa (zarówno jedno- jak i wielowymiarowych).

Dodatek J

Twierdzenie Abeliana i twierdzenie Tauberina

Twierdzenie Abeliana

I. Przypadek $\alpha > -1$

Przypuśćmy, że dla $t \rightarrow \infty$ funkcja ma przebieg potęgowy, tzn.

$$f(t) \approx t^\alpha F(t), \quad (\text{J.1})$$

gdzie $F(t)$ jest funkcją asymptotycznie jednorodną tzn.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(ct)}{F(t)} = 1, \quad (\text{J.2})$$

dla każdego $c > 0$ (np. $F(t) = \ln(t)$) oraz nie malejącą szybciej niż $t^{-(1+\alpha)}$. Wówczas, transformata Laplace'a $\tilde{f}(s)$ funkcji $f(t)$ dla $s \rightarrow 0$ przyjmuje postać

$$\tilde{f}(s) \approx \frac{\Gamma(1+\alpha)}{s^{1+\alpha}} F\left(\frac{1}{s}\right). \quad (\text{J.3})$$

Dowód tego twierdzenia składa się z dwóch części. Po pierwsze, zapisujemy transformatę Laplace'a $\tilde{f}(s)$ w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt \\ &\approx \int_0^{t_{\max}} [f(t) - t^\alpha F(t)] \exp(-st) dt + \int_0^\infty t^\alpha F(t) \exp(-st) dt, \end{aligned} \quad (\text{J.4})$$

gdzie $t_{\max}$ jest czasem powyżej którego funkcja $f(t)$ przyjmuje, z dobrym przybliżeniem, swoją postać asymptotyczną. Po drugie, używamy zmiennej s spełniającej

warunek $\Re st_{max} \ll 1$ (czyli posiadającej znikomo małą część rzeczywistą) wówczas, powyższe wyrażenie można przekształcić do postaci,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s) &\approx \int_0^{t_{max}} [f(t) - t^\alpha F(t)] dt - s \int_0^{t_{max}} [f(t) - t^\alpha F(t)] t dt \\ &+ \frac{1}{s^{1+\alpha}} \int_0^\infty y^\alpha F\left(\frac{y}{s}\right) \exp(-y) dy \\ &\approx const_0 - s \times const_1 + \frac{1}{s^{1+\alpha}} F\left(\frac{1}{s}\right) \int_0^\infty y^\alpha \exp(-y) dy,\end{aligned}\quad (J.5)$$

gdzie stałe $const_0$ (pierwszy wyraz w pierwszym rzędzie) oraz $const_1$ (wyrażenie całkowe stojące w drugim wyrazie także w pierwszym rzędzie) są skończone (co jest dodatkowym warunkiem narzuconym na funkcję F) i zależą od parametru t_{max} ponadto, podstawiliśmy $y = st$ oraz skorzystaliśmy po drodze z asymptotycznej postaci (J.1) funkcji $f(t)$ i z własności (J.2) (a także z definicji funkcji Γ). Oczywiście, dla $s \rightarrow 0$ w wyrażeniu (J.5) dominuje trzeci składnik zatem,

$$\tilde{f}(s) \approx \frac{\Gamma(1+\alpha)}{s^{1+\alpha}} F\left(\frac{1}{s}\right). \quad (J.6)$$

II. Przypadek $\alpha = -1 - \beta$, $0 < \beta < 1$

Przypuśćmy, że dla $t \rightarrow \infty$ funkcja f zanika w sposób potęgowy, tzn.

$$f(t) \approx t^{-(1+\beta)} F(t), \quad (J.7)$$

gdzie $F(t)$ jest funkcją asymptotycznie jednorodną tzn.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(ct)}{F(t)} = 1, \quad (J.8)$$

dla każdego $c > 0$ (np. $F(t) = \ln(t)$) oraz malejącą wolniej od $t^{-(1+\beta)}$; ponadto, dla $t \rightarrow 0$ funkcja $F(t)$ maleje nie wolniej niż t . Wówczas, transformata Laplace'a $\tilde{f}(s)$ funkcji $f(t)$ dla $s \rightarrow 0$ przyjmuje postać

$$\tilde{f}(s) \approx const + s^\beta \Gamma(-\beta) F\left(\frac{1}{s}\right), \quad (J.9)$$

gdzie $\Gamma(-\beta) = -\Gamma(1-\beta)/\beta$ dla wykładnika β należącego do podanego wyżej przedziału.

Pierwszy krok dowodu jest analogiczny jak w poprzednim przypadku zatem,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt \\ &\approx \int_0^{t_{max}} [f(t) - t^{-(1+\beta)} F(t)] \exp(-st) dt + \int_0^\infty t^{-(1+\beta)} F(t) \exp(-st) dt,\end{aligned}\quad (J.10)$$

gdzie t_{max} jest czasem powyżej którego funkcja $f(t)$ przyjmuje, z dobrym przybliżeniem, swoją postać asymptotyczną. Po drugie, używamy zmiennej s spełniającej warunek $\Re st_{max} \ll 1$ (czyli posiadającej znikomo małą część rzeczywistą) wówczas, powyższe wyrażenie można przekształcić do postaci (wykorzystując całkowanie przez części),

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(s) &\approx \int_0^{t_{max}} [f(t) - t^{-(1+\beta)} F(t)] dt - s \int_0^{t_{max}} [f(t) - t^{-(1+\beta)} F(t)] t dt \\
&+ s^\beta \int_0^\infty y^{-(1+\beta)} F\left(\frac{y}{s}\right) \exp(-y) dy \\
&\approx const - s \times const_1 + s^\beta \Gamma(-\beta) F\left(\frac{1}{s}\right) \\
&\approx const + s^\beta \Gamma(-\beta) F\left(\frac{1}{s}\right),
\end{aligned} \tag{J.11}$$

gdzie stałe $const$ (pierwszy wyraz w pierwszym rzędzie) oraz $const_1$ (wyrażenie całkowe stojące w drugim wyrazie w tym samym rzędzie) są skończone (co jest, analogicznie jak w poprzedni przypadku, dodatkowym warunkiem narzuconym na funkcję F) i zależą od parametru t_{max} ponadto, podstawiliśmy $y = st$ oraz skorzystaliśmy po drodze z asymptotycznej postaci (J.1) funkcji $f(t)$ i z własności (J.2) (a także z definicji funkcji Γ). Oczywiście, dla $s \rightarrow 0$ w wyrażeniu (J.11) dominuje wyraz rzędu zerowego w s oraz wyraz subliniowy w s .

Skorowidz

bąbel giełdowy, 11, 12
chłodzenie laserowe, 12
ekonofizyka, 11
fotoprąd, 12
fraktalne równanie relaksacji, 23
funkcja Foxa, 23
kondensat Bosego-Einsteina, 12
krach giełdowy, 11, 12
kształt linii widmowej, 13
lorentzian, 13
materiał amorficzny, 12
niedebye’owska relaksacja, 12
proces gaussowski, 11
proces multiplikatywno-addytywny, 11
relaksacja potęgowa, 13
rozkład typu rozciągniętego eksponensa,
11
rozkład Cauchy’ego-Lorentza, 13
rozkład Gaussa, 11
rozkład logarytmiczno-normalny, 11
rozkład Pareto-Lévy’ego, 13
rozkład potęgowy, 11
rzadkie zdarzenia, 12
socjofizyka, 11
spowolniona relaksacja, 12
stochastyczny proces niegaussowski, 11
szum addytywny, 11
szum multiplikatywny, 11
wartość asymptotyczna, 11
zmienna losowa, 11