

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2018-10-17, seria 1)

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Zad. 1. Oblicz efektywne oprocentowanie kapitału przy rocznej stopie procentowej $s = 1$ (czyli 100%) i kapitalizacji a) miesięcznej, b) tygodniowej, c) dziennej, d) ciągłej.

Odp. Kapitał końcowy $k_n = k_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, gdzie k_0 jest początkowym kapitałem, zaś n jest liczbą okresów kapitalizacji. Efektywne oprocentowanie $\frac{k_n}{k_0} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$. W przypadku kapitalizacji ciągłej $n \rightarrow \infty$. Wówczas $k_\infty = k_0 e$ i efektywne oprocentowanie wyniesie $e - 1$.

Zad. 2. Niech $t_{1\%}$ oznacza średni czas, po którym rozpada się 1% pierwotnej liczby jąder pierwiastka promieniotwórczego. Jak czas ten wiąże się z czasem połowicznego rozpadu $t_{1/2}$? Podaj zależność $N(t)$ wykorzystującą charakterystyczny czas $t_{1\%}$. Czy wykres tej zależności będzie różnił się od wykresu funkcji $N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}$?

Odp. $t_{1\%} = t_{1/2}(2 \log_2 10 - \log_2 99)$, $N(t) = N_0 \left(\frac{99}{100}\right)^{t/t_{1\%}}$, nie.

Zad. 3. Dla jakiej wartości podstawy a funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, wykres funkcji przecina oś y pod kątem a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 60^\circ$, c) $\alpha = 90^\circ$, d) $\alpha = 135^\circ$? Naszkicuj wykresy tych funkcji. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie $x = 0$ w każdym z tych czterech przypadków.

Odp. a) $a = e^{3^{-1/2}}$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1$, b) $a = \sqrt{e}$, $y = \frac{x}{2} + 1$, c) nie istnieje takie a , d) $a = \frac{1}{e}$, $y = -x + 1$.

Zad. 4. Czy wykresy dwóch różnych funkcji wykładniczych $f(x) = Aa^x$ i $g(x) = Bb^x$, $A, B \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ mogą mieć wspólną styczną w jakimś punkcie?

Wskazówka: aby to zachodziło w punkcie x_0 , muszą być równocześnie spełnione warunki

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) & (\text{punkt wspólny}) \\ f'(x_0) = g'(x_0) & (\text{jednakowy współczynnik kierunkowy stycznej}) \end{cases}$$

Zad. 5. Oblicz pochodną funkcji a) $f(x) = e^{\sin x}$, b) $f(x) = 2e^{e^x}$, c) $f(x) = 2^{x^2+x+1}$.

Odp. $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$, b) $f'(x) = 2e^{x+e^x}$, c) $f'(x) = \ln 2(2x+1)2^{x^2+x+1}$.

Zad. 6. Znajdź taką podstawę a funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, że $f(x+1) - f(x) = f(x)$.

Odp. $a = 2$.

Zad. 7. Uprość wyrażenie a) $\ln(1 - \sin x) + \ln(1 + \sin x)$, dla $x \in [0, \pi/2[$, b) $e^{\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)}$.

Odp. a) $2 \ln \cos x$, b) $\log_2 x$

Zad. 8. Pokaż, że funkcja $f(x) = \frac{\ln x}{\log_2 x}$ jest funkcją stałą.

Zad. 9. Określ dziedzinę i rozwiąż równanie a) $\log_{x+1} x^2 = 2$, b) $e^x - 3e^{-x} + 2 = 0$.

Odp. a) $x > -1$, $x = -1/2$, b) $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$.

Zad. 10. Znajdź takie $x > 1$, że $f(x-1) - f(x) = f(x)$, gdy $f(x) = \log_x a$.

Odp. $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.