

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2019-11-15, seria 4)

Zagadnienie własne, wartość średnia

Zad. 1.🔗 Pokaż, że wektor $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy reprezentującej operator σ_x . Jakiej

wartości własnej odpowiada ten wektor? Pokaż, że wektor $|\varphi\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy reprezentującej operator σ_y . Jakiej wartości własnej odpowiada ten wektor?

Wskazówka: oblicz $\sigma_x |\psi\rangle$ i $\sigma_y |\varphi\rangle$

Zad. 2.🔗 Pokaż, że wektory

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix},$$

są wektorami własnymi macierzy

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Jakim wartościom własnym odpowiada każdy z tych wektorów?

Wskazówka: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

Zad. 3.🔗 Wektor $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy $L = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$. Znajdź wartość a . Czy istnieje tylko jedno rozwiązanie?

Zad. 4. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki a , b , c i d układu równań

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases},$$

aby istniały niezerowe rozwiązania?

Zad. 5.🔗 Znajdź wartości własne i odpowiadające im unormowane wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

reprezentującej operator spinu σ_x .

Zad. 6.🔗 Znajdź wartości własne i odpowiadające im unormowane wektory własne macierzy

$$\text{a) } L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } L_2 = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } L_3 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } L_4 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad. 7.🔗 Wektory $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$ są wektorami własnymi operatora pewnej obserwacji, reprezentującymi stany odpowiadające różnym wartościom własnym tego operatora. Oblicz iloczyny skalarne $\langle\psi|\varphi\rangle$, $\langle\varphi|\psi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle$, $\langle\varphi|\varphi\rangle$.

Zad. 8.🔗 Przyrząd pomiarowy ustawiono prostopadle do osi x i zmierzono spin. Następnie przyrząd obrócono, kierując go wzdłuż osi x i powtórnie zmierzono spin. Czynności te powtórzono wielokrotnie. Wyznacz wartość średnią pomiaru spinu wzdłuż osi x .

Zad. 9.🔗 Poprzez pomiar wzdłuż kierunku $\vec{n} = [\sin \theta, 0, \cos \theta]$ spin został przygotowany w stanie

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Następnie zmierzono spin wzdłuż osi y . Czynności te powtórzono wielokrotnie. Wyznacz wartość średnią pomiaru spinu wzdłuż osi y .

Zad. 10.🔗 Spin elektronu znajduje się w stanie $|\psi\rangle$ z poprzedniego zadania. Oblicz wartość średnią $\langle\sigma_x\rangle \equiv \langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle$ spinu w tym stanie.