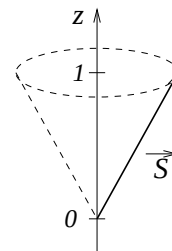


Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2019-11-21, seria 5)

Wektor spinu, operatory hermitowskie i unitarne



Zad. 1. Jeżeli pomiar spinu wzdłuż osi z dał nam wartość $+1$, przygotowaliśmy układ w stanie, w którym wektor spinu leży gdzieś na powierzchni stożka jak na rysunku. Oznaczmy ten stan jako $|g\rangle$. Narysuj wektor odpowiadający stanowi $-|g\rangle$. Czy $-|g\rangle = |d\rangle$?

Wskazówka: czy stany $|\psi_1\rangle = |g\rangle$ i $|\psi_2\rangle = |g\rangle e^{i\varphi}$ są odróżnialne? Wyznacz φ takie, że $|\psi_2\rangle = -|g\rangle$.

Zad. 2. Spin przygotowano w pewnym stanie i zmierzono kwadrat spinu wzdłuż osi z . Pokaż, że wartość średnia takiego pomiaru nie zależy od stanu spinu przed pomiarem. Wyznacz tę wartość.

Wskazówka: dowolny stan spinu można wyrazić w bazie $|g\rangle$ i $|d\rangle$

$$|A\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_d |d\rangle$$

Jaki sens mają kwadraty modułów współczynników ψ_g i ψ_d ? Jaki są wyniki pomiaru kwadratu spinu wzdłuż osi z dla stanów $|g\rangle$ i $|d\rangle$?

Zad. 3. Pokaż, że $\sigma_x^2 \sigma_y = \sigma_y \sigma_x^2$, czyli składanie operatorów σ_x^2 i σ_y jest przemienne. Pokaż, że zachodzi to dla pozostałych par operatorów σ_i^2, σ_j . Czy składanie operatorów σ_i i σ_j , $i \neq j$ jest przemienne?

Zad. 4. Pokaż, że elementy diagonalne macierzy hermitowskiej są rzeczywiste.

Wskazówka: czy transpozycja macierzy zmienia elementy diagonalne? Jaką zmianę elementów macierzy przynosi jej sprzężenie?

Zad. 5. Macierz

$$L = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

jest hermitowska. Wyznacz brakujący element b tej macierzy i znajdź jej wartości własne. Oblicz ich sumę i porównaj z wartością śladu macierzy (suma elementów diagonalnych). Czy ten sam związek zachodzi dla macierzy Pauliego?

Zad. 6. Sprawdź, że wektory $\langle w| = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}} \right]$, $\langle z| = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right]$ są wektorami własnymi macierzy $\sigma_y^\dagger$, czyli spełniają równania

$$\langle w| \sigma_y^\dagger = \langle w| \lambda_w, \quad \langle z| \sigma_y^\dagger = \langle z| \lambda_z.$$

Znajdź wartości własne λ_w i λ_z , którym odpowiadają wektory własne $\langle w|$ i $\langle z|$.

Wskazówka: wykorzystaj reprezentacje wierszowe wektorów i reprezentację macierzową operatora.

Zad. 7. Sklasyfikuj poniższe macierze (hermitowska, unitarna, być może obie cechy lub żadna z nich)

$$\text{a) } L_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } L_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } L_3 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } L_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdź, czy macierz reprezentująca operator σ_n jest macierzą hermitowską lub macierzą unitarną.

Zad. 8. Pokaż, że macierz U_n utworzona z wektorów własnych operatora σ_n jest unitarna. Wyznacz macierz L taką, że

$$L = U_n^\dagger \sigma_n U_n.$$

Zad. 9. Macierz

$$U = \begin{bmatrix} -a & ab \\ ia & a \end{bmatrix}$$

jest macierzą unitarną. Znajdź liczby $a > 0$ i $b \in \mathbb{C}$.

Zad. 10. Macierz unitarną można zbudować z unormowanych, ortogonalnych wektorów kolumnowych lub wierszowych. Pokaż, że w przestrzeni 2×2 macierz ta przyjmuje ogólną postać

$$U = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{bmatrix} a & b^* \\ b & -a^* \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad U = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix}.$$