

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2019-11-28, seria 6)

Moment magnetyczny, operator energii, ewolucja czasowa stanu

Zad. 1. Układ znajduje się w stanie $|\psi_0\rangle$, który jest stanem własnym operatora energii odpowiadającym energii E . Oblicz $H|\psi_0\rangle$.

Stan $|\psi_0\rangle$ odpowiada chwili początkowej $t = 0$. Wyznacz stan układu $|\psi(t)\rangle$ w chwili t . Oblicz $H|\psi(t)\rangle$. Czy układ powróci do stanu początkowego? Jeżeli tak, wyznacz okres T i częstość ω tych zmian.

Zad. 2. W polu magnetycznym $\vec{B}$ na moment magnetyczny $\vec{\mu}$ działa moment siły

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Wybierając układ współrzędnych tak, że oś z jest równoległa do wektora $\vec{B}$, wartość momentu siły

$$M = \mu B \sin \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorem $\vec{\mu}$ i osią z . Zmiana tego kąta o wartość $d\theta$ wiąże się z wykonaniem pracy

$$dW = M d\theta.$$

Pokaż, że zależność energii potencjalnej układu od kąta θ ma postać

$$U = E_0 - \mu B \cos \theta = E_0 - \vec{\mu} \vec{B},$$

gdzie E_0 jest dowolną stałą, na przykład równą zero.

Zad. 3. Moment magnetyczny $\vec{\mu}$ umieszczono w polu magnetycznym $\vec{B}$ równolegle do tego pola. Jaką pracę należy wykonać, aby moment magnetyczny przyjął położenie antyrównoległe?

Zad. 4. Ponieważ spinowy moment magnetyczny elektronu $\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m_e} \vec{\sigma}$, operator energii spinu w polu magnetycznym równoległym do osi z

$$H = \frac{e\hbar}{2m_e} \vec{\sigma} \vec{B} = \frac{e\hbar B}{2m_e} \sigma_z.$$

Znajdź wartości własne tego operatora, które jak pamiętamy odpowiadają możliwym energiom układu. Znajdź wektory własne tego operatora, odpowiadające stanom o danej energii.

Zad. 5. W chwili początkowej spin elektronu znajdował się w stanie $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$. Układ umieszczono w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ równoległej do osi z . Wyznacz ewolucję czasową spinu, czyli znajdź wektor $|\psi(t)\rangle$. Czy wartość średnia spinu ulegnie zmianie? Wyznacz tę wartość.

Zad. 6. W chwili początkowej spin elektronu znajdował się w stanie $|\psi(0)\rangle = |p\rangle$. Układ umieszczono w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ równoległej do osi z . Wyznacz średnią energię układu w chwili początkowej.

Wskazówka: $|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |d\rangle$. Stany $|g\rangle = |E_g\rangle$ i $|d\rangle = |E_d\rangle$ są stanami własnymi operatora energii.

Zad. 7. Wyznacz ewolucję czasową spinu z poprzedniego zadania, czyli znajdź wektor $|\psi(t)\rangle$. Wyznacz średnią energię układu w chwili t . Zinterpretuj ten wynik.

Wskazówka: wyraż stan $|\psi(0)\rangle$ przez stany własne operatora energii, $|\psi(0)\rangle = \psi_g |E_g\rangle + \psi_d |E_d\rangle$. Ewolucja czasowa stanu $|\psi(t)\rangle = \psi_g e^{-iE_g/\hbar} |E_g\rangle + \psi_d e^{-iE_d/\hbar} |E_d\rangle$.