

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2019-12-12, seria 7)

Komutator, wartość średnia (powtórzenie), ewolucja czasowa wartości średniej

Zad. 1.🔗 Wyznacz komutatory a) $[\sigma_z, \sigma_z^2]$, b) $[\sigma_z \sigma_x, \sigma_z]$, c) $[\sigma_z \sigma_x, \sigma_x \sigma_z]$. Znajdź operator $L = [\sigma_x, \sigma_y][\sigma_z, \sigma_x]$. Pokaż, że dla dowolnych operatorów L i M , $[L, -M] = [M, L]$.

Zad. 2. Pokaż, że jeżeli operatory M i L komutują, to $[M, L^2] = 0$. Pokaż, że zachodzi wówczas ogólna relacja $[M^m, L^n] = 0$, gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$.

Zad. 3.🔗 Niech $|\psi\rangle = |g\rangle$. Wyznacz w bazie $\{|g\rangle, |d\rangle\}$ stan $|\psi_1\rangle = \sigma_x \sigma_z |\psi\rangle$. Wyznacz w tej samej bazie stan $|\psi_2\rangle = \sigma_z \sigma_x |\psi\rangle$. Czy istnieje stan $|\psi\rangle$, który jest równocześnie stanem własnym operatora σ_z i σ_x ? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 4.🔗 Spin elektronu znajduje się w stanie $|\psi\rangle$, w którym wektor wartości średniej tworzy kąt θ z osią z . Pokazaliśmy, że stan taki w bazie $\{|g\rangle, |d\rangle\}$ ma postać

$$|\psi\rangle = \underbrace{\cos \frac{\theta}{2}}_{\psi_g} |g\rangle + \underbrace{\sin \frac{\theta}{2}}_{\psi_d} |d\rangle.$$

Oblicz wartości średnie a) $\langle \sigma_z \rangle \equiv \langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle$, b) $\langle \sigma_x \rangle \equiv \langle \psi | \sigma_x | \psi \rangle$, c) $\langle \sigma_y \rangle \equiv \langle \psi | \sigma_y | \psi \rangle$.

Zad. 5.🔗 W chwili początkowej spin elektronu znajdował się w stanie, w którym wektor wartości średniej tworzy kąt θ z osią z

$$|\psi(0)\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_d |d\rangle,$$

gdzie $\psi_g = \cos \frac{\theta}{2}$ i $\psi_d = \sin \frac{\theta}{2}$. Układ umieszczono w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ równoległej do osi z . Wyznacz ewolucję czasową wektora stanu $|\psi(t)\rangle$, a następnie pokaż, że $\langle \sigma_y \rangle \equiv \langle \psi(t) | \sigma_y | \psi(t) \rangle = \sin \theta \sin \omega t$, gdzie $\omega = \frac{eB}{m_e}$.

Wskazówka: operator energii układu $H = E_0 \sigma_z$, gdzie $E_0 = \frac{\hbar e B}{2m_e} = \frac{1}{2} \hbar \omega$.

Zad. 6.🔗 Rozwiąż poprzednie zadanie, ale wykorzystując równanie

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_y \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [\sigma_y, H] \rangle$$

i znalezione na zajęciach rozwiązanie

$$\langle \sigma_x \rangle \equiv \langle \psi(t) | \sigma_x | \psi(t) \rangle = \sin \theta \cos \omega t.$$

Zad. 7. Gdy oś z nie pokrywa się z kierunkiem pola magnetycznego, operator energii oddziaływania momentu magnetycznego elektronu z polem

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{\hbar e}{2m_e} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{\hbar e B}{2m_e} (n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z),$$

gdzie $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]$ jest wersorem kierunku pola $\vec{B}$. Znajdź ten wersor, gdy wektor $\vec{B}$ leży w płaszczyźnie xz i tworzy kąt θ z osią z . Wyraź szybkość zmian w czasie wartości średnich składowych spinu $\frac{d}{dt} \langle \sigma_z \rangle$, $\frac{d}{dt} \langle \sigma_x \rangle$, $\frac{d}{dt} \langle \sigma_y \rangle$ przez wartości średnie $\langle \sigma_z \rangle$, $\langle \sigma_x \rangle$ i $\langle \sigma_y \rangle$.

Zad. 8.🔗 W chwili początkowej spin elektronu znajdował się w stanie $|\psi\rangle = |p\rangle$. Układ umieszczono w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ równoległej do osi z . Wyznacz ewolucję czasową wektora stanu $|\psi(t)\rangle$ i wartości średnich $\langle \sigma_z \rangle$, $\langle \sigma_x \rangle$ i $\langle \sigma_y \rangle$. Naszkicuj położenie stożka spinu w chwili początkowej i wskaż kierunek precesji.

Zad. 9.🔗 W chwili początkowej spin elektronu znajdował się w stanie $|\psi\rangle = |p\rangle$. Układ umieszczono w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ równoległej do osi z . Po jakim czasie t_0 spin znajdzie się w stanie $|\psi(t_0)\rangle = |l\rangle$? Jaka będzie wówczas wartość średnia $\langle \sigma_x \rangle$ składowej x -owej spinu? Po jakim czasie t_1 spin wróci do stanu początkowego? Jaka będzie wówczas wartość średnia $\langle \sigma_x \rangle$ składowej x -owej spinu? Czy sytuacja będzie się powtarzać. Jakie jest znaczenie czasu t_1 ?