

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2019-12-19, seria 8)

Wariancja, zasada nieoznaczoności, hamiltonian cząstki swobodnej, kwantyzacja

Zad. 1. W wyniku pomiaru otrzymano następujący zbiór wartości mierzonej wielkości

$$x \in \{1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1\}$$

Oblicz wartość średnią $\langle x \rangle$, wartość średnią kwadratu $\langle x^2 \rangle$ i błąd $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

Zad. 2. Aby możliwy był równoczesny pomiar dwóch różnych obserwabli reprezentowanych przez operatory L i M , operatory te i ich złożenia $N_1 = LM$ i $N_2 = ML$ muszą mieć wspólny zbiór wektorów własnych. Znajdź zbiór wektorów własnych operatora $N_1 = \sigma_x \sigma_y$. Znajdź zbiór wektorów własnych operatora $N_2 = \sigma_y \sigma_x$. Porównaj oba zbiory ze zbiorami wektorów własnych operatorów σ_x i σ_y . Czy możliwy jest równoczesny pomiar składowych spinu σ_x i σ_y ?

Zad. 3. W roku 1924 Louis de Broglie sformułował hipotezę, że cząstkom towarzyszy fala. Stawiając wymagania, aby faza fali $(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ była niezmiennicza względem transformacji Lorentza uzyskał warunek, że częstość fali ω i wektor falowy $\vec{k}$ muszą transformować się tak, jak energia E i pęd $\vec{p}$ cząstki. Wielkości te musi zatem wiązać relacja proporcjonalności. Taka relacja istniała już dla fotonu

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}.$$

Louis de Broglie rozszerzył ją na pozostałe cząstki.

Pokaż, że fala płaska $\Psi(x, t) = Ae^{i(k_x x - \omega t)} = Ae^{i(p_x x / \hbar - Et / \hbar)}$ jest funkcją własną operatora pędu P_x , odpowiadającą wartości własnej p_x .

Wskazówka: pokaż, że $P_x \Psi(x, t) = p_x \Psi(x, t)$.

Zad. 4. Pokaż, że fala płaska $\Psi(x, t) = Ae^{i(k_x x - \omega t)} = Ae^{i(p_x x / \hbar - Et / \hbar)}$ jest funkcją własną operatora energii H , odpowiadającą wartości własnej $E = \frac{p_x^2}{2m}$.

Zad. 5. Pokaż, że funkcja $\Psi(x, t) = Ae^{i(p_x x / \hbar - Et / \hbar)}$ jest rozwiązaniem równania Schrödingera dla cząstki swobodnej.

Wskazówka: oblicz i porównaj obie strony równania $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)$.

Zad. 6. Wychodząc od klasycznej definicji momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

zbuduj operatory składowych L_x , L_y i L_z momentu pędu we współrzędnych kartezjańskich.

Wskazówka: $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$.

Zad. 7. Część przestrzenna funkcji falowej cząstki ma postać

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin(kx), & \text{dla } x \in [0, L] \\ 0, & \text{dla } x \notin [0, L] \end{cases}.$$

Unormuj tę funkcję. Wyznacz prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przedziale $[L - a, L + a]$, gdzie $0 < a < L/2$.

Zad. 8. Część przestrzenna funkcji falowej stanu podstawowego atomu wodoru ma postać

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0},$$

gdzie a_0 jest najbardziej prawdopodobną odległością elektronu od jądra (promień atomu wodoru Bohra). Sprawdź, że funkcja ta jest unormowana. Wyznacz prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w odległości $r \leq a_0$ od jądra.

Wskazówka: oblicz iloczyn skalarny

$$\langle \psi(\vec{r}) | \psi(\vec{r}) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 \sin \theta |\psi(r)|^2 dr d\theta d\phi = 4\pi \int_0^\infty r^2 |\psi(r)|^2 dr,$$

i pokaż, że jest równy 1, a następnie oblicz całkę $4\pi \int_0^{a_0} r^2 |\psi(r)|^2 dr$.