

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2020-01-16, seria 9)

Paczka falowa, oddziaływanie i hamiltonian, komutator, zagadnienie własne dla hamiltonianu, ewolucja funkcji falowej

Zad. 1. Związek dyspersyjny dla fal materii towarzyszących cząstce swobodnej o masie m w przypadku nierelatywistycznym ma postać

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Wyprowadź ten związek z zależności energii kinetycznej od pędu i relacji pomiędzy energią i częstością oraz pędem i liczbą falową. Pokaż, że prędkość fazowa fali materii równa jest połowie prędkości cząstki o pędzie $p = \hbar k$.

Zad. 2. Funkcja

$$\Psi(x, t) = A e^{i(p_x x - E(p_x)t)/\hbar}$$

reprezentuje falę biegnącą w kierunku dodatnim osi x , odpowiadającą cząstce o określonym pędzie p_x . Pokaż, że prędkość tej fali $v = E/p_x$.

Zad. 3. Działanie składowej x -owej X operatora położenia na stan reprezentowany przez funkcję falową $\psi(x)$ polega na pomnożeniu tej funkcji przez x

$$X\psi(x) = x\psi(x).$$

Jaki będzie wynik działania operatora X^2 na stan $\psi(x)$?

Energia potencjalna klasycznego, jednowymiarowego oscylatora harmonicznego (ciężarek o masie m na sprężynie o współczynniku sprężystości k) ma postać

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2,$$

gdzie x jest wychyleniem z położenia równowagi, zaś $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ częstością drgań. Całkowita energia układu

$$E = E_k + E_p = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2.$$

Zbuduj kwantowy operator energii jednowymiarowego oscylatora harmonicznego i napisz równanie Schrödingera dla tego zagadnienia.

Zad. 4. Funkcja falowa stanu podstawowego jednowymiarowego kwantowego oscylatora harmonicznego ma postać

$$\psi(x) = A e^{-\alpha x^2/2},$$

gdzie $\alpha = \frac{m\omega_0}{\hbar}$, zaś A jest stałą wynikającą z unormowania. Naszkicuj wykres $\varrho(x) = |\psi(x)|^2$ gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w położeniu x . Wskaż na tym wykresie położenie najbardziej prawdopodobne. Pokaż, że funkcja $\psi(x)$ jest funkcją własną operatora energii, wyznaczonego w poprzednim zadaniu i znajdź wartość energii odpowiadającą temu stanowi.

Zad. 5. Pokaż, że $[M^2, N] = M[M, N] + [M, N]M$, a następnie wykaż, że

$$[M^3, N] = M^2[M, N] + M[M, N]M + [M, N]M^2$$

Zad. 6. Wyraż komutator $[M^2, N^2]$ przez odpowiednią sumę iloczynów operatorów M , N , i $[M, N]$.

Zad. 7. Oblicz szybkość zmian w czasie wartości średniej energii kinetycznej jednowymiarowego oscylatora harmonicznego

$$\frac{d}{dt} \langle E_k \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [E_k, H] \rangle.$$

Zad. 8. Znajdź funkcje własne i wartości własne operatora energii cząstki o masie m w nieskończonej studni potencjału

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, L] \\ \infty, & x \notin [0, L] \end{cases}$$

Zad. 9. W chwili początkowej cząstka z poprzedniego zadania znajdowała się w stanie

$$\Psi(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} A, & x \in [0, L] \\ 0, & x \notin [0, L] \end{cases}$$

Unormuj tę funkcję i wyznacz ewolucję czasową stanu cząstki $\Psi(x, t)$.