

Tematy prac licencjackich dla studentów indywidualnych

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

OPIEKUN: DR JAVIER DE LUCAS

1. Struktury Riemannowskie w równaniach różniczkowych

Zbadamy układy równań różniczkowych nieautonomicznych za pomocą algebr Liego pól wektorowych Killinga względem pewnej metryki Riemannowskiej. W ten sposób skalar i tensor krzywizny Ricciego i tensor metryczny pozwalają nam obliczyć całki ruchu i symetrie tych układów. Zastosujemy nasze metody w równaniach różniczkowych pojawiających się w fizyce i matematyce, np. w równaniach Schroedingera i Riccatiego i wymyślimy nowe techniki aby przeanalizować właściwości równań różniczkowych.

2. Metody z geometrii symplektycznej w równaniach różniczkowych

Pewne układy równań różniczkowych, np. oscylatory Winternitza-Smorodynskiego, można określić jako pola wektorowe hamiltonowskie zależne od czasu na rozmaitościach symplektycznych. Pierwszym celem tej pracy jest zastosowanie znanych metod z geometrii symplektycznej, żeby zbadać równania różniczkowe pojawiające się w fizyce. Drugim celem jest znalezienie uogólnień pewnych wyników z geometrii symplektycznej dla układów zależnych od czasu. Ewentualnie, zastosujemy też inne uogólnienia struktur symplektycznych.

3. Metody rozwiązywania równań Schroedingera zależnych od czasu

Geometryczne podejście do mechaniki kwantowej, tzn. geometryczna mechanika kwantowa, pozwala nam określić równanie Schroedingera zależne od czasu jako równanie krzywych całkowalnych pewnego pola wektorowego zależnego od czasu. Badając geometryczne właściwości tego pola wektorowego można znaleźć metody całkowania równań Schroedingera, np. metodę Wei-Normana. W tej pracy mamy zamiar korzystać z tej i innych metod, aby znaleźć nowe rozwiązania i metody całkowania różnych równań Schroedingera.

4. Analiza i zastosowania układów Liego i ich uogólnień

Układ Liego to układ równań różniczkowych. Te układy pojawiają się w wielu dziedzinach nauki, posiadają wiele geometrycznych właściwości i można przeanalizować je za pomocą wielu technik z geometrii symplektycznej, Poissona, Diraca, Riemannowskiej, itd. Ponadto, układy Liego mają zastosowania w geometrycznej mechanice kwantowej i klasycznej, teorii równań różniczkowych, itd. To nowe podejście do znanych i nowych tematów często pozwala nam znaleźć nowe cechy znanych problemów oraz nowe wyniki. Celem pracy jest przeanalizowanie układów Liego lub ich uogólnień za pomocą technik z geometrii różniczkowej i zastosowanie naszych wyników w mechanice klasycznej, kwantowej i/lub teorii równań różniczkowych.

5. Właściwości równań różniczkowych

Celem tej pracy jest badanie podstawowych właściwości geometrycznych równań różniczkowych, np. stabilność, środki, pary Laxa, symetrie Liego, czynniki całkowalności, itd. Te techniki zostaną wykorzystane, aby zbadać właściwości problemów fizycznych.

6. Geometryczna kwantyzacja

Celem tej pracy jest badanie podstawowych właściwości geometrycznych i algebraicznych kilku podejść do geometrycznej kwantyzacji. W tym, mamy zamiar analizować geometryczne metody, żeby rozwiązać równania Schroedingera problemu kwantowego za pomocą a rozwiązań 'klasycznych' tego samego problemu. To pozwoli nam podać bardziej geometryczny opis metody WKB. Dodatkowo, planujemy zbadać kwantyzację Diraca, tj. problem zbudowania morfizmu algebr Liego z zbioru funkcji gładkich na rozmaitości symplektycznej do algebry operatorów przestrzeni Hilberta.

7. Uogólnienia redukcji Marsdena-Weinsteina

Celem tej pracy jest badanie uogólnień teorii redukcji Marsdena-Weinsteina dla różnych typów geometrii: k-symplektycznej, multisymplektycznej, (twisted) Diraca, Jacobiego, itp. Planuję zbudować nową teorię redukcji, aby uogólnić i uprościć poprzednie prace w tym temacie. Na przykład, istniejąca redukcja k-symplektyczna jest oparta na założeniu, że obciążenia do pewnej podrozmierności wszystkich form presymplektycznych struktury k-symplektycznej mają przecięcie jąder równe zeru. Poszukamy jak stworzyć teorię redukcji bez tego założenia.

8. Struktury k-symplektyczne, multisymplektyczne i równania różniczkowe zwyczajne

Zamiast zbadać układy równań różniczkowych cząstkowych, mamy zamiar skorzystać ze struktur k-symplektycznych, żeby zbadać równania różniczkowe zwyczajne nieautonomiczne. Takie podejście było w małym stopniu wykorzystane w pracy {LV14} dla badania pewnego typu tzw. układów Liego. Mamy zamiar uogólnić nasze podejście, żeby zbadać bardziej ogólne problemy. To podejście jest bardziej naturalne niż badanie układów równań różniczkowych cząstkowych, które nie zawsze można zbadać strukturami multisymplektycznymi i k-symplektycznymi. Mamy zamiar zastosować nasze metody do układów równań różniczkowych pojawiających się w fizyce i matematyce, np. w hydrodynamice. W pracy {LV14} korzystaliśmy po raz pierwszy z pewnego typu algebr Poissona funkcji względem struktury k-symplektycznej do obliczenia stałych ruchu pewnych układów równań zwyczajnych autonomicznych. Mamy zamiar zdefiniować nowe narzędzia i wyniki dla analizy takich układów. Na przykład, obecnie badamy różne możliwe teorie redukcji k-symplektycznej i multisymplektycznej dla wymienionych układów. Ponadto, mamy zamiar zbadać inne kwestie i właściwości struktur k-symplektycznych i multisymplektycznych, aby zbadać takie układy.

OPIEKUN: DR HAB. JACEK WOJTKIEWICZ

1. Własności krytyczne modeli: Isinga, XY i Heisenberga: metoda Monte Carlo'

Zastosowana byłaby metoda Monte Carlo, tzn. (losowe próbkowanie przestrzeni stanów i na tej podstawie wnioskowanie o własnościach układu). Metoda Monte Carlo jest jedną z najbardziej uniwersalnych metod w mechanice statystycznej, mających szereg zastosowań także w innych gałęziach wiedzy (ekonofizyka, rynki finansowe). Od licencjata oczekuję znajomości podstaw mechaniki statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

2. Model XY przez transformację Jordana-Wignera, i eksploracja termodynamiki tegoż modelu

Kwantowy łańcuch XY jest ściśle rozwiązywalny przez transformację Jordana-Wignera, pozwalającą na zapisanie hamiltonianu w języku nieoddziaływujących fermionów. Celem licencjatu jest zreprodukowanie znanych faktów oraz przymiarka do rozwiązania otwartych problemów: Hamiltonian w języku nieoddziaływających fermionów, widmo, diagram fazowy, funkcje korelacji (znane), funkcje skalujące (znane częściowo).

3. Termodynamika modelu Hubbarda

Początek pracy to poznanie modelu Hubbarda i zasadniczych faktów go dotyczących. Następny krok to wypisanie jawnego wyrażenia na macierz hamiltonianu modelu i numeryczna implementacja tejże, a następnie numeryczna diagonalizacja macierzy i na tej podstawie liczenie funkcji termodynamicznych. W ten sposób planuję zbadać układy do 10, może kilkunastu węzłów sieci. W zależności od zaangażowania licencjata, możliwa jest kontynuacja tematu, badanie dokładności niedawno wyprowadzonych oszacowań na energie swobodna modelu Hubbarda przez funkcje termodynamiczne modelu Falicova-Kimballa, i w przypadku pozytywnym badanie w ten sposób większych układów.

Od licencjata oczekuję znajomości podstaw mechaniki kwantowej i statystycznej oraz znajomości języka programowania C lub C++.

4. Zmienne grassmanowskie w dwuwymiarowym modelu Isinga

Technika całkowania po zmiennych grassmanowskich jest jedną z fundamentalnych w (fermionowej) teorii pola; jest też bardzo użyteczna w przypadku sieciowych modeli spinowych. Celem pracy będzie zaznajomienie się z tą techniką i otrzymanie przy jej użyciu ścisłego rozwiązania dwuwymiarowego modelu Isinga. W przypadku dużego zaangażowania licencjata, możliwa jest kontynuacja tematyki: poznanie ścisłej metody grupy renormalizacyjnej dla modeli spinowych, gdzie całkowanie po zmiennych grassmanowskich jest podstawą.

Oczekiwane umiejętności: Dobre opanowanie kursów algebry i analizy oraz elementów mechaniki statystycznej.

5. Technika odbiciowej dodatniości w wersji spinowej ("spin reflection positivity") w zastosowaniu do modeli Hubbarda

6. Relacja pomiędzy kwantowymi układami d -wymiarowymi a $(d+1)$ wymiarowymi układami klasycznymi poprzez związek Lie-Trottera-Suzukiego

OPIEKUN: DR HAB. MACIEJ NIESZPORSKI

1. Transformacja fundamentalna dla równań różniczkowych i różnicowych

W 1915 Hans Jonas podał transformację, która znajduje dziś szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu pewnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Zapoznanie się z tą transformacją, poznanie jej pewnych uogólnień i/lub konstrukcja tej transformacji dla pewnej klasy równań różnicowych będą celami tej pracy licencjackiej. Zachęcam szczególnie studentów zainteresowanych nieliniowymi aspektami modeli fizycznych.

OPIEKUN: PROF. DR HAB. JAN DEREZIŃSKI

1. Unitarność w teorii rozpraszania

Podstawowe pojęcia i rezultaty w teorii rozpraszania wielu ciał w mechanice kwantowej

2. Harmoniki sferyczne w 4 wymiarach i wielomiany Jacobiego

Uogólnienie formalizmu harmonik sferycznych z 3 wymiarów na 4 wymiary przy użyciu podwójnych współrzędnych sferycznych.

3. Renormalizacja w prostych modelach kwantowej teorii pola.

OPIEKUN: PROF. DR HAB. JACEK JEZIEŃSKI

1. Konforemne tensory Yano-Killinga (CYK tensory)

a) Badanie tych obiektów w czasoprzestrzeni typu KerrNUTAdS i ich uogólnienia w wyższych wymiarach (np. 3-formy CYK dla $D=5$ i 6)

b) *Strong asymptotic flatness* warunki dostateczne na istnienie asymptotycznych CYK tensorów dla metryk stacjonarnych

(CYK tensory są uogólnieniem pól Killinga i mają wiele zastosowań).

2. Matematyczne aspekty fal grawitacyjnych w zlinearyzowanej teorii Einsteina

- a) Cechowanie niezmiennika podłużnego i jego *peeling*
 - b) Skonstruować niezmienniki Regge-Wheeler-Zerilli dla dowolnej metryki sferycznie symetrycznej
- (Badania nad opisem fal grawitacyjnych w sposób niezależny od cechowania wciąż się rozwijają).

3. Własności geometryczne horyzontu ekstremalnego Kerra.

Ekstremalne czarne dziury (ze zdegenerowanymi horyzontami) wciąż są niezbadane do końca.

4. Twierdzenie o dodatniości energii (dowód przy pomocy 2-par. rodziny krzywych)

Nowy dowód ważnego twierdzenia w OTW.

OPIEKUN: DR HAB. PIOTR SOŁTAN

- 1. Unitarne formy reprezentacji nieprzywiedlnych kwantowej grupy $SU(2)$**
- 2. Niezmienniki ergodycznych działań $SqU(2)$ na skończenie wymiarowych algebrach**
- 3. Skończenie wymiarowe koreprezentacje warkoczowych algebr Hopfa**

OPIEKUN: DR P. KASPRZAK.

- 1. Składowa spójna jedności grupy kwantowej.**

OPIEKUN DR SZYMON CHARZYŃSKI

1. Podgrupy paraboliczne grup Liego i separacja równań typu Wei'a-Normana

Istnieje klasa równań różniczkowych zwyczajnych, dla których można szukać rozwiązań w postaci Wei'a-Normana. Są to równania na krzywą na grupie Liego. Przykładem równania, które należy do tej klasy jest równanie Schroedingera (z hamiltonianem zależnym od czasu). Okazuje się, że dla pewnego szczególnego wyboru współrzędnych na grupie równania Wei'a-Normana istotnie się upraszczają i separują - otrzymuje się hierarchię równań Riccatiego i całek. Wynik ten można również uzasadnić korzystając z własności pewnej klasy podgrup parabolicznych. Celem pracy będzie porównanie tych dwóch podejść do problemu, analiza konkretnych przykładów i zastosowań fizycznych.

2. Układy równań różniczkowych z nieliniową zasadą superpozycji i ich zastosowania

Badanie własności równań i układów równań posiadających nieliniową zasadę superpozycji, czyli posiadających tę własność, że ogólne rozwiązanie równania daje się przedstawić jako funkcjonal od pewnej skończonej liczby rozwiązań szczególnych. Zastosowanie metod geometrycznych i algebraicznych. Wykorzystanie metody Wei'a-Normana. Zastosowania fizyczne, takie jak np. znajdowanie rozwiązań równania Schroedingera zależnego od czasu.

3. Modelowanie numeryczne w teorii względności

Ostatnie kilka lat to intensywny rozwój metod numerycznych w OTW. Istnieje ogólnodostępne oprogramowanie pozwalające na numeryczne rozwiązywanie równań Einsteina. Celem pracy jest wykorzystanie istniejącego oprogramowania do wykonania nowych interesujących z fizycznego punktu widzenia symulacji oraz ewentualny wkład w rozwijanie istniejącego oprogramowania. Przykładem takiej symulacji to zlewanie się dwóch czarnych dziur dla różnych konfiguracji mas i momentów pędu elementów zlewającego się układu podwójnego i analiza pochodzącego z takiego

procesu promieniowania grawitacyjnego. Analiza stabilności numerycznej i różne sposoby wizualizacji otrzymanych rozwiązań będą również istotnym elementem pracy.

4. Modele akrecji na czarną dziurę

Celem pracy będzie wykonanie porównania znanych analitycznych (przybliżonych lub ścisłych) modeli akrecji na czarną dziurę, takich jak na przykład akrecja Bondiego, z wynikami symulacji numerycznych. Drugim ewentualnie celem będzie modelowanie akrecji nie mających swojego odpowiednika analitycznego. Ważnym elementem będzie analiza własności otrzymanych rozwiązań i ich wizualizacja.

OPIEKUN: DR MARCIN NAPIÓRKOWSKI

1. Matematyczne aspekty kondensacji Bosego--Einsteina.

Kondensacja Bosego--Einsteina jest jednym z najważniejszych zjawisk w których możemy obserwować efekty kwantowe w skali makroskopowej. Celem niniejszego projektu jest zapoznanie się studenta z podstawowymi pojęciami związanymi z tym zjawiskiem, formalizmem matematycznym używanym do jego analizy oraz najważniejszymi ścisłymi wynikami w matematycznej analizie układów oddziałujących bozonów (np. ścisłe uzasadnienie teorii Grossa--Pitaevskiego czy teorii Bogoliubowa). Dla zainteresowanych studentów istnieje możliwość kontynuacji tej tematyki w ramach pracy magisterskiej. Temat dla osób z zamiłowaniem do analizy matematycznej i analizy funkcjonalnej.

2. Stabilność materii.

Dlaczego elektrony nie spadają na jądra atomów, a materia nie imploduje? Celem niniejszego projektu jest zapoznanie się studenta z najważniejszymi wynikami dotyczącymi stabilności materii takimi jak np. nierówności Lieba--Thirringa. Jednocześnie student zapozna się z formalizmem matematycznym używanym do opisu kwantowych układów wielociałowych. Temat dla osób z zamiłowaniem do analizy matematycznej i analizy funkcjonalnej.

OPIEKUN: DR HAB. KATARZYNA GRABOWSKA

W ciągu ostatnich kilku lat w czasopismach naukowych ukazało się wiele artykułów dotyczących zastosowań metod geometrii różniczkowej w nowoczesnej mechanice klasycznej. Szczególnie intensywnie badano problemy związane z lagranżowskim i hamiltonowskim opisem układów z więzami nieholonomicznymi. Język matematyczny używany do opisu tych układów jest często dość trudny, ponadto w wielu pracach brakuje przykładów ilustrujących zamieszczany materiał teoretyczny. W ciągu najbliższych kilku lat chciałabym, wraz ze studentami studiów I i II stopnia stworzyć katalog takich przykładów. Wyniki naszej pracy zostałyby utrwalone jako prace licencjackie lub magisterskie. Najciekawsze spośród nich mogłyby zostać użyte w publikacjach naukowych. Każdy z przykładów można opracować na różne sposoby zarówno w ramach pracy licencjackiej jak i magisterskiej. Można koncentrować się na aspektach teoretycznych: badać struktury matematyczne i techniki wyprowadzania równań, ale można także zająć się rozwiązywaniem równań przy użyciu metod analitycznych i numerycznych. Poniżej znajduje się (niepełna) lista przykładów czekających na opracowanie. Zainteresowani studenci mogą także zaproponować własne przykłady.

1. Problem Susłowa jako przykład układu z więzami nieholonomicznymi i symetrią.

Przestrzeń konfiguracyjną ciała sztywnego zamocowanego w jednym punkcie można uznać za grupę $SO(3)$. Swobodny ruch ciała sztywnego jest niezmienniczy ze względu na działanie grupy na

sobie, wobec tego pracuje się raczej na algebrze Liego grupy $SO(3)$. Jeśli dodamy do tego liniowe lub afiniczne więzy na prędkości uzyskujemy właśnie układ Susłowa. Zadaniem studenta jest wyprowadzenie fazowych równań ruchu, zbadanie ich całkowalności i przedyskutowanie własności rozwiązań.

2. Łyżwa albo ostrze noża - modelowanie więzów nieholonomicznych.

Układy z więzami są wygodnym przybliżeniem układów poddanych działaniu dużych sił zewnętrznych. Fakt, że łyżwa porusza się „wzdłuż ostrza” wynika z tego, że w ruchu poprzecznym pojawia się bardzo duża siła tarcia. Zadaniem studenta będzie pokazać w jaki sposób geometria układu z więzami nieholonomicznymi pojawia się jako granica układu bez więzów poddanego działaniu dużej siły zewnętrznej. W rozwiązywaniu tego zadania przyda się (choć nie jest niezbędne) doświadczenie w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych.

3. Sanki Czapłygina jako przykład układu z więzami nieholonomicznymi.

Sanki Czapłygina to najbardziej znany układ z więzami nieholonomicznymi. Zadanie studenta polegało będzie na opisanie tego układu za pomocą odpowiedniej struktury Diraca oraz przeanalizowaniu otrzymanych równań fazowych pod kątem całkowalności. W dostępnej literaturze nie analizuje się raczej równań fazowych poprzestając na równaniach ruchu. Można przy okazji dowiedzieć się co nieco o algorytmach wydobywania części całkowalnej z niejawnych równań różniczkowych.

4. Przeddzidzie dzidy bojowej -- ruch czubka oszczepu jako przykład układu mechanicznego drugiego rzędu.

Większość układów mechanicznych to tak zwane układy pierwszego rzędu, czyli takie, których lagranżjan zależy od położenia i prędkości (pierwszej pochodnej położenia po czasie). Istnieją również jednak układy drugiego i wyższych rzędów. Zazwyczaj powstają one z układów pierwszego rzędu po zaniechaniu niektórych stopni swobody. Przykładem takiej sytuacji jest ruch czubka oszczepu. Jeśli nie interesuje nas co dzieje się z całą resztą oszczepu, ruch czubka możemy opisać przy pomocy lagranżowskiego układu drugiego rzędu. Geometria takich układów jest bardzo ciekawa i niezbyt dobrze znana. Wiadomo jak wykonać rachunki, ale nie wiadomo jakie struktury geometryczne za nimi stoją. Zadaniem piszącego pracę będzie przeanalizowanie tej sytuacji z użyciem narzędzi geometrii różniczkowej. Jest to temat raczej na pracę magisterską niż licencjacką.

5. Transformacja Legendre'a dla układów nieregularnych.

Transformacja Legendre'a jest przejściem od opisu lagranżowskiego do hamiltonowskiego dynamiki układu, czyli równania (na ogół uwikłanego) pierwszego rzędu na trajektorie fazowe. Praca polega na opisie struktur geometrycznych związanych z transformacją Legendre'a oraz jej interpretacji jako składanie obiektów tworzących w geometrii symplektycznej.

6. Zasady wariacyjne i kontrola dysypatywnych układów statycznych.

Podstawową zasadą wariacyjną jest zasada prac wirtualnych. Celem pracy jest dyskusja opisu układów statycznych, wynikającego z zasady prac wirtualnych

7. Porównanie więzów wakonomicznych i nieholonomicznych.

Dyskusja dwóch sposobów otrzymywania równań ruchu układów z więzami. Jest ściśle związana z dyskusją pojęcia więzów.

8. Równania różniczkowe cząstkowe jednej zmiennej geometrycznie.

Interpretacja równania i jego rozwiązań w języku geometrii symplektycznej (w równaniu nie występują wartości funkcji, tylko jej pochodne) i geometrii kontaktowej (przypadek ogólny).