

# Wstęp do Optyki i Fizyki Materii Skondensowanej

## Część I: Optyka, wykład 6

wykład: Piotr Fita  
pokazy: Andrzej Wysmołek  
ćwiczenia: Anna Grochola, Barbara Piętka

Wydział Fizyki  
Uniwersytet Warszawski

2013/14

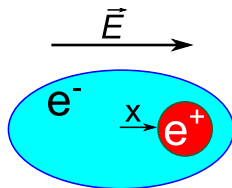
# Plan

- 1 Oscylatorowy model ośrodka
- 2 Półklasyczny model oddziaływania

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Oscylatorowy model ośrodka

- Opisujemy ośrodek przez zbiór klasycznych oscylatorów harmonicznym, o częstości własnej  $\omega_0$  i tłumieniu  $\gamma$
- Oscylatory są pobudzone do drgań polem elektrycznym fali elektromagnetycznej  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$



- Równanie ruchu oscylatora z siłą wymuszającą:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Rozwiązanie równania ruchu

- Rozwiązanie jest postaci

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}$$

- z amplitudą zespoloną  $x_0$  zależną od  $\omega$ :

$$x_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\gamma}$$

- Polaryzacja ośrodka o koncentracji atomów  $N$ :

$$\vec{P} = -Ne\vec{x}$$

- Polaryzacja ośrodka o podatności  $\chi$  zależy liniowo od pola  $E$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Podatność dielektryczna

- Porównanie wyrażeń na  $\vec{P}$  pozwala wyznaczyć  $\chi$ :

$$\chi = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\gamma} = \chi' - i\chi''$$

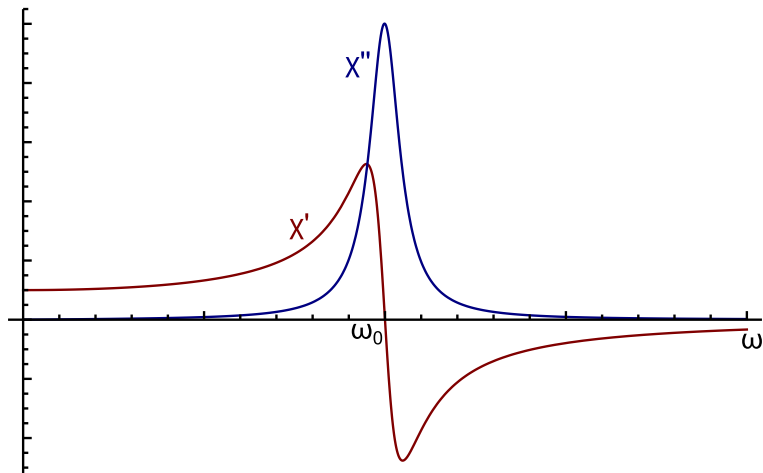
- Rzeczywista część podatności:

$$\chi' = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$\chi'' = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega\gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

Zależność podatności od częstości fali



# Klasyczny model współczynnika załamania

## Dyspersja i absorpcja

- Względna przenikalność dielektryczna ośrodka:

$$\epsilon = 1 + \chi' - i\chi''$$

- Współczynnik załamania:

$$n = \sqrt{\epsilon} \approx 1 + \frac{\chi'}{2} - i\frac{\chi''}{2} = n' - i\kappa$$

- Pole elektryczne fali w ośrodku:

$$E(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} = E_0 e^{i(\omega t - (n' - i\kappa)\frac{\omega}{c}x)} = E_0 e^{-\kappa\frac{\omega}{c}x} e^{i(\omega t - n'\frac{\omega}{c}x)}$$

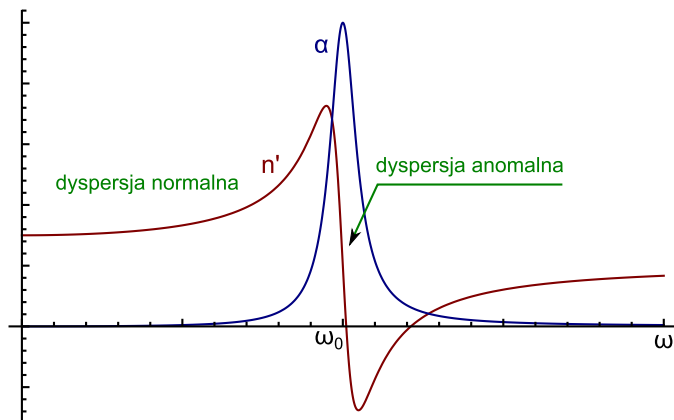
- Amplituda pola zanika wykładniczo - prawo Lamberta-Beera

$$E'_0(x) = E_0 e^{-\kappa\frac{\omega}{c}x} = E_0 e^{-\alpha x}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Dyspersja i absorpcja

- $n'$  - decyduje o prędkości fazowej światła w ośrodku (dyspersja)
- $\alpha$  - decyduje o tłumieniu (absorpcja)





# Fale elektromagnetyczne w plazmie

Ośrodek wypełniony ładunkami swobodnymi

Dla fali poprzecznej wynik możemy uzyskać przez podstawienie  $\gamma = 0$  i  $\omega_0 = 0$  w modelu oscylatorowym.

- Względna przenikalność dielektryczna dla ładunków w próżni:

$$\epsilon = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

- Względna przenikalność dielektryczna dla ładunków w ośrodku o przenikalności  $\epsilon_L$ :

$$\epsilon = \epsilon_L \left( 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \epsilon_L m \omega^2} \right) = \epsilon_L \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

- Częstość plazmowa:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \epsilon_L m}$$

# Współczynnik załamania plazmy

- Współczynnik załamania

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_L \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$$

(dla  $\omega < \omega_p$   $n$  jest czysto urojone)

- Współczynnik odbicia (z wzorów Fresnela):

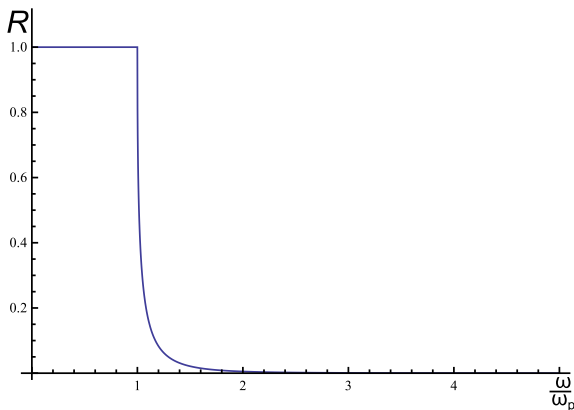
$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

(dla  $\omega < \omega_p$   $R = 1$ , fale nie wnikają do ośrodka)

# Współczynnik odbicia od plazmy

## Jonosfera

$$\epsilon_L = 1$$

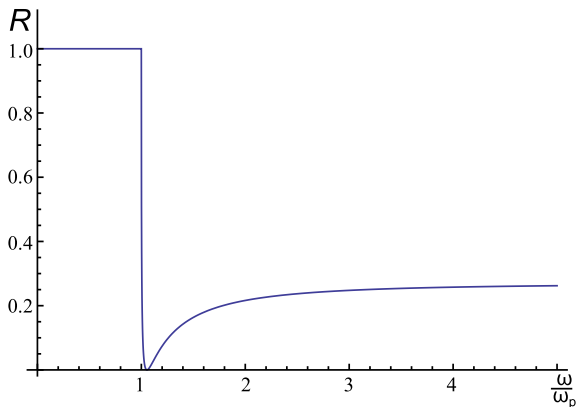


- Odbicie fal radiowych od jonosfery

# Współczynnik odbicia od plazmy

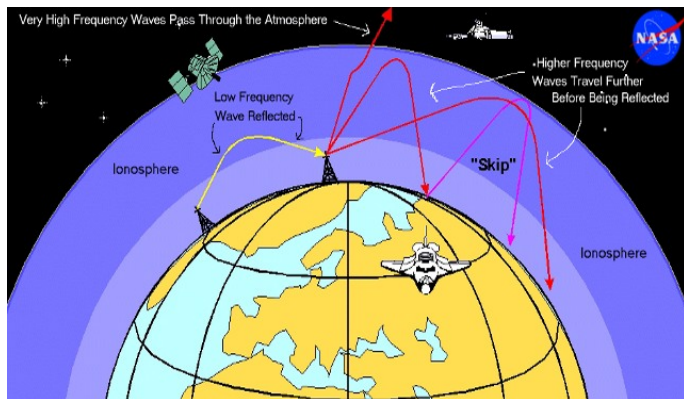
## Metale

$$\epsilon_L = 10$$



- Odbicie światła od metali

# Propagacja fal radiowych w atmosferze



(c) 2007 NASA -- Comical NASA diagram to illustrate ionospheric radiowave propagation

Neatly weaving in four kooky NASA fantasies -

- (i) Space Shuttle;
- (ii) International Space Station;
- (iii) the geostationary man-made satellite; and
- (iv) higher frequency radiowaves "pass through" the ionosphere - the Big Lie to prop up the satellite hoax!

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Opis fali E-M

- Falę elektromagnetyczną opisujemy klasycznie przez potencjał wektorowy  $\vec{A}$  i skalarny  $\phi$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Hamiltonian atomu w polu fali E-M:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2 - e\phi + V$$

- Wybieramy cechowanie  $\phi = 0$  i  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , wtedy  $[\vec{p}, \vec{A}] = 0$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V + \frac{e}{m}\vec{p}\vec{A} + \frac{e^2 A^2}{2m}$$

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Zaburzenie wywołane falą E-M

- Przy małych natężeniach pola możemy pominąć wyraz kwadratowy:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V + \frac{e}{m} \vec{p} \vec{A} = H_0 + H'$$

- Hamiltonian zaburzenia wywołanego falą E-M:

$$H' = \frac{e}{m} \vec{p} \vec{A}$$

- Rozwiązania szukamy za pomocą rachunku zaburzeń zależnego od czasu

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Zaburzenie w atomie dwupoziomowym

- Atom dwupoziomowy – funkcja falowa elektronu jest kombinacją stanu podstawowego  $|1\rangle$  i wzbudzonego  $|2\rangle$ :

$$\psi(\vec{r}, t) = a_1(t)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}|1\rangle + a_2(t)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}|2\rangle$$

- Słabe zaburzenie –  $a_1 \approx 1$
- "Złota reguła Fermiego":

$$\frac{da_2(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle 2|H'|1\rangle e^{i\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

- Podstawiamy  $\vec{A} = \vec{A}_0 \left( e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right)$
- Całkujemy równanie na  $a_2(t)$  z warunkiem początkowym  $a_2(0) = 0$



# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Zaburzenie w atomie dwupoziomowym

- Rozwiązanie:

$$a_2(t) = \frac{e}{m\hbar} \langle 2 | \vec{p} \vec{A}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} | 1 \rangle \frac{1 - e^{i(\omega + \omega_0)t}}{\omega + \omega_0} +$$

$$+ \frac{e}{m\hbar} \langle 2 | \vec{p} \vec{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} | 1 \rangle \frac{1 - e^{i(\omega - \omega_0)t}}{\omega - \omega_0}$$

- W pobliżu rezonansu  $\omega + \omega_0 \gg \omega - \omega_0$
- Prawdopodobieństwo znalezienia atomu w stanie  $|2\rangle$ :

$$|a_2|^2 = \left( \frac{e}{m\hbar} \right)^2 \left| \langle 2 | \vec{p} \vec{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} | 1 \rangle \right|^2 \frac{(1 - e^{-i(\omega - \omega_0)t}) (1 - e^{i(\omega - \omega_0)t})}{(\omega - \omega_0)^2}$$

$$|a_2|^2 = \left( \frac{e}{m\hbar} \right)^2 \left| \langle 2 | \vec{p} \vec{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} | 1 \rangle \right|^2 \frac{2 - 2 \cos(\omega - \omega_0)t}{(\omega - \omega_0)^2}$$

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Zaburzenie w atomie dwupoziomowym

- Przekształcamy  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ :

$$|a_2|^2 = \left( \frac{e}{m\hbar} \right)^2 \left| \langle 2|\vec{p}\vec{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}|1 \rangle \right|^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} t \right)}{\left( \frac{\omega - \omega_0}{2} \right)^2}$$

- Całkujemy po  $\omega$ , korzystając z  $\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} a$
- Prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu:

$$\frac{|a_2|^2}{t} = \pi \left( \frac{e}{m\hbar} \right)^2 \left| \langle 2|\vec{p}\vec{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}|1 \rangle \right|^2$$

- Rozwijamy  $e^{i\vec{k}\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\vec{r} + \dots$  i bierzemy pierwszy wyraz:

$$\frac{|a_2|^2}{t} = \pi \left( \frac{e}{m\hbar} \right)^2 \left| \langle 2|\vec{p}\vec{A}_0|1 \rangle \right|^2$$

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Zaburzenie w atomie dwupoziomowym

- Jeśli długość fali jest dużo większa od rozmiaru atomu, to  $A_0$  jest praktycznie stałe na obszarze atomu:

$$\frac{|a_2|^2}{t} = \pi \left( \frac{e}{m\hbar} \right)^2 |A_0|^2 |\langle 2|\vec{p}|1 \rangle|^2$$

- Gęstość energii fali E-M przy rozkładzie izotropowym (termicznym):

$$\rho = 3\epsilon_0\omega_0^2 |A_0|^2$$

- Można pokazać, że  $\langle 2|\vec{p}|1 \rangle = im\omega_0 \langle 2|\vec{r}|1 \rangle$

$$\frac{|a_2|^2}{t} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2} \rho |\langle 2|e\vec{r}|1 \rangle|^2$$

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Zaburzenie w atomie dwupoziomowym

- Porównujemy ze wzorami definiującymi współczynniki Einsteina

$$\frac{|a_2|^2}{t} = \frac{1}{N_1} \frac{dN_{12}}{dt} = B_{12}\rho$$

$$B_{12} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2} |\langle 2|\vec{e}\vec{r}|1 \rangle|^2$$

- Definiujemy dipolowy moment przejścia  $\vec{d}_{12}$ :

$$\vec{d}_{12} = \langle 2|\vec{e}\vec{r}|1 \rangle$$

- Wyrażenia na współczynniki Einsteina:

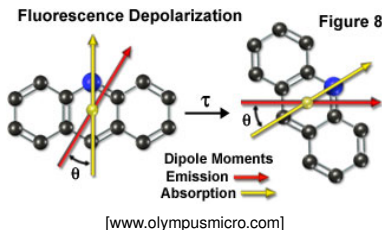
$$B_{12} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2} |\vec{d}_{12}|^2$$

$$A_{21} = \frac{\omega^3 e^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\vec{d}_{12}|^2$$

# Moment dipolowy przejścia

- Moment dipolowy przejścia decyduje o prawdopodobieństwie oddziaływania
- Dla światła spolaryzowanego prawdopodobieństwo absorpcji zależy od kierunku pomiędzy kierunkiem polaryzacji światła i kierunkiem momentu dipolowego:

$$p_a \sim |\vec{E} \cdot \vec{d}|^2$$



- Prawdopodobieństwo emisji spontanicznej rośnie z  $\omega^3$