WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI DŹWIĘKU METODĄ CZASU PRZELOTU

Instrukcja dla uczniów szkół ponadpodstawowych

WSTĘP

Szereg dynamicznych zjawisk fizycznych, takich jak rozchodzenie się fali dźwiękowej można opisać tzw. klasycznym równaniem falowym:

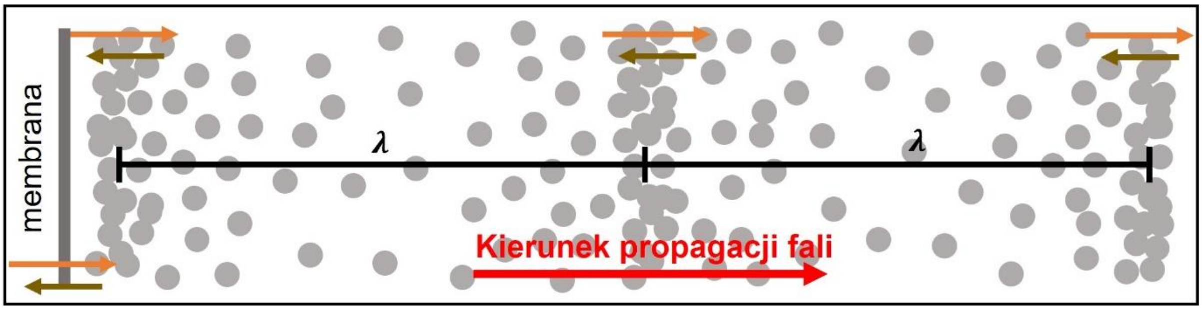
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Jest to liniowe, cząstkowe równanie różniczkowe. Oznacza to m.in., że pojawiają się w nim symbole pochodnych. Pochodna to operator matematyczny określający jak prędko zmienia się dana wielkość w funkcji zmiany odległości czy czasu. Wielkość $\psi(x, y, z, t)$ to np. natężenie pola elektrycznego bądź magnetycznego w fali elektromagnetycznej, ciśnienie w fali głosowej lub też przesunięcie w pobudzonym do drgań ośrodku ciągłym np. przesunięcie elementów sprężyny. W konsekwencji, równanie (1) opisuje jak amplituda fali zmienia się zależnie od dwóch parametrów: odległości od źródła (x, y, z) oraz upływu czasu t. W przypadku dźwięku, równanie (1) opisuje jak zmienia się natężenie dźwięku zależnie od odległości od źródła oraz płynącego czasu. W równaniu pojawia się również parametr v, nad którego interpretacją zastanowimy się w dalszej części wprowadzenia.

Rozważmy gaz wypełniający całą przestrzeń i głośnik wysyłający falę dźwiękową w ustalonym kierunku, który nazwiemy osią X. Fala ψ będzie tu reprezentowała zmianę ciśnienia ośrodka $p(x, t)$, które jest wywołane przez falę dźwiękową. Odchylenie to można opisać równaniem falowym, które przypomina równanie nr 1:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Ciśnienie gazu jest proporcjonalne do gęstości. Ponieważ równanie (2) jest liniowe, opisuje ono również zachowanie gęstości gazu. Jest ono spełnione także dla położenia cząsteczek gazu wychylonych z położenia równowagi. Ponieważ wychylenie to jest zgodne z kierunkiem rozchodzenia cię fali, fale dźwiękowe nazywamy **falami podłużnymi**.



Rysunek 1. Schemat obrazujący propagację fali dźwiękowych. Odległości pomiędzy obszarami zagęszczonego powietrza to długość fali dźwiękowej.

Równanie falowe dopuszcza rozwiązania w postaci **fali harmonicznej**, o równaniu postaci:

$$p(x,t) = A\,cos(kx - \omega t), \tag{3}$$

lub też:

$$p(x,t) = A\,sin(kx - \omega t). \tag{4}$$

Projekt współfinansuje m.st. Warszawa

Wielkość A nazywamy **amplitudą fali**, symbol k określa tzw. **liczbę falową**, natomiast ω opisuje **częstość** (kołową) **fali**. Rozwiązania te charakteryzują się **harmonicznością**, tj. powtarzalnością w czasie i w przestrzeni, tzn. że funkcja $p(x,t)$ przyjmie tę samą wartość w punktach, pomiędzy którymi różnica współrzędnych przestrzennych będzie spełniała warunek:

$$k\Delta x = 2\pi n, \tag{5}$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Najmniejszą taką różnicę Δx nazywamy **długością fali** λ i łączymy ją z liczba falową k związkiem:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{6}$$

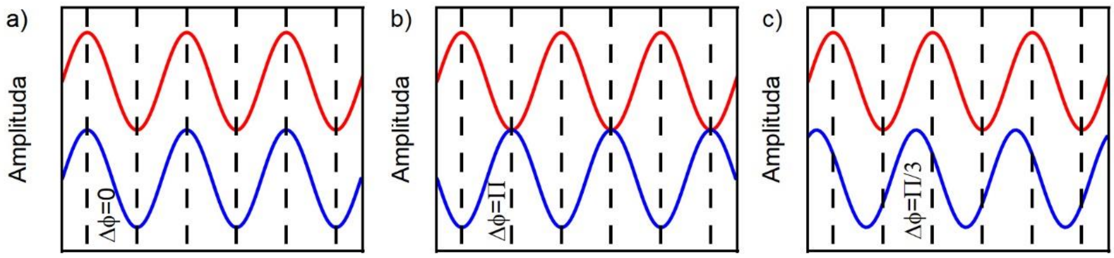
Jeśli ustalimy położenie x w przestrzeni i będziemy obserwować zaburzenie w czasie, to rozwiązania (3) i (4) będą przyjmować dokładnie tę samą wartość w chwilach czasu różniących się o wartość czasu Δt spełniając warunek:

$$\omega\Delta t = 2\pi n. \tag{7}$$

Najmniejszą taką różnicę czasów Δt nazywamy **okresem** T fali i łączymy ją z częstością ω związkiem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{8}$$

Do opisu zmienności amplitudy fali w czasie stosowana jest też odwrotność okresu, czyli **częstość** (bez dodatkowego przymiotnika) $f = 1/T$ mierzona w jednostkach odwrotności czasu, np. hercach (Hz). Drugim ważnym pojęciem jest **faza** fali. Faza fali określa, w której części okresu fali znajduje się punkt na fali. Faza jest szczególne ważna przy porównaniu amplitud dwóch fal. Jeśli fale są zgodne w fazie (rysunek 2a) maksima i minima znajdują się w tych samych momentach przestrzeni. Jeśli różnica faz dwóch fal jest równa 180 stopni (fale są w przeciw fazie, rysunek 2b) maksimum natężenia jednej fali przypada w minimum natężenia drugiej fali. Rysunek 2c obrazuje przypadek gdy różnica faz fal przyjmuje pośrednią wartość, np. 60 stopni.



Rysunek 2. Fale których różnica faz jest równa: a) 0 stopni, b) 180 stopni, c) 60 stopni.

Przyjrzyjmy się teraz wielkości v występującej w równaniach falowych (1) i (2). Nazywamy ją **prędkością fali**. Opisuje ona tempo rozchodzenia się zaburzenia w kierunku osi X i definiowana jest związkiem:

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda f. \tag{9}$$

Prędkość v opisuje propagację powierzchni stałej fazy. Z tego powodu nazywamy ją również **prędkością fazową** v_f. Prędkość fazowa określona jest własnościami ośrodka, w którym propaguje się fala. W powietrzu w temperaturze pokojowej prędkość dźwięku wynosi około 344 m/s.

Krzywe Lissajous

Wykorzystanie do pomiarów oscyloskopu w trybie z podstawą czasu pozwala obserwować rozwiązanie równania falowego w ustalonym punkcie przestrzeni w funkcji czasu. Jeśli wprowadzimy do oscyloskopu sygnały z głośnika i mikrofonu, możemy zbadać ich wzajemną relację. Sygnał docierający do oscyloskopu z generatora można opisać jako drganie harmoniczne postaci:

$$V_g = V_{g0}\, sin(\omega t + \alpha), \tag{11}$$

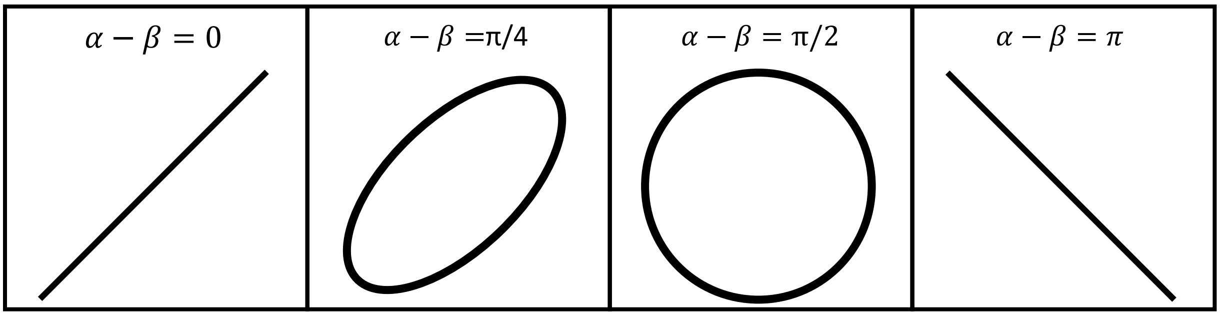
podczas gdy sygnał docierający z mikrofonu ma postać:

$$V_m = V_{m0}\, sin(\omega t + \beta). \tag{12}$$

Wielkości α to faza związana z opóźnieniem przesłania sygnału przez kabel dla sygnału z generatora. β to faza związana z opóźnieniem przesłania sygnału przez kabel dla sygnału z mikrofonu oraz opóźnienie związane z propagacją fali dźwiękowej pomiędzy głośnikiem a mikrofonem. Usuwając z obu równań czas, otrzymujemy związek między napięciami V_g i V_m:

$$\left(\frac{V_g}{V_{g0}}\right)^2 - 2\frac{V_g V_m}{V_{g0} V_{m0}} cos(\alpha - \beta) + \left(\frac{V_m}{V_{m0}}\right)^2 = sin^2(\alpha - \beta). \tag{13}$$

W ogólnym przypadku związek napięcia U_g i U_m przedstawia elipsę, której środek znajduje się w początku układu odniesienia (Rysunek 3). Jej osie nie są równoległe do osi układu przez co elipsa jest „obrócona”. Przy zwiększaniu odległości między głośnikiem a mikrofonem rośnie faza β. W szczególności, gdy różnica $\alpha - \beta$ faz jest wynosi $\pi/2$ elipsa przybiera kształt koła. Natomiast gdy fale są zgodne w fazie lub gdy różnica $\alpha - \beta$ faz jest wielokrotnością liczby π, to elipsa zwęża się do linii prostej.

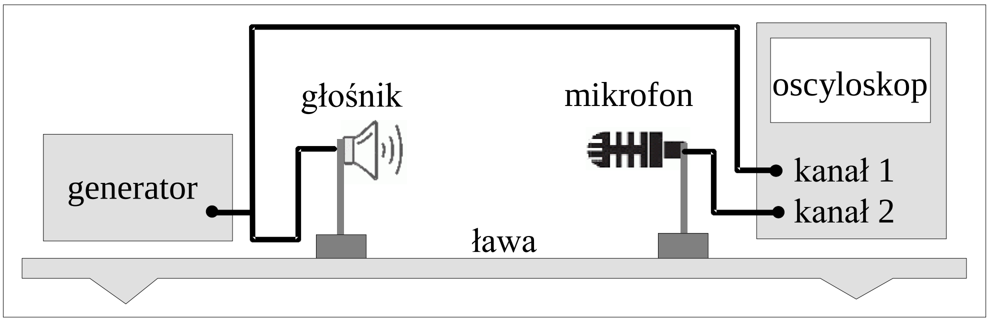


Rysunek 3. Zależność kształtu zależności napięcia na generatorze od napięcia na mikrofonie od przesunięcia fazowego.

POMIARY

Układ pomiarowy składa się z:

- generatora akustycznego,
- źródła fal dźwiękowych (głośnik),
- odbiornika fal dźwiękowych (mikrofon),
- ławy z miarką, na której umieszczone jest źródło i odbiornik,
- oscyloskopu.



Rysunek 4. Schemat układu pomiarowego.

Źródło fal dźwiękowych wykorzystywane w tym ćwiczeniu emituje ultradźwięki o wysokiej częstości, niesłyszalnej dla ucha.

Zadanie wstępne:

Zakładając częstotliwość fal dźwiękowych f równą 40 kHz oraz prędkość dźwięku w powietrzu równą około 340 m/s i korzystając z równania (9) wyznacz przewidywaną długość fali.

Długość fali dźwięku o częstotliwości 40 kHz: ……………….

Zadanie I. Wyznaczenie prędkości dźwięku z pomiaru czasu przelotu.

Do wykonania tego zadania skonstruuj układ analogiczny do układu zaprezentowanego na rysunku 4. Korzystając z dwóch kabli BNC połącz trójnik na generatorze z głośnikiem i pierwszym kanałem na oscyloskopie. Następnie, korzystając z trzeciego kabla BNC połącz mikrofon z drugim kanałem oscyloskopu. Ustaw na generatorze sygnał sinusoidalny o częstotliwości 40 kHz. Następnie, wciśnij przycisk burst, aby generator wytwarzał pojedynczy impuls dźwiękowy. Po skonstruowaniu układu, z pomocą prowadzącego ustaw oscyloskop w trybie YT. W tym trybie na oscyloskopie wyświetlana jest zależność intensywności sygnału od czasu.

Tabela 1. Wyniki pomiaru prędkości dźwięku z pomiaru czasu przelotu.

Nr pomiaru	Częstotliwość f (kHz)	Przesunięcie mikrofonu d (cm)	Czas przelotu (μs)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Dopasuj położenie sygnału oraz jego amplitudę tak, aby poszukać sinusoidalnego impulsu głośnika oraz sygnału mikrofonu. Przesuwając mikrofon sprawdź, czy położenie jego sygnału również się przesuwa. Zastanów się skąd się bierze różnica w kształtach ich sygnałów. Następnie ustaw mikrofon tak, aby krawędź jego podstawy pokrywała się z całkowitą podziałką miarki na ławie optycznej. Za pomocą kursorów oscyloskopu odczytaj różnicę czasu pomiędzy sygnałem głośnika a mikrofonu. Czas pomiędzy wysłaniem impulsu a odbiorem impulsu przez mikrofon to czas przelotu dźwięku w powietrzu. Następnie, wykonaj 10 pomiarów zależności czasu przelotu od przesunięcia mikrofonu. Wyniki zapisz w tabeli nr 1.

Wyniki z tabeli nr 1 posłużą nam do wyznaczenia wartości prędkości dźwięku. Narysuj na papierze milimetrowym zależność położenia mikrofonu od czasu przelotu. Ponieważ dźwięk porusza się w powietrzu ze stałą prędkością, zależność przebytej przez niego drogi od czasu przelotu powinna wyrażać się jako

$$d = d_0 + vt, \tag{14}$$

Zastanów się, czemu odpowiada wielkość d_0.
Na podstawie danych z wykresu wyznacz wartość d_0 oraz nachylenie prostej które odpowiada prędkości dźwięku.

$d_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $v = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Nanosząc na wykres niepewności pomiaru położenia mikrofonu oraz czasu przelotu oszacuj niepewność wyznaczenia prędkości dźwięku dopasowując do wykresu skrajne proste.
Jej niepewność wynosi:

$$u_v = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zadanie II. Wyznaczenie prędkości dźwięku z pomiaru długości fali

Do wykonania pomiarów w drugiej części zadania przygotuj analogiczny układ jak w części 1 (rysunek nr 3). Ustaw na generatorze sygnał sinusoidalny o częstotliwości 40 kHz. Sprawdź, czy na oscyloskopie wyświetlane są sygnały głośnika i mikrofonu. Upewnij się, że mocowanie głośnika styka się z pełną działką miarki. Następnie zmień pozycję głośnika tak, aby sygnały głośnika i mikrofonu były zgodne w fazie (tak jak na rysunku 2a). Przesuń ręcznie pozycję mikrofonu tak, aby jego sygnał na oscyloskopie przesunął się o 10 okresów. Zapisz w tabeli nr 2 jakiemu przesunięciu położenia mikrofonu (*d*) to odpowiada. Prędkość dźwięku w przypadku tego pomiaru można wyznaczyć ze wzoru:

$$v = \frac{fd}{n}, \tag{14}$$

gdzie *d* to przesunięcie mikrofonu a *n* to liczba okresów. Jeśli wynik uzyskany dla pomiaru nr 1 jest bliski wartości teoretycznej, wykonaj dalsze pomiary dla dodatkowych 9 przesunięć o wielokrotność dziesięciu okresów.

W celu wyznaczenia wartości prędkości dźwięku należy wykonać wykres zależności przesunięcia mikrofonu od numeru okresu. Analiza przekształcenia wzoru (14) postaci:

$$d = \frac{v}{f} n = A \cdot n, \tag{15}$$

pozwala zauważyć, że zależność łącząca te dwie wielkości jest zależnością liniową, z nachyleniem proporcjonalnym do prędkości dźwięku.

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $v = Af = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Nanosząc na wykres niepewności pomiaru położenia mikrofonu oszacuj niepewność wyznaczenia nachylenia prostej dopasowując do wykresu skrajne proste.

$$u_A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Niepewność prędkości możemy obliczyć zgodnie z zasadą propagacji niepewności pomiarowych jako:

$$u_v = \frac{1}{2}|v(A+u_A) - v(A-u_A)| = \frac{1}{2}|f(A+u_A) - f(A-u_A)| = \frac{1}{2}|2fu_A| = fu_A$$

$$u_v = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tabela 2. Wyniki pomiaru prędkości dźwięku z pomiaru długości fali.

Nr pomiaru l	Liczba okresów n	Przesunięcie mikrofonu d (cm)	Częstotliwość f (kHz)
1	10		
2	20		
3	30		
4	40		
5	50		
6	60		
7	70		
8	80		
9	90		
10	100		

Zadanie III. Wykreślenie krzywych Lissajous

Zachowując ustawienia generatora z poprzedniego zadania ustaw oscyloskop w trybie XY. Ponownie ustaw mikrofon tak, aby jego krawędź stykała się z pełną podziałką miarki. Zweryfikuj poprawność włączenia układu sprawdzając, czy na ekranie widać kształt elipsy. Narysuj widoczny kształt na rysunku 5a.

a) Odległość: 0 cm	b) Odległość:	c) Odległość:	d) Odległość:

Rysunek 5. Figury Lissajou i odpowiadające im przesunięcia mikrofonu.

Następnie sprawdź, czy zmiana odległości pomiędzy głośnikiem a mikrofonem wpływa na wyświetlany kształt figur Lissajous. W następnych kwadratach na rysunku 5 narysuj trzy dalsze kształty i odpowiadające im zmiany odległości mikrofonu. Zastanów się, jaki czynnik wpływa na zmianę kształtu sygnału wyświetlanego na oscyloskopie. Następnie, ustaw mikrofon i głośnik tak, aby na ekranie oscyloskopu wyświetlała się linia prosta a mikrofon był ustawiony na równej podziałce. Przesuwaj mikrofon tak długo, aż sygnał na oscyloskopie 20 razy powróci do kształtu linii prostej. Ilu długościom fali dźwięku to odpowiada? Korzystając ze wzoru (14) oblicz wyznaczoną w ten sposób prędkość dźwięku. Jej niepewność wyznacz ze wzoru wyprowadzonego zgodnie z zasadą propagacji niepewności pomiarowych:

$$u_v = \frac{f}{n} u_d. \quad (16)$$

$v =$ ……………………. u_v = …………………….

Czy wynik jest zgodny z rezultatem pomiaru z II części ćwiczenia?

Opracowanie:
J. Kierdaszuk, A. Drabińska