zajęcia otwarte z fizyki

BADANIE DRGAŃ STRUNY

Instrukcja dla uczniów szkół ponadpodstawowych

WSTĘP

Celem ćwiczenia jest zmierzenie częstości kolejnych drgań własnych struny (kolejnych modów) i sprawdzenia w jaki sposób pierwsza z nich (którą najłatwiej znaleźć) zależy od obciążenia i długości struny.

Stalowy drut rozciągnięty pomiędzy dwoma punktami podparcia stanowi bardzo użyteczny model pokazujący ruch oscylacyjny. Jest to taki ruch, w którym obserwowany obiekt (w naszym przypadku struna) porusza się po powtarzalnej w czasie trajektorii. Przykładami takich obiektów z życia codziennego są np. wahadło, masa zawieszona na sprężynce czy też struna w gitarze. W naszym ćwiczeniu skupimy się na tym ostatnim przykładzie.

Struna wprawiona w drgania przenosi je do otaczającego powietrza, co nasze ucho odbiera jako dźwięk. Wysokość dźwięku wytwarzanego przez strunę zależy od kilku parametrów. Przede wszystkim od jej długości mierzonej pomiędzy jej punktami zaczepienia. Łatwo się o tym przekonać jeśli posłuchamy sobie jak brzmi kontrabas posiadający bardzo długie struny, a jak niewielkie skrzypce (lub ukulele). Kolejnym istotnym parametrem decydującym o wysokości wydawanego dźwięku jest siła naciągu struny. Zjawisko to znajduje swoje zastosowanie w instrumentach strunowych, gdzie możemy je precyzyjnie dostroić poprzez regulację naciągu (służy do tego część gitary nazywana gryfem). Innymi parametrami, są gęstość materiału, z którego wykonano strunę oraz jej średnica. Możemy zapisać relację łączącą częstość (wysokość dźwięku wydawanego przez strunę) ze wszystkimi wyżej wymienionymi parametrami:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

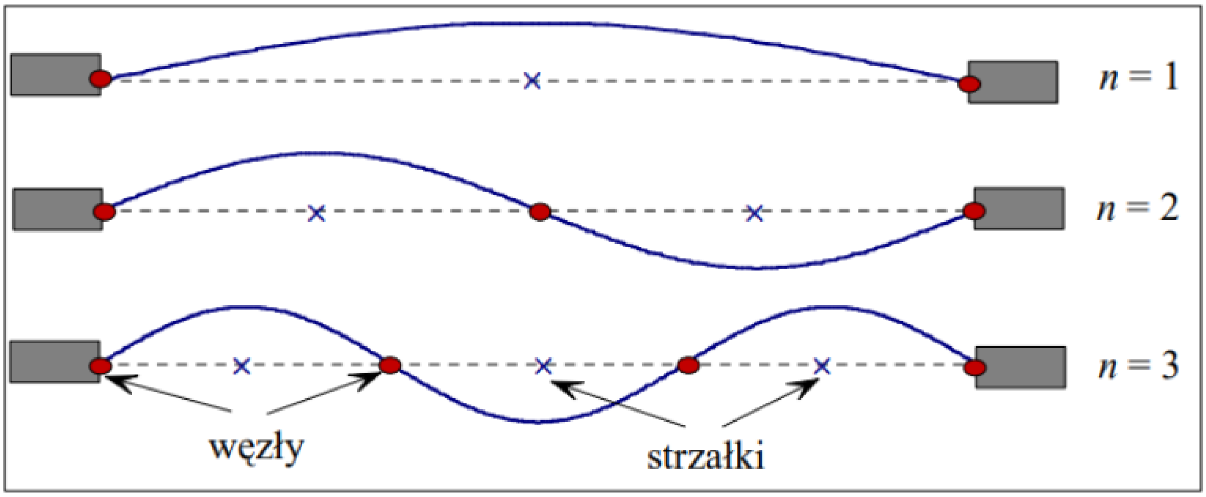
gdzie f_n – częstotliwość drgań struny, L – długość struny, F – siła naciągu struny, ρ – gęstość struny, S – przekrój poprzeczny struny.

Przyglądając się powyższemu równaniu zauważymy, że przewiduje ono wiele różnych wartości f_n. Jednak szarpiąc strunę gitary, wysokość dźwięku (pomimo różnej głośności) pozostaje taka sama, niezależnie od sposobu w jaki to zrobimy. Jak więc można pobudzić gitarę do drgań o innych częstościach? By tego się dowiedzieć narysujemy schematyczny rysunek drgającej struny (rys. 1).

Widzimy, że najprostsza fala propagująca się na strunie ma węzły (miejsca gdzie struna nie drga) w punktach zaczepienia struny oraz strzałkę (miejsce gdzie amplituda drgań jest największa) w połowie jej długości. Kolejną falą jest taka, która posiada na środku węzeł oraz dwie strzałki symetrycznie położone po jego dwóch stronach. Fala, która będzie się propagowała podczas tego drgania będzie miała połowę długości pierwszego modu, co wynika wprost z przedstawionego rysunku. Możemy pójść dalej i rysować kolejne mody drgań struny, w których fala propagująca będzie sukcesywnie skracać swoją długość zgodnie z relacją:

$$L_n = \frac{2L_0}{n},$$

gdzie n to kolejny mod drgań, zaś L_0 to długość struny.



Rysunek 1. Trzy pierwsze mody drgań struny.

By struna drgała z kolejnymi częstościami własnymi f_n musimy pobudzać ją również z daną częstością f_n. Obserwujemy wtedy zjawisko rezonansu, czyli wzmocnienia drgań pod pływem siły wymuszającej o częstości równej częstości własnej. Również i to zjawisko znajduje zastosowanie w instrumentach strunowych, gdzie rolę wzmacniacza częstości własnej pełni pudło rezonansowe, dzięki któremu dana częstość może się głośniej propagować.

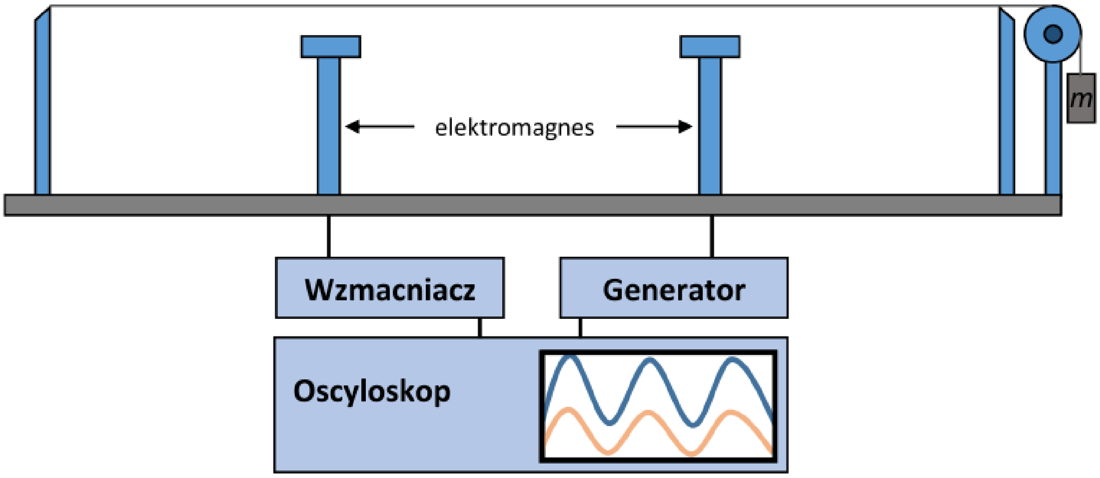
W ćwiczeniu będziemy szukać częstości własnych struny f_0 dla różnych wartości naciągu oraz długości struny. Znalezienie ich posłuży nam do wyznaczenia ρ gęstości materiału, z którego jest ona wykonana według relacji:

$$\rho = \frac{g}{\pi d^2} \frac{m}{L^2 f_0^2}, \tag{1}$$

gdzie m – masa powodująca naciąg struny, d – średnica struny, g – przyspieszenie ziemskie.

POMIARY

Schemat aparatury przedstawiony jest na rysunku 2. Układ pomiarowy składa się ze stalowego drutu (struna) umocowanego na ławie, który jest napięty za pomocą obciążenia o masie m. Do pobudzania struny do drgań służy elektromagnes zasilany z generatora sygnału o regulowanej częstości, podłączony również do oscyloskopu. Do rejestracji drgań posłuży nam również elektromagnes, tym razem w roli przetwornika, z którego sygnał podawany jest najpierw na wzmacniacz, a następnie na wejście oscyloskopu. Naciąg drutu regulowany jest za pomocą odważników umieszczanych na szalce, zaś jego długość rozstawem podpór.



Rysunek 2. Schemat układu pomiarowego.

W czasie ćwiczenia będziemy przemiatać szerokie spektrum częstości, szukając takiej, która wywoła znaczący wzrost sygnału rejestrowanego przez elektromagnes. W takim przypadku oba sygnały obserwowane na oscyloskopie będą miały kształt sinusoidy. By poszukiwania były owocne należy powoli zmieniać generowaną częstość, w przeciwnym razie można ten moment ominąć. Jak również należy uważać aby oba elektromagnesy nie były ustawione w okolicach węzłów danego modu drań.

Zadanie 1. Częstości kolejnych modów drgań struny

Zmierz średnicę struny śrubą mikrometryczną (nie zapomnij o jednostkach):

$d =$ …………………… [ ]

Oblicz ile wynosi czynnik $\frac{g}{\pi d^2}$ występujący we wzorze (1) w jednostkach układu SI:

$\frac{g}{\pi d^2} =$ ………………… [ ]

Znajdź częstości kolejnych drgań własnych struny (kolejnych modów) f_k dla stałego obciążenia m i stałej długości struny L. Pamiętaj, że kolejne mody mogą mieć coraz mniejsze amplitudy.

$m =$ …………………… [ ] $L =$ …………………… [ ]

Tabela 1. Częstości kolejnych modów drgań struny

k	1	2	3	4	5
f_k [ ]					

Wykreśl zależność $f_k(k)$ na papierze milimetrowym. Jaka to zależność?

zajęcia otwarte z fizyki

Zadanie 2. Zależność częstości od obciążenia struny.

Zbadaj zależności częstości własnej f_0 struny od jej obciążenia m przy stałej długości L.

L = …………………… [ ]

Tabela 2. Zależność częstości f_0 od obciążenia struny.

	m [kg]	$\sqrt{m}$ $[\sqrt{\text{kg}}]$	f_0 [Hz]	f_0^2 [Hz^2]	ρ [kg/m^3]
1					
2					
3					
4					

Wykreśl zależność $f_0(\sqrt{m})$ na papierze milimetrowym. Jaka to zależność? Czy takiej się można było się spodziewać?
Dla każdej pary m i f_0 oblicz gęstość struny korzystając ze wzoru (1), a następnie uśrednij uzyskane wartości gęstości:

$\rho_{śred}$ = …………………… [ ]

Zadanie 3. Zależność częstości od długości struny

Zbadaj zależności częstości własnej f_0 struny od jej długości L przy stałym obciążeniu m.

m = …………………… [ ]

Tabela 3. Zależność częstości f_0 od długości struny.

	L_i [m]	L_0/L	f_0 [Hz]	f_0^2 [Hz^2]	ρ [kg/m^3]
L_0		1			
$L_1 = ½ L_0$		2			
$L_2 = ⅓ L_0$		3			
$L_3 = ¼ L_0$		4			

Wykreśl zależność f_0 (L_0/L) na papierze milimetrowym. Jaka to zależność? Czy takiej można było się spodziewać?

Dla każdej pary L i f_0 oblicz gęstość struny z zależności korzystając ze wzoru (1), a następnie uśrednij uzyskane wartości gęstości:

$$\rho_{śred} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; [\qquad\qquad]$$

Czy wartości gęstości struny otrzymane w zadaniach 2 i 3 są ze sobą zgodne? Na ich podstawie określ z czego mogła być zrobiona struna (tablice u asystenta):

$$\rho_{metalu} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; [\qquad\qquad]$$

Niepewność wyznaczenia gęstości struny można obliczyć jako:

$$u_\rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

gdzie u_1 jest związane z niepewnością pomiaru częstości drgań struny, u_2 z niepewnością pomiaru długości struny, a u_3 z niepewnością pomiaru jej średnicy. Masę można uznać za wyznaczoną dokładnie, ponieważ dokładność używanej wagi wynosi 0,01 g co przy masach rzędu około 1 kg daje niepewność względną rzędu 0,001%.

Niepewności u_i są wyrażone są poniższymi wzorami:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}\left|\rho|_{f+u_f} - \rho|_{f-u_f}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{gm}{\pi d^2 L^2 (f+u_f)^2} - \frac{gm}{\pi d^2 L^2 (f-u_f)^2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\frac{gm}{\pi d^2 L^2}\left|\frac{(f-u_f)^2 - (f+u_f)^2}{(f+u_f)^2 (f-u_f)^2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\frac{gm}{\pi d^2 L^2}\left|\frac{-4fu_f}{(f+u_f)^2 (f-u_f)^2}\right| \xrightarrow{u_f \ll f} \frac{1}{2}\frac{gm4fu_f}{\pi d^2 L^2 f^4} = \frac{2gmu_f}{\pi d^2 L^2 f^3} \\
&= 2\frac{gm}{\pi d^2 L^2 f^2}\cdot\frac{u_f}{f} = 2\rho\frac{u_f}{f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{1}{2}\left|\rho|_{L+u_L} - \rho|_{L-u_L}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{gm}{\pi d^2 f^2 (L+u_L)^2} - \frac{gm}{\pi d^2 f^2 (L-u_L)^2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\frac{gm}{\pi d^2 f^2}\left|\frac{(L-u_L)^2 - (L+u_L)^2}{(L+u_L)^2 (L-u_L)^2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\frac{gm}{\pi d^2 f^2}\left|\frac{-4Lu_L}{(L+u_L)^2 (L-u_L)^2}\right| \xrightarrow{u_L \ll L} \frac{1}{2}\frac{gm4Lu_L}{\pi d^2 f^2 L^4} = \frac{2gmu_L}{\pi d^2 f^2 L^3} \\
&= 2\frac{gm}{\pi d^2 L^2 f^2}\cdot\frac{u_L}{L} = 2\rho\frac{u_L}{L}
\end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left|\rho|_{d+u_d} - \rho|_{d-u_d}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{gm}{\pi L^2 f^2 (d+u_d)^2} - \frac{gm}{\pi L^2 f^2 (d-u_d)^2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\frac{gm}{\pi L^2 f^2}\left|\frac{(d-u_d)^2 - (d+u_d)^2}{(d+u_d)^2 (d-u_d)^2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\frac{gm}{\pi L^2 f^2}\left|\frac{-4du_d}{(d+u_d)^2 (d-u_d)^2}\right| \xrightarrow{u_d \ll d} \frac{1}{2}\frac{gm4du_d}{\pi L^2 f^2 d^4} = \frac{2gmu_d}{\pi L^2 f^2 d^3}$$
$$= 2\frac{gm}{\pi d^2 L^2 f^2}\frac{u_d}{d} = 2\rho\frac{u_d}{d}$$

W związku z tym niepewność wyznaczenia gęstości struny będzie równa

$$u_\rho = 2\rho\sqrt{\left(\frac{u_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{d}\right)^2},$$

Za niepewność pomiaru średnicy możesz przyjąć najmniejszą podziałkę używanego instrumentu pomiarowego.

u_d= …………………… [ ] oraz $\frac{u_d}{d}$= ……………………

Jako niepewność wyznaczenia długości struny możesz przyjąć najmniejszą podziałkę używanego instrumentu pomiarowego.

Spróbuj oszacować jaka jest niepewność wyznaczenia częstości własnej drgań struny. Sprawdź np. o ile możesz zmienić częstość na generatorze tak aby nie wpłynęło to znacząco na siłę obserwowanego rezonansu.

Oblicz powyższe niepewności dla kilku wybranych punktów pomiarowych i wpisz wyniki do Tabeli 4.

Tabela 4. Wartości niepewności wyznaczania gęstości struny.

f [ ]	u_f [ ]	$\frac{u_f}{f}$	L [ ]	u_L [ ]	$\frac{u_L}{L}$	u_ρ[kg/m^3]

Czy potrafisz określić wpływ tych niepewności na niepewność określenia gęstości struny? Porównaj procentowe wkłady niepewności składowych do ostatecznej niepewności. Czy słusznie założyliśmy, że niepewność pomiaru masy można pominąć?

Opracowanie:
M. Krajewski, M. Tokarczyk, A. Drabińska

Projekt współfinansuje m.st. Warszawa