

## WAHADŁA SPRZEŻONE

Instrukcja dla uczniów szkół ponadpodstawowych

### WSTĘP

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika sprężystości sprężyny i jest pretekstem do poznania zjawisk występujących podczas wahań dwóch wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny oraz wyznaczenia częstości różnych modów drgań takich wahadeł.

W eksperymencie odwołujemy się do modelu dwóch wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny. Wahadła są jednakowe, tzn. mają ten sam moment bezwładności  $I$ , tę samą masę  $m$  i tę samą odległość  $r$  środka ciężkości od osi obrotu. Wahadła połączone są sprężyną podlegającą prawu Hooke'a o współczynniku sprężystości  $k$ . W położeniu równowagi sprężyna jest luźna (nie jest ani naciągnięta ani ściśnięta), a jej punkty przyczepienia do wahadeł leżą w odległości  $a$  od osi obrotu, tej samej dla obu wahadeł. Ruch każdego z wahadeł jest płaskim ruchem obrotowym wokół ustalonej osi. Układ taki łatwo jest wprowadzić w kilka modów drgań, które odpowiadają wychyleniu o kąt  $\varphi_1$  oraz  $\varphi_2$ , które mogą być opisane przy pomocy funkcji okresowej o częstości kołowej  $\omega$ :

$$\varphi_{1,2} = A_{1,2} \cos(\omega t). \quad (1)$$

1. **Drganie własne – drgania w fazie.** Wychylając oba wahadła o ten sam kąt w tę samą stronę i zwalnając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy zsynchronizowany, zgodny w fazie ruch obu wahadeł z częstością:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}. \quad (2)$$

Czyli wahadła drgają tak jakby nie były one połączone sprężyną i drgały jedynie pod wpływem siły ciężkości.

2. **Drganie własne – drgania w przeciwfazie.** Wychylając oba wahadła o ten sam kąt, ale w przeciwną stronę i zwalnając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy synchroniczny ruch, w którym wahadła drgają w przeciwfazie z częstością:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{2ka^2}{I}}, \quad (3)$$

Czyli wahadła drgają z częstością większą niż gdyby nie były one połączone sprężyną i drgały jedynie pod wpływem siły ciężkości.

3. **Dudnienia.** Uruchamiamy wahadła tak, że jedno z nich, np. pierwsze, jest wychylone o pewien kąt, w dowolną stronę, a drugie utrzymujemy w położeniu równowagi i oba zwalniamy jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowych. Obserwujemy zjawisko periodycznej zmiany amplitudy drgań nazywane **dudnieniami**. Drgania każdego z wahadeł można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = \\ &= A_i \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) = A_i \cos(\omega_s t) \cos(\omega_d t), \end{aligned} \quad (4)$$



Czyli ruch przyjmie postać w którym amplituda szybkich drgań z częstością  $\omega_s$  modulowana jest wolnozmiennym w czasie, harmonicznym drganiem z częstością  $\omega_d$ , przy czym drgania wahadeł są przesunięte w fazie.

Podczas wykonywania doświadczenia wygodnie jest mierzyć okres drgań wahadła ( $T$ ):

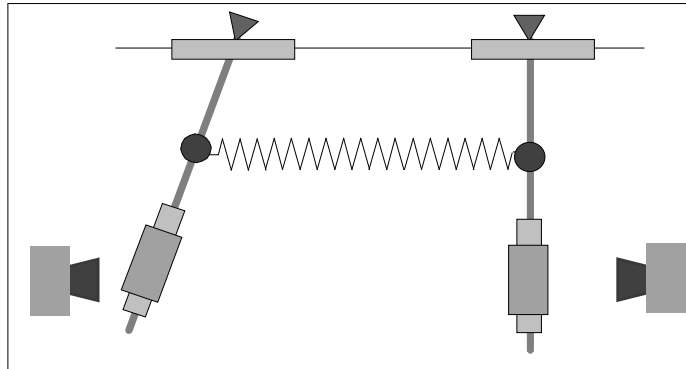
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}, \quad (5)$$

gdzie  $f$  jest częstotliwością drgań.

## POMIARY

Do dyspozycji masz:

- dwa wahadła sprzężone sprężyną; wahadła mają nakrętki pozwalające zmienić położenia środka ciężkości wahadła, a więc i jego momentu bezwładności;
- dwa bezprzewodowe czujniki odległości PASCO PS-3219 pracujące w zakresie od 15 cm do 4 m z dokładnością 1,0 mm.
- komputer z oprogramowaniem Capestone do odczytywania danych z czujników;
- miarkę metrową;
- nitkę;
- zapalniczkę;
- szalkę wagi;
- statyw;
- odważniki;
- ostrze przyzmatyczne do wyznaczania środka ciężkości.



Rysunek 1. Schemat układu pomiarowego układu wahadeł sprzężonych, po lewej i prawej stronie zaznaczono położenie ultradźwiękowych czujników ruchu.

### Planowanie pomiarów

Kluczowym elementem do poprawnego przeprowadzenia doświadczenia jest równość okresów drgań obu wahadeł, dlatego przed wykonaniem pierwszych pomiarów musimy zadbać o zachowanie ich synchroniczności przynajmniej przez czas, jaki zamierzamy poświęcić pojedynczemu pomiarowi wielkości. W tym celu uruchomimy oba wahadła, niesprężone, wychylając je w tę samą stronę i zwalniając jednocześnie, bez prędkości początkowej. Obserwujemy ich ruch przez czas odpowiadający kilkudziesięciu ich okresów, zwracając uwagę

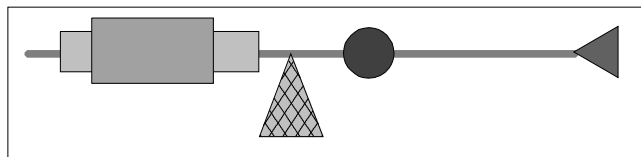


na synchroniczność ich ruchu. W razie potrzeby dokonajmy niezbędnych regulacji nakrętką na wahadle. Pomiar częstotliwości wahadeł należy wykonać z użyciem programu PASCO Capstone™. Po włączeniu czujników i komputera sterującego należy włączyć program. Następnie, należy wybrać opcję Dane czujnika i przyłączyć dwa czujniki. Podłączone czujniki muszą mieć takie same nazwy jak czujniki stojące przy wahadłach. W razie problemów skonsultuj się z asystentem. Próbkowanie pomiaru należy dobrać tak, aby zbierana zależność położenia od czasu była dokładna i niezasumiona (20 - 50 Hz). Następnie, w trybie ciągłego pomiaru należy zebrać zależność położenia od czasu dla kilkudziesięciu okresów obu wahadeł.

Siłę sprężenia możemy regulować wybierając odległości  $a$  punktu zamocowania sprężyny do wahadła od osi obrotu. Zamocowanie to możemy przesuwając wzdłuż prętów wahadeł – pamiętajmy o umieszczeniu zamocowań obu końców sprężyny w tej samej odległości od osi obrotu wahadła. Jeśli odległość  $a$  będzie duża, to przy ściskaniu sprężyna może się wygiąć w łuk, a więc niezgodnie z przyjętym w równaniach modelem. Duża wartość parametru  $a$  spowoduje, że okresy drgań będą małe, a to utrudni nam pomiar okresu drgań szybkich jak i dudnień. Z drugiej strony, jeśli wartość parametru  $a$  będzie zbyt mała, to okresy drgań będą wyjątkowo długie i ze względu na występujące straty energii, ruch układu ustanie nim wykonamy pomiar. Tak dobierzmy punkt przyłączenia sprężyny do wahadła, aby w trakcie jednego okresu dudnienia wystąpiło kilka do kilkunastu drgań szybkich. Wynikiem tego postępowania będzie oszacowanie czasu  $t$ , jaki zamierzamy spędzić na pojedynczym pomiarze zaplanowanej liczby dudnień. Wróćmy do rozprężniętych wahadeł i ponownie uruchommy je, wychylając w tę samą stronę i zwalniając jednocześnie, bez prędkości początkowej. Obserwujmy ruch wahadeł przez oszacowany czas  $t$ , zwracając uwagę na synchroniczność i dokonując, w razie potrzeby, stosownych regulacji.

### Pomiary wstępne

Teraz możemy wyznaczyć parametry fizyczne wahadeł. Masa wahadła jest podana na każdym z nich. Miarką zmierz odległość punktu zamocowania sprężyny od osi obrotu ( $a$ ). Wyniki zapisz w Tabeli 1. Aby wyznaczyć odległość środka masy wahadła od osi obrotu ( $r$ ) należy zrównoważyć wahadło ułożone w poziomej pozycji na pryzmatycznym ostrzu (patrz rysunek 2). Wahadła należy w tym celu zdjąć ostrożnie z łożysk, a po pomiarze ułożyć precyzyjnie ponownie w łożyskach.



Rysunek 2. Schemat pomiaru odległości środka masy wahadła od osi obrotu.



Tabela 1. Pomiary wielkości charakteryzujących wahadło

masa wahadła $m$ [kg]	odległość od osi obrotu $r$ [cm]	odległość punktu zamocowania sprężyny od osi obrotu $a$ [cm]

**Drganie własne – drgania w fazie.**

Wychylając oba wahadła o ten sam kąt w tę samą stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy zsynchronizowany, zgodny w fazie ruch obu wahadeł. Mierząc okres wahadeł drgających w fazie możemy wyznaczyć trudny do obliczenia moment bezwładności wahadła. Uruchom pomiar wychylenia obu wahadeł korzystając z programu CapeStone, a następnie korzystając z wykresu oblicz czas na przykład dziesięciu okresów. Dlaczego lepiej jest zmierzyć wielokrotny okres i na jego podstawie obliczać częstość drgań, a nie okres pojedynczy? Pomiar wykonaj kilka razy, po czym oblicz średnie wartości.

Tabela 2. Wyznaczanie momentu bezwładności wahadła.

Czas $n = \dots\dots\dots$ okresów [s]	Średni okres $T_1$ [s]	Średnia częstość drgań $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ [rad/s]	Moment bezwładności $I = \frac{mgr}{\omega_1^2}$ [ ]

**Drganie własne – drgania w przeciwfazie.**

Wychylając oba wahadła o ten sam kąt, ale w przeciwną stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy synchroniczny ruch, w którym wahadła drgają w przeciwfazie. Mierząc okres wahadeł drgających w przeciwfazie



oraz na podstawie wcześniejszych pomiarów, możemy wyznaczyć współczynnik sprężystości sprężyny sprzęgającej oba wahadła. Teoretycznie nie ma znaczenia, czy wahadła są zbliżone do siebie, czy też oddalone, wygodniej jest jednak zrealizować pierwszy przypadek. Zbliżamy wahadła ku sobie, co powoduje skurczenie sprężyny. Ponieważ ma ona tendencję do wyginania się w łuk, należy na tyle zbliżyć wahadła, aby wygięcie to nie wystąpiło, w przeciwnym razie zmienia się współczynnik sprężystości. Związujemy nitką końce zsuniętych wahadeł. W równowadze oba nieruchome wahadła będą symetrycznie wychylone ku sobie. Po przepaleniu nitki obserwujemy dowolne z wahadeł i z wykorzystaniem programu PASCO Capstone™ rejestrujemy ruch obu wahadeł. Ponownie jak poprzednio mierzymy kilkakrotnie czas na przykład dziesięciu okresów i na jego podstawie określamy średnią częstość drgań.

Tabela 3. Wyznaczanie współczynnika sprężystości sprężyny

Czas $n = \dots\dots\dots$ okresów [s]	Średni okres $T_2$ [s]	Średnia częstość drgań $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ [rad/s]	Współczynnik sprężystości $k = \frac{I}{2a^2}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$ [ ]

### Dudnienia.

Uruchamiamy wahadła tak, że jedno z nich, np. pierwsze, jest wychylone o pewien kąt, w dowolną stronę, a drugie utrzymujemy w położeniu równowagi i oba zwalniamy jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowych. Obserwujemy zjawisko nazywane **dudnieniami**, tzn. nałożenie się na siebie drgań szybkich z wolnozmienną modulacją. Uruchamiamy zapis drgań w programie Capstone, tak, aby zarejestrować kilka-kilkanaście dudnień. Następnie odczytujemy z wykresu okres kilku okresów drgań szybko zmiennych oraz kilku dudnień (zwróć uwagę, czy odczytujesz okres, czy pół okresu dudnień). Pomiar powtórz kilka razy, a następnie oblicz odpowiednie średnie częstości drgań.





Tabela 4. Wyznaczanie częstości drgań szybkozmiennych oraz dudnień

Czas $n = \dots\dots$ szybkich okresów [s]	Średni okres drgań szybkich $T_s$ [s]	Średnia częstość drgań szybkich $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ [rad/s]	Czas $n = \dots\dots$ okresów dudnień [s]	Średni okres dudnień $T_d$ [s]	Średnia częstość dudnień $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$ [rad/s]

Na podstawie pomiarów drgań wahadeł w fazie i przeciwfazie oblicz oczekiwaną częstość drgań szybkich:

$$\omega_s = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \dots\dots\dots \text{ [rad/s]}$$

i dudnień:

$$\omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \dots\dots\dots \text{ [rad/s].}$$

Czy otrzymane wyniki są zgodne ze sobą?

**Wyznaczenie częstotliwości z wykorzystaniem transformaty Fouriera.**

Innym wartym odnotowania sposobem wyznaczenia częstości drgań jest zastosowanie algorytmu matematycznego zwanego transformatą Fouriera. Transformata Fouriera to operacja matematyczna, która rozkłada analizowaną funkcję na funkcje harmoniczne i dostarcza wskazówki na temat sygnału obecnego dla danej częstotliwości. Dla prostego ruchu harmonicznego pojedynczego wahadła transformata Fouriera powinna wykazać obecność jednego maksimum odpowiadającego częstotliwości drgań. W przypadku, gdy ruch jest nałożeniem dwóch drgań (jak w przypadku dudnień) wykres transformaty Fouriera powinien wykazać obecność dwóch maksimumów.

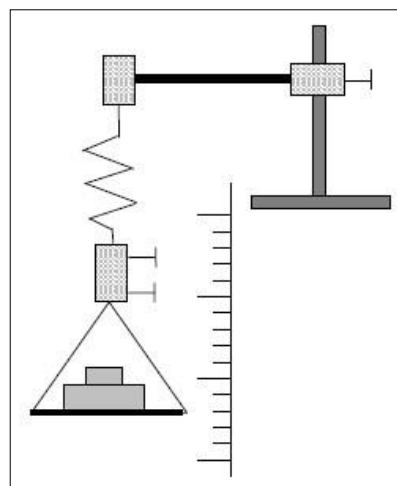
W programie Capestone dodaj nową stronę i wybierz szablon dwóch pól edytowalnych. Po kliknięciu na nie pojawi się opcja narysowania transformaty Fouriera (FFT – *Fast Fourier Transform*). W celu wyznaczenia częstotliwości drgań, należy zgodnie z uwagami asystenta dobrać skalę i gęstość transformaty. Jeśli rozdzielczość wykresu jest zbyt niska, należy zwiększyć liczbę pomiarów okresów wahadła. Odczytaj z wykresów częstotliwości drgań ( $f$ ), a następnie zgodnie ze wzorem (5) przelicz je na częstotliwości ( $\omega$ ) i porównaj z poprzednimi swoimi wynikami. Jakie częstotliwości zostały wyznaczone podczas analizy transformaty Fouriera?

### Wyznaczenie współczynnika sprężystości sprężyny z prawa Hooke'a.

W celu uzyskania oceny wartości współczynnika sprężystości **odwołujemy** się do prawa Hooke'a,

$$k = \frac{F}{\Delta x}. \quad (8)$$

Współczynnik wyznaczamy mierząc przyrost długości sprężyny pod wpływem znanego obciążenia.



Rysunek 3. Idea prawa Hooke'a.

Tabela 5. Wyznaczenie wartości współczynnika sprężystości sprężyny na podstawie prawa Hooke'a.

Siła rozciągająca ( $F_i$ )	Wydłużenie sprężyny ( $\Delta x_i$ )	Współczynnik sprężystości ( $k_i$ )	Średni współczynnik sprężystości ( $k$ )

Czy otrzymany wynik jest zgodny?

Opracowanie:  
J. Kierdaszuk, A. Drabińska



zajęcia otwarte z fizyki

## MIEJSCE NA OBLICZENIA

