

WAHADŁO MATEMATYCZNE

Instrukcja dla uczniów szkół podstawowych i ponadpodstawowych

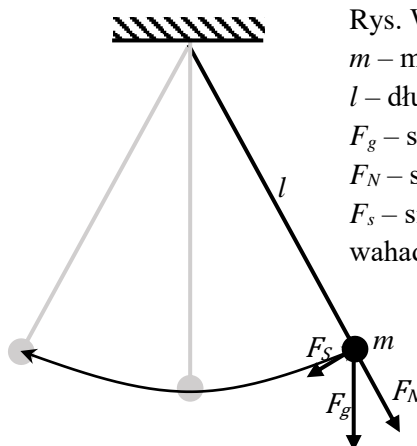
WSTĘP

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego na podstawie pomiarów okresu drgań wahadła matematycznego.

Wahadło matematyczne to punkt materialny poruszający się po okręgu w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Wahadło rzeczywiste (rys.), złożone z ciała zawieszono na nici, może być traktowane jako wahadło matematyczne, jeżeli:

- 1) rozmiary ciała są niewielkie w porównaniu z długością nici,
- 2) nić jest nieważka i nierozciągliwa,
- 3) wahadłu nadano warunki początkowe (prędkość początkową) takie, że wykonuje drgania po okręgu w płaszczyźnie pionowej (a nie ruch po elipsie w płaszczyźnie poziomej),
- 4) na ciało działają jedynie siła ciężkości oraz siła reakcji nici (pomijalne są inne siły, np. siła oporów ruchu).



Rys. Wahadło matematyczne:

m – masa wahadła,
 l – długość wahadła,
 F_g – siła grawitacji,
 F_N – siła powodująca naciąg nici,
 F_s – siła powodująca ruch wahadła.

$$\vec{F}_g = \vec{F}_N + \vec{F}_s$$

Okres drgań wahadła matematycznego (T) poruszającego się w zakresie małych kątów wynosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

gdzie:

l – długość wahadła [m] (odległość pomiędzy środkiem ciężkości wahadła a punktem jego zawieszenia),

g – przyspieszenie ziemskie [$\frac{m}{s^2}$],

π – stała matematyczna $\sim 3,141593$

Wynika stąd, że w przybliżeniu dla małych drgań wahadła okres drgań nie zależy od jego masy ani amplitudy, a jedynie od jego długości i przyspieszenia grawitacyjnego. W związku z tym, gdy znana jest długość wahadła i jego okres drgań, może ono posłużyć jako narzędzie do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego. Wówczas po przekształceniu wzoru (1) otrzymujemy wzór na przyspieszenie ziemskie:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l \quad (2)$$

Do dyspozycji masz:

- wahadło o regulowanej długości,
- taśmę mierniczą,
- suwmiarkę,
- linijkę,
- kartkę papieru z zaznaczoną linią,
- stoper.

Na początku doświadczenia należy ustalić długość wahadła. Najlepiej tak, aby dolna krawędź kuli znajdowała się kilka centymetrów nad ziemią. *Pamiętajmy, że poprzez długość wahadła rozumiemy odległość pomiędzy środkiem ciężkości wahadła a punktem jego zawieszenia.* Aby wyznaczyć dokładną długość wahadła należy skorzystać ze wzoru:

$$l = L - h - r \quad (3)$$

gdzie:

L – odległość od podłogi po punktu zawieszenia wahadła,

h – wysokość od ziemi do dolnej krawędzi kuli,

r – promień kuli.

Wszystkie pomiary możesz zapisać w tabeli umieszczonej na końcu instrukcji.

Pamiętaj o jednostkach!

Tuż pod kulą, na podłodze, należy położyć kartkę z zaznaczoną linią – będzie ona wyznaczała miejsce, od którego należy rozpocząć pomiar okresu drgań wahadła. W momencie, gdy kula zwisa swobodnie i nie wykonuje żadnego ruchu, nasze wahadło znajduje się w stanie równowagi. Następnym elementem eksperymentu jest wypracowanie najlepszej metody wychylenia wahadła ze stanu równowagi – w kierunku prostopadłym do narysowanej na kartce kreski, na odległość około 30 cm. Należy pamiętać, że wahadło nie może krążyć po elipsie, kula nie może kiwać się wokół własnego środka ciężkości oraz nie może się obracać wokół własnej osi. Przed przystąpieniem do właściwych pomiarów, należy wykonać kilka próbnych. Spróbuj zmierzyć 10 pojedynczych okresów drgań wahadła. Pamiętaj, że pojedynczy okres jest to przedział czasu, między dwoma przejściami kuli nad kreską narysowaną na kartce w tę samą stronę.

Co możesz powiedzieć o uzyskanych wynikach? Czy są one powtarzalne? Jakie czynniki wpływają na ich powtarzalność?

W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego, należy wykonać 5 razy pomiar czasu trwania dziesięciu okresów drgań wahadła. Całą czynność należy powtórzyć dla pięciu różnych długości wahadła. Wszystkie pomiary oraz obliczenia zapisz w Tabeli.

W celu wyznaczenia wartości przyspieszenia ziemskiego dla naszego wahadła, należy je policzyć dla każdej długości wahadła osobno a następnie wyznaczyć średnią arytmetyczną.

Średnie przyspieszenie ziemskie wynosi:

$$g_{\text{średnie}} = \dots \frac{m}{s^2}$$



W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego niezbędne było wykonanie pomiarów bezpośrednich: długości wahadła oraz okresu jego drgań.

Czy uważasz, że pomiary te zostały wykonane bardzo dokładnie czy są obarczone niepewnościami? Jakie czynniki mogły wpłynąć na niepewności pomiarowe?

Spróbuj oszacować, z jakimi niepewnościami pomiarowymi dokonałeś pomiarów długości oraz okresu drgań wahadła:

$$\Delta l = \dots\dots\dots$$

$$\Delta T = \dots\dots\dots$$

Należy pamiętać, że wielkość obliczona pośrednio (przyspieszenie ziemskie) na podstawie pomiarów bezpośrednich (długość wahadła, okres drgań) również obciążona jest niepewnością. Aby określić, która z wielkości mierzonych bezpośrednio miała większy wpływ na niepewność obliczonej wielkości można policzyć ich niepewności względne, tzn. stosunek niepewności do wartości mierzonej. Oszacuj te wielkości dla najdłuższego i najkrótszego wahadła.

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\Delta l}{l_2} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\Delta T}{T_2} = \dots\dots\dots$$

Niepewność względną wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego można oszacować na podstawie poniższego wzoru:

$$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \quad (4)$$

$$\frac{\Delta g_1}{g_1} = \dots\dots\dots$$

$$\Delta g_1 = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\Delta g_2}{g_2} = \dots\dots\dots$$

$$\Delta g_2 = \dots\dots\dots$$

Co to według Ciebie oznacza? Czy otrzymane wartości przyspieszenia ziemskiego są ze sobą zgodne?

Otrzymane wyniki z Tabeli przedstaw na wykresie na papierze milimetrowym jako zależność kwadratu okresu drgań wahadła od jego długości $T^2(l)$, a następnie spróbuj dopasować do nich prostą o równaniu $y = ax + b$. Zastanów się do czego może służyć wykonanie takiego wykresu i dopasowanie prostej. Czy na ich podstawie możliwe jest obliczenie wartości przyspieszenia ziemskiego?

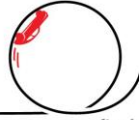
Wyznaczone wartości parametrów:

$$a = \dots\dots\dots$$

$$b = \dots\dots\dots$$

Obliczona wartość przyspieszenia ziemskiego:

$$g = \dots\dots\dots \frac{m}{s^2}$$



zajęcia otwarte z fizyki

Porównaj wartość przyspieszenia ziemskiego wyznaczoną z wykresu z wartością uzyskaną na podstawie średniej z pomiarów. Która metoda według Ciebie jest dokładniejsza?

Porównaj oba wyniki z tablicową wartością przyspieszenia ziemskiego dla Warszawy, które wynosi:

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Jak myślisz, co mogło wpłynąć na różnice pomiędzy tymi wielkościami?

Opracowanie:
K. Stachurska, A. Drabińska

Tabela. Wyniki pomiarów i obliczeń

Lp.	L [m]	h [m]	r [m]	l [m]	$10 \cdot T$ [s]	$10 \cdot T_{\text{średnie}}$ [s]	$T_{\text{średnie}}$ [s]	$T_{\text{średnie}}^2$ [s ²]	g [$\frac{m}{s^2}$]
1									
2									



zajęcia otwarte z fizyki

Lp.	L [m]	h [m]	r [m]	l [m]	$10 \cdot T$ [s]	$10 \cdot T_{\text{średnie}}$ [s]	$T_{\text{średnie}}$ [s]	$T_{\text{średnie}}^2$ [s ²]	g [$\frac{m}{s^2}$]
3									
4									
5									