

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2019-10-24, seria 2)

Liczby zespolone

Zad. 1. Oblicz a) $z_1^* + z_2$ i $z_1 - z_2^*$, b) $z_1 z_2$, c) $|z_1|$ i $|z_2|$ d) z_1/z_2 , e) z_2/z_1 , gdy $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Zad. 2.🔗 Podaj w postaci trygonometrycznej z , z^* , z^2 , $(z^*)^2$, z^3 , $(z^*)^3$, gdy $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Przedstaw wszystkie liczby na płaszczyźnie zespolonej.

Zad. 3.🔗 Przedstaw $z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ i $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ na płaszczyźnie zespolonej. Wyznacz moduły i argumenty obu liczb zespolonych i zapisz obie liczby w postaci trygonometrycznej $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Zad. 4. Rozwiąż równanie $z^2 - 2z + 2 = 0$, gdy $z \in \mathbb{C}$. Przedstaw rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej. Zapisz je w postaci algebraicznej i trygonometrycznej.

Zad. 5.🔗 Oblicz z^n , gdy $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ i $n \in \mathbb{N}$. Przedstaw wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej.

Zad. 6. Korzystając ze wzoru Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

pokaż, że

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Korzystając z przedstawienia funkcji $\sin \varphi$ w tej postaci oblicz pochodną tej funkcji i pokaż, że jest ona równa funkcji $\cos \varphi$.

Zad. 7. Wyraż $\cos 3\varphi$ i $\sin 3\varphi$ przez funkcje $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$.

Zad. 8.🔗 Liczby w nawiasie podane niżej oznaczają moduł i argument liczby zespolonej

$$z_1 = (1, \pi), \quad z_2 = (2, \pi/2), \quad z_3 = (\sqrt{2}, -\pi/6), \quad z_4 = (1, 5\pi/2).$$

Zapisz te liczby w postaci wykładniczej, trygonometrycznej i algebraicznej. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej strzałki reprezentujące te liczby.

Zad. 9.🔗 Narysuj strzałki reprezentujące liczby $z_n = e^{in\varphi_0}$, gdzie $\varphi_0 = \pi/3$, $n \in \{0, 1, \dots, 5\}$. Oblicz sumę $z = z_0 + z_1 + \dots + z_5$. Przedstaw geometryczną interpretację tej sumy.

Zad. 10.🔗 Na rysunku przedstawione zostały trzy strzałki reprezentujące trzy liczby zespolone. Podaj te liczby w postaci algebraicznej i oblicz ich sumę.

