

Wybrane zagadnienia fizyki i matematyki

(zadania domowe 2019-11-08, seria 3)

Przestrzeń stanów spinu, reprezentacja macierzowa operatorów spinu

Zad. 1. Zapisz wektory $|w\rangle$ i $|z\rangle$ w bazie $\{|p\rangle, |l\rangle\}$.

Zad. 2. Znajdź wynik działania operatora spinu σ_x na stany $|w\rangle$ i $|z\rangle$.

Zad. 3. Układ znajduje się w stanie

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle + \psi_l |l\rangle, \quad \psi_l \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz ψ_l . Czy odpowiedź jest jednoznaczna? Jeżeli nie, podaj ogólne rozwiązanie.

Zad. 4. Znajdź prawdopodobieństwo uzyskania wartości 1 przy pomiarze spinu wzdłuż osi z , jeżeli układ został przygotowany w stanie $|\psi\rangle$ z poprzedniego zadania.

Wskazówka: zapisz stan $|\psi\rangle$ w bazie $\{|g\rangle, |d\rangle\}$.

Zad. 5. Układ przygotowano w stanie

$$|\psi\rangle = \psi_p |p\rangle + \psi_l |l\rangle, \quad \psi_p, \psi_l \in \mathbb{R}.$$

Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku 1 przy pomiarze spinu wzdłuż osi z wynosi $3/4$. Wyznacz ψ_p i ψ_l .

Zad. 6. Stan $|p\rangle$ w bazie stanów $|g\rangle$ i $|d\rangle$ ma postać

$$|p\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_d |d\rangle,$$

gdzie współczynniki ψ_g i ψ_d spełniają warunek $|\psi_g|^2 = |\psi_d|^2 = \frac{1}{2}$. Spośród wszystkich rozwiązań spełniających to równanie wybraliśmy $\psi_g = \psi_d = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Podaj ogólną postać rozwiązania równania $|z|^2 = 1/2$ i wybierz kilka rozwiązań różnych od użytych na zajęciach.

Zad. 7. Reprezentację macierzową operatora spinu σ_z , czyli zestaw czterech współczynników macierzy a , b , c i d , możemy uzyskać rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Wyjaśnij, dlaczego?

Rozwiąż ten układ równań i znajdź macierz σ_z . Korzystając z tej metody znajdź pozostałe macierze Pauliego.

Zad. 8. Korzystając z reprezentacji macierzowych operatorów spinu pokaż, że

$$\begin{cases} \sigma_x \sigma_y = i \sigma_z \\ \sigma_y \sigma_z = i \sigma_x \\ \sigma_z \sigma_x = i \sigma_y \end{cases}, \text{ ale } \begin{cases} \sigma_y \sigma_x = -i \sigma_z \\ \sigma_z \sigma_y = -i \sigma_x \\ \sigma_x \sigma_z = -i \sigma_y \end{cases} \text{ i równocześnie } \begin{cases} \sigma_x \sigma_x = I \\ \sigma_y \sigma_y = I \\ \sigma_z \sigma_z = I \end{cases},$$

gdzie I jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego (macierzą jednostkową).

Zad. 9. Znajdź stany $|\psi_1\rangle = \sigma_x |g\rangle$, $|\psi_2\rangle = \sigma_x |d\rangle$, $|\psi_3\rangle = \sigma_y |g\rangle$, $|\psi_4\rangle = \sigma_y |d\rangle$, wykorzystując reprezentację macierzową operatorów spinu.

Zad. 10. Powtórz obliczenia z poprzedniego zadania bez korzystania z reprezentacji macierzowej, wyrażając wektory $|g\rangle$ i $|d\rangle$ przez wektory własne operatorów σ_x i σ_y i po wykonaniu działania wracając do bazy $\{|g\rangle, |d\rangle\}$.