Egzamin pisemny z elektrodynamiki R 2011/12 (termin zerowy, 5.06.2012)

Zad. 1

Przewodzącą, nienaładowaną sferę o promieniu R wstawiono do środka pola kwadrupolowego, $\vec{E}_0(x, y, z) = \alpha(-x, -y, 2z)$. Jak zmieni się pole w obecności sfery?

Zad. 2

Znaleźć opór całkowity w układzie dwóch współśrodkowych sfer przewodzących o promieniach a i b pomiędzy którymi przewodnictwo właściwe zależy od promienia, $\sigma(r) = \alpha r$.

Zad. 3

Pomiędzy okładkami kondensatora kulistego, złożonego z dwóch współśrodkowych sfer o promieniach a i b płynie radialnie prąd $\vec{j} = j(r, t)\vec{e}_r$ tak, że ładunek na okładkach rośnie liniowo, $Q = It$, dla $t > 0$ i ustalonego I. Znaleźć potencjał Φ w cechowaniu Lorentza.

Przydatne wzory

Wielomiany Legendre'a:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=(3x^2-1)/2,\ P_3(x)=(5x^3-3x)/2,\ P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8$$

Współrzędne walcowe

$$x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ z=z$$

$\vec{A}=A_\rho\vec{e}_\rho+A_\phi\vec{e}_\phi+A_z\vec{e}_z$

$$\nabla f=\vec{e}_\rho\partial_\rho f+\rho^{-1}\vec{e}_\phi\partial_\phi f+\vec{e}_z\partial_z f$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\rho^{-1}\partial_\rho(\rho A_\rho)+\rho^{-1}\partial_\phi A_\phi+\partial_z A_z$$

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_\rho(\rho^{-1}\partial_\phi A_z-\partial_z A_\phi)+\vec{e}_\phi(\partial_z A_\rho-\partial_\rho A_z)+\vec{e}_z\rho^{-1}(\partial_\rho(\rho A_\phi)-\partial_\phi A_\rho)$$

Współrzędne sferyczne

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$$

$\vec{A}=A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta+A_\phi\vec{e}_\phi$

$$\nabla f=\vec{e}_r\partial_r f+r^{-1}\vec{e}_\theta\partial_\theta f+(r\sin\theta)^{-1}\vec{e}_\phi\partial_\phi f$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=r^{-2}\partial_r(r^2A_r)+(r\sin\theta)^{-1}\partial_\theta(\sin\theta A_\theta)+(r\sin\theta)^{-1}\partial_\phi A_\phi$$

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_r(r\sin\theta)^{-1}(\partial_\theta(\sin\theta A_\phi)-\partial_\phi A_\theta)+\vec{e}_\theta r^{-1}((\sin\theta)^{-1}\partial_\phi A_r-\partial_r(rA_\phi))+\vec{e}_\phi r^{-1}(\partial_r(rA_\theta)-\partial_\theta A_r)$$

Tożsamości:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}),\ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A})$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}),\ \nabla\times(f\vec{A})=f\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\times\nabla f$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}$$

$$\nabla\times(\nabla f)=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$$