Egzamin pisemny z elektrodynamiki R 2011/12 (12.06.2012)

Zad. 1

Prostoliniowy cienki przewodnik, w którym płynie stały prąd I umieszczono w próżni, równolegle do osi nieskończonego walca o promieniu R i przenikalności magnetycznej μ, w odległości $a > R$ od osi. Znaleźć pole magnetyczne w całej przestrzeni.

$\vec{A} = A\vec{e}_z$

$$A^o = \frac{\mu_0}{2\pi}(I\ln|\vec{\rho}-\vec{a}| + I'\ln|\vec{\rho}-\vec{b}| + I'''\ln\rho)$$

$$A^i = \frac{\mu}{2\pi}(I''\ln|\vec{\rho}-\vec{a}| + C)$$

gdzie $\vec{b} = R^2\vec{a}/a^2$, $\vec{\rho} = \vec{r} - z\vec{e}_z$

We współrzędnych walcowych, przyjmując $\phi_a = 0$, $|\vec{\rho}-\vec{a}|^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\phi$, $|\vec{\rho}-\vec{b}|^2 = \rho^2 + b^2 - 2\rho b\cos\phi = (R/a)^2(a^2(\rho/R)^2 + R^2 - 2\rho a\cos\phi)$ Warunki zszycia w $\rho = R$

$B^o_\rho = B^i_\rho$, $H^o_\phi = H^i_\phi$

$B_\rho = \partial_\phi A/\rho$, czyli dla B:

$$\frac{\mu_0 IRa\sin\phi}{R^2+a^2-2Ra\cos\phi} + \frac{\mu_0 I'Rb\sin\phi}{R^2+b^2-2Rb\cos\phi} = \frac{\mu I''Ra\sin\phi}{R^2+a^2-2Ra\cos\phi}$$

skąd mamy

$$\mu_0(I+I') = \mu I''$$

$H_\phi = -\partial_\rho A$, czyli dla H:

$$\frac{I(R-a\cos\phi)}{R^2+a^2-2Ra\cos\phi} + \frac{I'(R-b\cos\phi)}{R^2+b^2-2Rb\cos\phi} = \frac{I''(R-a\cos\phi)}{R^2+a^2-2Ra\cos\phi} - \frac{I'''}{R}$$

skąd

$$I(R-a\cos\phi) + I'(a^2/R - a\cos\phi) = I''(R-a\cos\phi) - I'''(R + a^2/R - 2a\cos\phi)$$

czyli

$$I + I' = I'' - 2I''',\ R(I - I'' + I''') + a^2/R(I' + I''')$$

a więc $I' = -I'''$ oraz $I = I'' + I'$. Ostatecznie $I'' = 2I\mu_0/(\mu+\mu_0)$, $I' = I(\mu-\mu_0)/(\mu+\mu_0)$

Zad. 2

Kula o promieniu R naładowana jednorodnie ładunkiem Q obraca się z prędkością kątową ω wokół swojej osi. Znaleźć całkowity moment pędu pola kuli.

Gęstość momentu pędu $\vec{i} = \epsilon_0\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})$.

Pole elektryczne $\vec{E} = E\vec{e}_r$

$$E^o = Q/4\pi\epsilon_0 r,\ E^i = Qr/4\pi\epsilon_0 R^3$$

Pole magnetyczne

Dla cienkiej sfery o promieniu r', prędkości kątowei $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ i gęstości σ

wewnątrz $\vec{B}^i = \vec{e}_z C = C(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$

na zewnątrz $\vec{B}^o = -\nabla(M\cos\theta/r^2) = M(\vec{e}_r 2\cos\theta + \vec{e}_\theta \sin\theta)/r^3$
Warunki zszycia:
$B_r^o = B_r^i$ dla $r = r'$ i $\theta = 0$ czyli $C = 2M/r'^3$
$H_\theta^o - H_\theta^i = r'\omega\sigma$ czyli $C + M/r'^3 = \mu_0 r'\sigma\omega$
skąd $C = 2\mu_0 r'\sigma\omega/3$, $M = \mu_0\sigma\omega r'^4/3$.

U nas $\sigma = 3Q/4\pi R^3$ dla $r' < R$.
Stąd $B_\theta = \sin\theta(M/r^3 - C)$ (B_r niepotrzebne!), gdzie

$$M^o = \mu_0\omega\sigma/3\int_0^R r'^4 dr' = Q\mu_0\omega R^2/20\pi$$

$$M^i = \mu_0\omega\sigma/3\int_0^r r'^4 dr' Q\mu_0\omega r^5/20\pi R^3$$

$$C^i = 2\mu_0\omega\sigma/3\int_r^R r'dr' = \mu_0\omega(R^2 - r^2)/4\pi R^3$$

Mamy zatem $B_\theta^o = Q\mu_0\omega R^2 \sin\theta/20\pi r^3$, $B_\theta^i = Q\mu_0\omega\sin\theta(6r^2 - 5R^2)/20\pi R^3$

Gęstość pędu ma tylko kierunek $\vec{e}_\phi$. $\epsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})_\phi^o = Q^2\omega\mu_0\sin\theta R^2/80\pi^2 r^5$,
$\epsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})_\phi^i = Q^2\omega\mu_0\sin\theta(6r^2 - 5R^2)r/80\pi^2 R^6$
Zatem w $\vec{J} = \int d^3r\, \vec{i}$ zostaje tylko składowa J_z

$$J_z = \int d^3r\, r\sin\theta\epsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})_\phi =$$

$$Q^2\omega\mu_0/40\pi\int_{-1}^1 ds(1-s^2)\left[\int_0^R dr\, r^4(6r^2 - 5R^2)/R^6 + \int_R^\infty dr\, R^2/r^2\right]$$
$$= Q^2\omega R\mu_0/30\pi[6/7 - 1 + 1] = Q^2\omega R\mu_0/35\pi$$

Zad. 3

Wzdłuż nieskończonej płyty o grubości a płynie jednorodnie prąd zmienny o gęstości $j = j_0\cos\omega t$. Wyznaczyć średni strumień energii wypromieniowanej z płyty na jednostkę powierzchni. W jakich sytuacjach ta energia jest zerowa?

Rozwiązujemy przypadek cienkiej płyty z gestością $\vec{\tilde{j}} = \vec{e}_x\kappa\delta(z)e^{-i\omega t}$. Postulujemy $\vec{A} = \vec{e}_x A$: $\tilde{A} = \alpha e^{ik|z| - i\omega t}$, $k = \omega/c$. Skok pochodnej w $z = 0$: $-2ik\alpha = \mu_0\kappa$ czyli $\alpha = i\kappa\mu_0/2k$.

W naszym przypadku trzeba całkować po obszarze $[0, a]$ czyli

$$\tilde{A} = ij_0\mu_0/2k\int_0^a dz' e^{ik|z-z'| - i\omega t}$$

Wystarczy policzyć A dla $z < 0$:

$$\tilde{A}^l = ij_0\mu_0/2k\int_0^a dz' e^{ik(z'-z) - i\omega t} = i\mu_0 j_0(e^{ika} - 1)e^{-ikz - i\omega t}/2k^2$$

Wektor Poyntinga $\vec{S} = -\partial_t A\times(\nabla\times\vec{A})/\mu_0$ Dla $z < 0$, $\langle\vec{S}\rangle = -\vec{e}_z j_0^2\omega\mu_0|e^{ika} - 1|^2/8k^3$

Zatem $dP/d\Sigma = c^3\mu_0 j_0^2\sin^2(\omega a/2c)/\omega^2$, znika dla $\omega a/c = 2n\pi$.