

I kolokwium z elektrodynamiki R 2011/12 (termin dodatkowy)

Zad. 1

Wewnątrz nieskończonego przewodzącego walca o promieniu R znajduje się nić naładowana jednorodnie z gęstością liniową λ równoległe w odległości $a < R$ od osi walca. Jaką pracę, na jednostkę długości nici, trzeba wykonać aby przesunąć nić na oś walca?

Zad. 2

Na powierzchni pustego walca o promieniu R zadano potencjał $\Phi = \Phi_0 \cos^4 \phi$, gdzie ϕ jest kątem liczonym dla prostopadłego przekroju walca. Znaleźć potencjał wewnątrz walca.

Zad. 3

Powłokę dielektryczną o przenikalności ϵ_1 ograniczoną współśrodkowymi sferami o promieniu wewnętrznym R i zewnętrznym $3R$ umieszczono w próżni w jednorodnym polu elektrycznym \vec{E}_0 . Jaki potencjał wytworzy powłoka?

Przydatne wzory

Wielomiany Legendre'a:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

Współrzędne walcowe

$$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z$$

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z$$

$$\nabla f = \vec{e}_\rho \partial_\rho f + \rho^{-1} \vec{e}_\phi \partial_\phi f + \vec{e}_z \partial_z f$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \rho^{-1} \partial_\rho (\rho A_\rho) + \rho^{-1} \partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_\rho (\rho^{-1} \partial_\phi A_z - \partial_z A_\phi) + \vec{e}_\phi (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z) + \vec{e}_z \rho^{-1} (\partial_\rho (\rho A_\phi) - \partial_\phi A_\rho)$$

Współrzędne sferyczne

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$$

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$$

$$\nabla f = \vec{e}_r \partial_r f + r^{-1} \vec{e}_\theta \partial_\theta f + (r \sin \theta)^{-1} \vec{e}_\phi \partial_\phi f$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = r^{-2} \partial_r (r^2 A_r) + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\theta (\sin \theta A_\theta) + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\phi A_\phi$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_r (r \sin \theta)^{-1} (\partial_\theta (\sin \theta A_\phi) - \partial_\phi A_\theta) + \vec{e}_\theta r^{-1} ((\sin \theta)^{-1} \partial_\phi A_r - \partial_r (r A_\phi)) + \vec{e}_\phi r^{-1} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r)$$

Tożsamości:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}), \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{C}(\vec{B} \cdot \vec{A})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}), \nabla \times (f \vec{A}) = f \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla f$$

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$