

Statystyki kwantowe

Zadanie 1

Gęstość stanów $g(\varepsilon)$ jest funkcją opisującą liczbę dostępnych stanów kwantowych na jednostkę energii. Dla swobodnych fermionów ($\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$) o spinie σ oblicz gęstości stanów w granicy termodynamicznej dla $d = 1, 2, 3$, gdzie d to wymiarowość problemu. Porównaj zależność $g(\varepsilon)$ od ε w tych przypadkach.

Zadanie 2

Bardziej realistyczne modele ciała stałego niż model Einsteina konstruujemy przyjmując, iż ciało stałe może być traktowane jako układ $3N$ niezależnych, jednowymiarowych i rozróżnialnych oscylatorów harmoniczych o różnych częstościach własnych. Rozkład częstości charakteryzujemy przez podanie funkcji $g(\omega)$ zdefiniowanej w taki sposób, że $g(\omega)d\omega$ jest ilością oscylatorów o częstości z przedziału $[\omega, \omega + d\omega]$. Zgodnie z teorią Debye'a

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{3V}{2\pi v_0^3} \omega^2 & \text{gdy } \omega \leq \omega_{max}, \\ 0 & \text{gdy } \omega \geq \omega_{max}, \end{cases}$$

gdzie v_0 jest "średnią" prędkością dźwięku określoną ze związku

$$\frac{1}{v_0^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right),$$

gdzie v_t jest prędkością fal poprzecznych, a v_l jest prędkością fal podłużnych, zaś wartość ω_{max} wynika ze związku

$$\int_0^{\omega_{max}} g(\omega) d\omega = 3N.$$

Wyznacz ciepło właściwe c_V ciała stałego zgodnie z tą teorią. Zbadać przypadek $T \gg T_D$ oraz $T \ll T_D$, gdzie $T_D = \frac{\hbar \omega_{max}}{k_B}$ jest temperaturą Debye'a. Układ znajduje się w kontakcie z termostatem o temperaturze T .

Zadanie 3

Kondensacja Bosego–Einsteina w pułapce harmoniczej – Rozważ idealny gaz bozonów w trójwymiarowej, izotropowej pułapce harmoniczej o częstości ω . Energie stanów jednocząstkowych mają postać

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar \omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right), \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$$

Średnia liczba cząstek spełnia

$$\langle N \rangle = \sum_{\nu} \langle N_{\nu} \rangle = \sum_{\nu} N_{BE}(\epsilon_{\nu}), \quad N_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{\exp[(\epsilon - \mu)/(k_B T)] - 1},$$

gdzie ν oznacza komplet liczb kwantowych. Możemy rozdzielić wkład stanu podstawowego:

$$\langle N \rangle = \langle N_0 \rangle + \sum_{\nu \neq 0} \langle N_{\nu} \rangle,$$

gdzie $\langle N_0 \rangle$ jest średnią obsadą stanu podstawowego.

- (a) Rozważając wyłącznie stan podstawowy pokaż, że potencjał chemiczny spełnia $\mu \leq \epsilon_0$, gdzie $\epsilon_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega$ jest energią stanu podstawowego. Wygodnie jest wprowadzić przesunięty potencjał $\tilde{\mu} = \mu - \epsilon_0$ i wykazać, że $\tilde{\mu} \leq 0$.

Założmy teraz, że obniżamy temperaturę przy stałej liczbie cząstek $\langle N \rangle$. Utrzymanie stałej liczby cząstek wymaga zwiększania μ , ale nie można tego robić w nieskończoność ze względu na ograniczenie z punktu (a). Poniżej pewnej temperatury krytycznej T_c , gdy nie da się już dalej zwiększać μ , pojawia się makroskopowa obsada stanu podstawowego. Zjawisko to nazywamy kondensacją Bosego–Einsteina.

- (b) Warunek kondensacji polega na tym, że w temperaturze T_c wszystkie cząstki są *dokładnie* w stanie zajmując stany wzbudzone przy maksymalnym dopuszczalnym potencjale chemicznym ($\tilde{\mu} \rightarrow 0$). Uzasadnij, że prowadzi to do warunku

$$\langle N \rangle = \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{\exp[(\epsilon_\nu - \epsilon_0)/(k_B T_c)] - 1}.$$

- (c) W granicy ciągłej dla $k_B T \gg \hbar \omega$ suma po stanach wzbudzonych może zostać zastąpiona całką z użyciem gęstości stanów pułapki harmoniczej. Pokaż, że można wtedy zapisać

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{D_{\text{ho}}(\varepsilon)}{\exp[\varepsilon/(k_B T_c)] - 1},$$

gdzie $\varepsilon = \epsilon - \epsilon_0$, a gęstość stanów (dla 3D, izotropowo) ma postać

$$D_{\text{ho}}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2(\hbar \omega)^3}.$$

- (d) Korzystając z tożsamości

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \Gamma(s) \zeta(s),$$

wykaż, że temperatura krytyczna spełnia

$$k_B T_c = \hbar \omega \left(\frac{\langle N \rangle}{\zeta(3)} \right)^{1/3}.$$

- (e) Pokaż, że dla $T < T_c$ liczba skondensowanych cząstek $N_0(T)$ jest dana przez

$$N_0(T) = \langle N \rangle \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right].$$

Zadanie 4

Energia Fermiego i rozwinięcie Sommerfelda – Średnia liczba cząstek w trójwymiarowym idealnym gazie Fermiego jest dana przez

$$\langle N \rangle = \sum_{\mathbf{k}} N_{\text{FD}}(\epsilon_{\mathbf{k}}),$$

gdzie $N_{\text{FD}}(\epsilon_{\mathbf{k}})$ jest rozkładem Fermiego–Diraca.

1. Rozważ granicę ciągłą powyższego wyrażenia. Dla $T = 0$ rozkład Fermiego–Diraca staje się funkcją skokową i fermiony mogą wypełniać stany tylko do pewnej energii, zwanej energią Fermiego ϵ_F . Pokaż, że energia Fermiego dana jest wzorem

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 \rho)^{2/3},$$

gdzie $\rho = \langle N \rangle / V$.

2. Chociaż ϵ_F została wyprowadzona dla $T = 0$, rozszerzamy wyrażenie otrzymane w punkcie (a) również na temperatury niezerowe. Pokaż, że w tym przypadku otrzymuje się

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) N_{\text{FD}}(\epsilon),$$

gdzie tzw. gęstość stanów dana jest przez

$$D(\epsilon) = \frac{3}{2} \frac{\langle N \rangle}{\epsilon_F} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}}.$$

3. Pokaż, że dla $T \neq 0$ zachodzi

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty d\epsilon \langle N \rangle \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \left(-\frac{\partial N_{\text{FD}}(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right).$$

4. Zauważ, że $N'_{\text{FD}}(\epsilon)$ jest funkcją silnie skoncentrowaną (ostro „spikowaną”) wokół μ . Dla $T = 0$ przechodzi ona w deltę Diraca. W rezultacie możemy rozwinąć $(\epsilon/\epsilon_F)^{3/2}$ w wyrażeniu otrzymanym w punkcie (c) wokół μ . Wykonaj to rozwinięcie i udowodnij rozwinięcie Sommerfelda

$$\langle N \rangle = \langle N \rangle \left(\frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} + \langle N \rangle \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\epsilon_F}{\mu} \right)^{1/2} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots$$

5. Pokaż, że dla $k_B T \ll \epsilon_F$ potencjał chemiczny maleje kwadratowo, aż osiąga energię Fermiego. To znaczy, pokaż że

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right].$$

W obliczeniach może być przydatna następująca całka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{\cosh^2(x)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zadanie 5

Gwiazdy ciągu głównego takie jak Słońce pozostają w równowadze dzięki równowadze pomiędzy ciśnieniem grawitacyjnym starającym się dokonać kolapsu gwiazdy, a ciśnieniem wywieranym przez promieniowanie produkowane w trakcie fuzji termojądrowej w jej wnętrzu. U kresu ich życia fuzja ustaje i zaczyna dominować grawitacja zgniatając je. Jeżeli dana gwiazda jest odpowiednio mało masywna ciśnienie Pauliego zdegenerowanego gazu elektronów w jej wnętrzu jest w stanie zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne i zapobiegać dalszemu kolapsowi. Powstała w ten sposób gwiazda jest nazywana *białym karłem*. Rozważmy prosty model takich gwiazd i przedyskutujemy ich stabilność.

- (a) Energia całkowita białego karła może być zapisana w postaci $E = K + U$, gdzie K jest energią kinetyczną silnie zdegenerowanego gazu elektronów, a U jest grawitacyjną energią potencjalną gwiazdy. Przyjmując najprostszy model w którym gwiazda jest jednorodną kulą o promieniu R i masie M oblicz ile wynosi U w tym przypadku. Wnętrze białego karła składa się głównie z atomów takich jak C^{12} , O^{16} , etc., które zawierają równą liczbę protonów, neutronów i elektronów, czyli $M \approx 2Nm_p$, gdzie N jest liczbą elektronów, a m_p jest masą protonu ($m_p \approx m_n$, m_n – masa neutronu). Wzbudzenia termiczne dla zdegenerowanego gazu fermionów mogą zachodzić tylko w pobliżu powierzchni Fermiego, która dla olbrzymiej liczby fermionów jest pomijalna z wnętrzem morza Fermiego. Oznacza to, że możemy przybliżyć zdegenerowany gaz elektronów w białym karle przyjmując, że jego temperatura wynosi zero (mimo iż powierzchnia typowego białego karła ma temperaturę powyżej 25000 K!). Korzystając z tego przybliżenia oblicz K zakładając, że elektrony w tym przypadku są opisywane relacją dyspersji

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e},$$

gdzie m_e to masa elektronu.

- (b) Znajdując minimum energii całkowitej E białego karła znajdź równowagowy promień R_* takiej gwiazdy. Jak zależy uzyskany promień w funkcji masy gwiazdy? Wyraż uzyskany wynik przy pomocy masy Słońca $M_\odot$ i jego promienia $R_\odot$ w postaci

$$\frac{R_*}{R_\odot} = C \times f\left(\frac{M}{M_\odot}\right),$$

gdzie C to jakaś stała liczbowa, a $f(\cdot)$ to pewna funkcja.

- (c) Im większą masę ma gwiazda tym większą muszą mieć energię kinetyczną elektrony w jej wnętrzu, aby zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne. Oznacza to, że dla dostatecznie ciężkich gwiazd elektrony trzeba będzie traktować relatywistycznie, tj.

$$\varepsilon_k = \sqrt{\hbar^2 k^2 c^2 + m_e^2 c^4},$$

gdzie c to prędkość światła. W przypadku ultrarelatywistycznym, tj. $p \gg m_e c$ uwzględniając dwa pierwsze wyrazy w rozwinięciu powyższego pierwiastka w ε_k oblicz energię kinetyczną K ultrarelatywistycznego silnie zdegenerowanego gazu elektronów.

- (d) W przypadku ultrarelativistycznym dla odpowiednio dużych mas gwiazdy M jej kolaps spowodowany ciśnieniem grawitacyjnym nie może zostać zrównoważony przez ciśnienie zdegenerowanego gazu w jej wnętrzu. Znajdź wartość masy krytycznej M_c przy której wygrywa przyciąganie grawitacyjne i wyraż ją przy pomocy masy Słońca $M_\odot$. Wynik ten jest nazywany *granica Chandrasekhara*, przy czym w swojej oryginalnej pracy z 1931 roku Chandrasekhar uwzględnił, że rozkład masy w realistycznej gwiazdzie nie jest jednorodny uzyskując tym samym wynik $M = 1.4M_\odot$. Wynik ten jest niezwykle ważny dla astronomii obserwacyjnej. Mając białego karła w układzie podwójnym z inną masywną gwiazdą następuje transfer masy w kierunku białego karła. Osiągając masę przewidywaną przez Chandrasekhara wybucha on dając początek *supernowej typu Ia* o ściśle określonej jasności (jasność supernowej zależy od masy wybuchającej gwiazdy). Oznacza to, że tego typu supernowa może być wykorzystana jako *świece standardowa* za pomocą której można wyznaczyć odległość do takiego obiektu.