

## Model Isinga

Model przemiany fazowej można uprościć do stanów (spinów)  $\sigma_i = \pm 1$  (przez analogię ze spinem  $s_z = \pm \hbar/2$ ) i zamiast  $U = H, N, V$  i  $\beta, \tilde{\mu} = \mu\beta$  i  $-\Omega\beta = pV\beta$  użyć zmiennych  $H$  i umownej magnetyzacji

$$M = \sum_i \sigma_i$$

Wtedy odpowiednikiem wielkiej sumy statystycznej jest

$$\Xi = \sum_{\{\sigma\}} e^{\tilde{B}M - \beta H}$$

$\tilde{B} = B\beta$  odpowiada umownemu polu zewnętrznemu, a prawdopodobieństwo dane konfiguracji

$$p(\{\sigma\}) = \Xi^{-1} e^{\tilde{B}M - \beta H}$$

i potencjał  $\Omega = -\beta \ln \Xi = U - BM$ .

Przemiana fazowa pierwszego rodzaju oznacza niesięgłość pochodnej potencjału np.  $-\partial p/\partial \beta = U/V$  oraz  $\partial p/\partial \tilde{\mu} = N/V$  (skok energii i gęstości). W modelu Isinga oczekujemy skoku  $M$  czyli średniej magnetyzacji, liczonej jako  $\partial \ln \Xi / \partial \tilde{B}$ . Okazuje się, że niesięgłość wymaga układu nieskończonego i co najmniej 2-wymiarowego.

Jednowymiarowy model Isinga (1925) opisuje łańcuch spinów oddziałujących z sąsiadami

$$H = - \sum_i J \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Sumę statystyczną można znaleźć za pomocą macierzy przejścia (oddziaływań). Biorąc sąsiednie spiny macierz

$$\exp(\beta J \sigma_1 \sigma_2 + \tilde{B}(\sigma_1 + \sigma_2)/2)$$

ma postać

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta J + \tilde{B}} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \tilde{B}} \end{pmatrix}$$

Wtedy dla pierścienia  $N$  spinów

$$\Xi = \text{Tr} T^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

gdzie  $\lambda_{1,2}$  to wartości własne tutaj

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \cosh \tilde{B} \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \tilde{B} + e^{-\beta J}}$$

W granicy  $N \rightarrow \infty$  liczy się tylko większa wartość własna, ale nie zmienia to faktu że jest różniczalna, nie ma skoku pochodnej i przemiany fazowej.

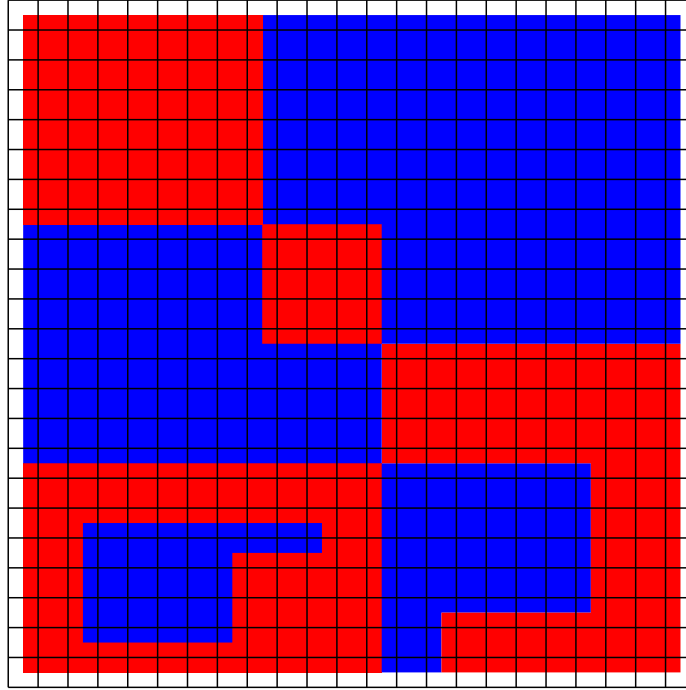
## Dwuwymiarowy model Isinga

Teraz w modelu Isinga rozpatrujemy spiny na sieci prostokątnej oddziałujące jednokierunkowo z najbliższymi sąsiadami. Modelowy hamiltonian ma postać

$$H = - \sum_{ij} \sigma_{jm} (J_x \sigma_{j+1,m} + J_y \sigma_{j,m+1})$$

gdzie  $\sigma_{jm} = \pm 1$ ,  $J_{x,y} > 0$  są stałymi oddziaływania zależnymi od kierunku, (całe zagadnienie definiujemy bezwymiarowo). W sumie statystycznej  $\Xi$  sumujemy po wszystkich kombinacjach  $\sigma$ , przy czym wynik czasem zależy od przyjętych warunków brzegowych (a) swobodnych –  $\sigma = 0$  poza wytyczonym obszarem (b) ustalonych –  $\sigma = +1$  na brzegu wytyczonego obszaru (c) periodycznych  $\sigma_{jm} = \sigma_{j+N_x,m}$ ,  $\sigma_{jm} = \sigma_{j,m+N_y}$  gdzie  $N_{x,y}$  to rozmiary sieci (można ją wyobrazić sobie na torusie) (d) antyperiodycznych  $\sigma_{jm} = \sigma_{j+N_x,m}$ , ale  $\sigma_{jm} = -\sigma_{j,m+N_y}$  co można równoważnie opisać przyjmując warunki periodyczne, ale  $J_y \rightarrow -J_y$  na pomiędzy  $m = 1$  i  $m = N_y$ . Ponadto pytamy o występowanie spontanicznej magnetyzacji w zerowym polu tj. czy  $\langle \sigma \rangle_{B \rightarrow 0} \neq 0$ .

Są dwa kierunki rozwiązywania modelu Isinga. W niskich temperaturach spodziewamy się, że spiny tworzą duże obszary o jednym znaku spinu, rozdzielone "ścianami domenowymi" – pętlami rozgraniczającymi obszary różnych znaków (rysunek).



Wtedy

$$\Xi = \sum e^{\beta N(B+J_x+J_y)} (e^{-2\beta J_x})^{l_x} (e^{-2\beta J_y})^{l_y} (e^{-2\beta B})^A$$

gdzie sumujemy po wszystkich układach domenowych  $l_x$  oznacza liczbę ścian pionowych a  $l_y$  – poziomych natomiast  $A$  liczbę spinów  $+$ . Tu  $N$  jest liczbą wszystkich spinów (dla prostokąta  $N = N_x N_y$ )

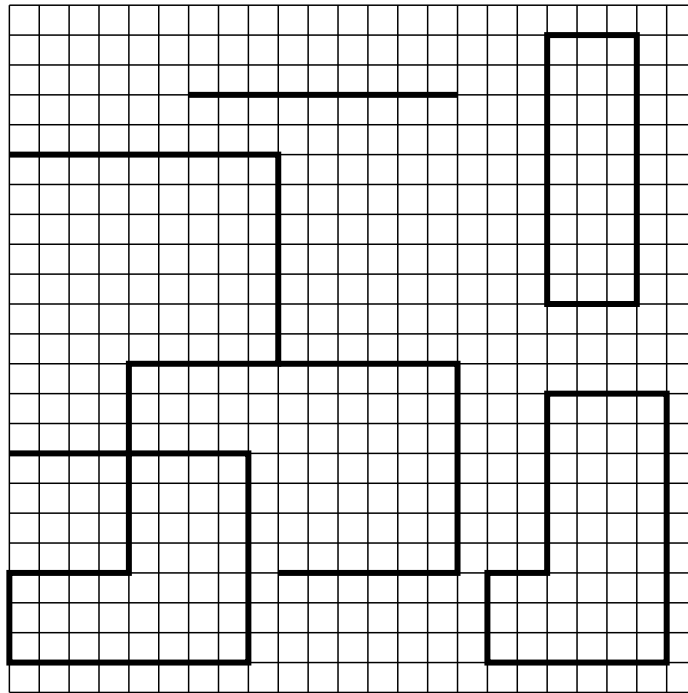
Z kolei w wysokich temperaturach można zapisać,

$$e^{C\tau} = \cosh C(1 + \tau \tanh C)$$

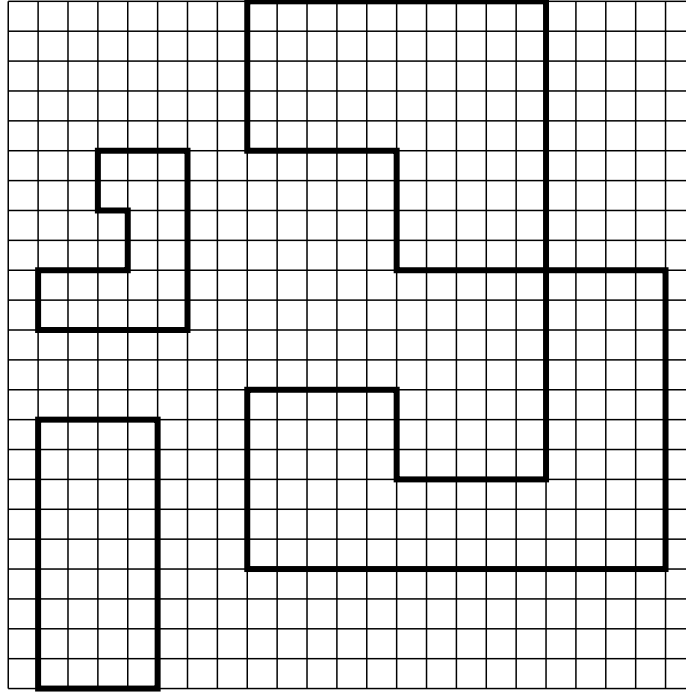
dla  $\tau = \pm 1$ , Wzór ten stosujemy dla  $C = J$  i  $\tau = \sigma\sigma'$  oraz  $C = B$  i  $\tau = \sigma$ . We wzorze na sumę statystyczną pojawiają się iloczyny różnych sigma. Tymczasem suma po wartościach  $\pm$  oznacza że zostają tylko wyrazy gdzie każdy spin występuje *parzyście*, tj. 0, 2 lub 4 razy (w przypadku sieci kwadratowej). Zatem

$$\Xi = (2 \cosh \beta J_x \cosh(\beta J_y \cosh \beta B))^N \sum \tanh^{k_x} \beta J_x \tanh^{k_y} \beta J_y \tanh^m \beta B$$

gdzie sumujemy po grafach (patrz rysunek),  $k_{x,y}$  to liczba krawędzi poziomych i pionowych a  $m$  liczba węzłów nieparzystych (do węzła wchodzi 1 lub 3 krawędzie).



Zauważmy że dla  $B = 0$  oba wzory są podobne do siebie (rysunek poniżej). Widać to szczególnie jeśli zamienimy  $e^{-2\beta J_x} \rightarrow \tanh \beta J_y$  oraz  $e^{-2\beta J_y} \rightarrow \tanh \beta J_x$  lub równoważnie  $\sinh 2\beta J_x \rightarrow 1/\sinh 2\beta J_y$  oraz  $\sinh 2\beta J_y \rightarrow 1/\sinh 2\beta J_x$ . Widać także, że wzory pokrywają się w takiej temperaturze  $\beta$ , że  $\sinh 2\beta J_x \sinh 2\beta J_y = 1$ . Okaze się później, że to jest właśnie warunek na temperaturę krytyczną.



Zanim przejdziemy do ścisłego rozwiązania (tylko dla  $B = 0$ ) przedstawimy ważny *argument Peierlsa* (1936), którym wykażemy przez oszacowanie, że w dostatecznie niskiej temperaturze jest przemiana fazowa – spontaniczna magnetyzacja dla  $B = 0$ , a w dostatecznie wysokiej nie ma. Przyjmijmy dla uproszczenia  $J_x = J_y = J$ , choć argument jakościowo działa ogólnie. Jest on szczególnie ważny, że bez problemu uogólnia się na inne modele, np. trójwymiarowy, dla którego ścisłego rozwiązania nie udało się znaleźć.

Założmy ustalone warunki brzegowe,  $\sigma = +1$ . Wykażemy że w dostatecznie niskiej temperaturze średnia liczba spinów – jest  $< cN$  gdzie  $c$  jest liczbą mniejszą od  $1/2$ . Będzie to dowodzić spontanicznej magnetyzacji. Zgodnie z przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa średnia liczba spinów – jest mniejsza niż

$$\langle N_- \rangle < \frac{\sum (e^{-2\beta J})^l A}{\sum (e^{-2\beta J})^l}$$

gdzie  $l$  jest długością obwodu jednej domeny,  $A$  jej polem a sumujemy po wszystkich możliwych konfiguracjach jednej domeny. Mianownik jest  $> 1$  a licznik oszacujemy następująco. Mamy  $< N$  początków obwodu, maksymalnie 3 kierunki na każdym kroku i dzielimy przez  $l$  początków. Z kolei  $A < l^2/16$ , bo największe pole ma kwadrat. Zatem

$$\langle N_- \rangle < N \sum_l (3e^{-2\beta J})^l l / 16 = 3Ne^{-2\beta J} / 16 (1 - 3e^{-2\beta J})^2$$

Warunkiem zbieżności jest oczywiście  $e^{2\beta J} > 3$ . Czynniki przy  $N$  po prawej stronie oczywiście będzie  $< 1/2$  dla dostatecznie dużego  $\beta = 1/k_B T$ .

W wysokiej temperaturze o braku magnetyzacji świadczy zerowa korelacja

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$$

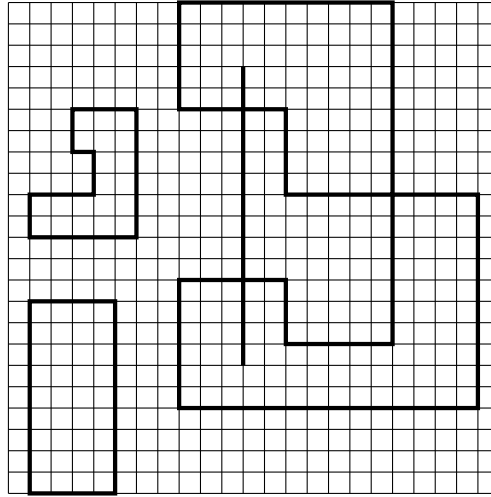
dla dużych wartości  $\beta J$ . Taką korelację można policzyć wykorzystując rozwinięcie wysokotemperaturowe dla  $K = \tanh(\beta J)$  i analizując ścieżki łączące te spiny (rysunek)

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle < \sum K^l$$

gdzie  $l$  jest długością ścieżki a sumujemy po wszystkich takich ścieżkach. Minimalna długość to  $i + j$ . Na każdym kroku mamy 3 wybory kierunku, więc

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{jm} \rangle < \sum_{l=j+m} (3K)^l = (3K)^{j+m} / (1 - 3K)$$

o ile  $3K < 1$  (dla małych  $\beta$ ). Ponieważ  $K < 1$ , wtedy korelacje zanikają wykładniczo z odległością i nie ma magnetyzacji spontanicznej.



Przejdziemy teraz do ścisłego rozwiązania przy  $B = 0$ . Pierwsze ścisłe rozwiązanie podał Onsager w 1944 a wzór na magnetyzację w 1949, który wykazał ściśle Yang w 1952. My posłużymy się metodą Wdowiczenko (1964), zaprezentowaną także w książce L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Pergamon, Oxford, 1980). Model Isinga jest także szczegółowo przeanalizowany w książce B.M. McCoy and T.T. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model* (Harvard University Press, Cambridge, 1973), z której częściowo także tu korzystamy.

Będziemy wykorzystywać rozwinięcie wysokotemperaturowe. Musimy dokładnie obliczyć wkład od każdej konfiguracji do sumy statystycznej. Konfiguracje są określone przez układ grafów na sieci, taki że do każdego węzła wchodzi 0, 2 lub 4 krawędzie grafu. Zastosujemy periodyczne warunki brzegowe (później przydadzą się także antyperiodyczne). Takie grafy można rozpatrywać jako pętle, które w naturalny sposób pojawiają się w strukturze wyznacznika, jako rozbięcie permutacji na cykle. Jednak w wyznaczniku istotny jest kierunek pętli, a u nas nie. Dlatego musimy wziąć tylko "połowę" wyznacznika, a dokładnie pierwiastek. Ponadto w wyznaczniku każda pętla ma jeszcze znak  $-$ , który musimy skomensować. Zrobimy to dokładając  $-$  dla odpowiednich zakrętów, tak aby każda zamknięta pętla bez samoprzecięć miała czynnik  $-$ . Pojawia się jeszcze problem pętli wzdłuż całej sieci, wykorzystujące periodyczność. Trzeba im przypisać  $-$  inaczej  $-$  przez "rozprowadzenie" czynnika  $-1$  po całej sieci. Ostatecznie suma statystyczna ma postać  $(2 \cosh(\beta J_x) \cosh(\beta J_y))^N Z$  gdzie

$$Z = \sum \prod K_{jm}^{a(jm)} L_{jm}^{b(jm)}$$

gdzie  $K_{jm}$  i  $L_{jm}$  to wagi krawędzi od węzła  $jm$  do odpowiednio  $j+1, m$  i  $j, m+1$ . gdzie  $a$  i  $b$  są równe 0 jeśli danej krawędzi nie ma w grafie a 1, jeśli jest. Wtedy

$$2Z = (\det(I - V_{--}))^{1/2} + (\det(I - V_{+-}))^{1/2} + (\det(I - V_{-+}))^{1/2} - (\det(I - V_{++}))^{1/2} \quad (1)$$

Macierze  $V$  mają wymiar  $4N \times 4N$ , operują w przestrzeni wektorowej, której bazę opisujemy krawędziami skierowanymi  $|jm\nu\rangle$ , gdzie  $jm$  jest węzłem od którego skierowana jest krawędź, a  $\nu$  kierunkiem krawędzi  $\rightarrow$  (do  $j+1, m$ ),  $\uparrow$  (do  $j, m+1$ ),  $\leftarrow$  (do  $j-1, m$ ),  $\downarrow$  (do  $j, m-1$ ). Elementy macierzy  $V$  wyrażają się następująco

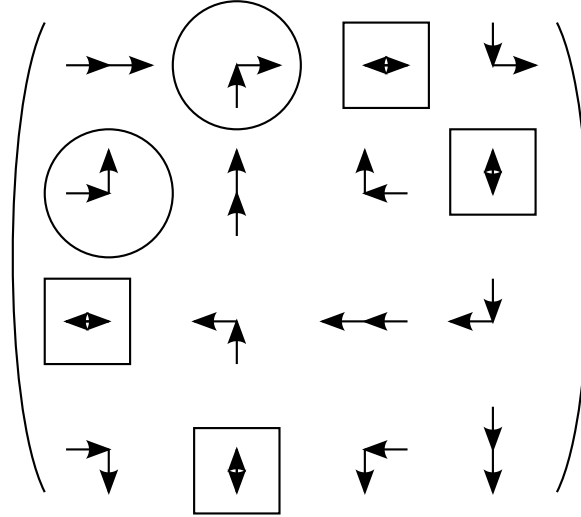
$$V|jm \rightarrow\rangle = K_{jm}(|j+1, m \rightarrow\rangle - |j, m+1, \uparrow\rangle + |j, m-1 \downarrow\rangle)$$

$$V|jm \uparrow\rangle = L_{jm}(-|j+1, m \rightarrow\rangle + |j, m+1, \uparrow\rangle + |j-1, m \downarrow\rangle)$$

$$V|jm \leftarrow\rangle = +K_{j-1, m}^*(|j+1, m \uparrow\rangle + |j-1, m, \leftarrow\rangle + |j, m-1 \downarrow\rangle)$$

$$V|jm \downarrow\rangle = L_{j, m-1}^*(|j+1, m \rightarrow\rangle + |j, m+1, \leftarrow\rangle + |j, m+1 \downarrow\rangle)$$

przy czym  $K_{+, \pm} = K$ ,  $K_{-, \pm} = Ke^{i\pi/N_x}$  oraz  $L_{\pm, +} = L$ ,  $L_{\pm, -} = Le^{i\pi/N_y}$ . Dzięki takim definicjom pętle będą miały prawidłowe znaki przy obejściu całej sieci dookoła. Macierz można zwizualizować na poniższym rysunku, gdzie w kółko są wzięte wyrazy z dodatkowym minusem, w kwadraty zerowe (nie można natychmiast zawracać).



Na sieci ze stałymi  $K = \tanh(\beta J_x)$  i  $L = \tanh(\beta J_y)$  opłaca się użyć bazy Fouriera

$$|pq\rangle = \sum_{jm} e^{ijp+imq} |jm\rangle$$

ponieważ wtedy macierz robi się blokowa i

$$V_{p,q} = \begin{pmatrix} Ke^{-ip} & -Le^{-iq} & 0 & Le^{iq} \\ -Ke^{-ip} & Le^{-iq} & Ke^{ip} & 0 \\ 0 & Le^{-iq} & Ke^{ip} & Le^{iq} \\ Ke^{-ip} & 0 & Ke^{ip} & Le^{iq} \end{pmatrix}$$

przy czym  $p_{+,\pm} = 2\pi r/N_x$ ,  $p_{-,\pm} = 2\pi(r + 1/2)/N_x$ ,  $q_{\pm,+} = 2\pi s/N_y$ ,  $q_{\pm,-} = 2\pi(s + 1/2)/N_y$  a  $r \in \{1, \dots, N_x\}$  i  $s \in \{1, \dots, N_y\}$ . Dla dużych oznaczmy  $Q_{pq} = \ln \det(1 - V_{pq})$ . Chcemy liczyć  $Q = \sum_{pq} Q_{pq}$  dla dużych  $N_x$  i  $N_y$  (w granicy termodynamicznej). Oznaczmy także szereg Fouriera

$$P(kl) = \int_0^{2\pi} dp dq Q_{pq} e^{ipk+iql}$$

Dla dużych  $N_x$  i  $N_y$  mamy

$$Q_{\xi\eta}(2\pi)^2/(N_x N_y) = P(00) + \xi P(N_x, 0) + \xi P(-N_x, 0) + \eta P(0, N_y) + \eta P(0, -N_y) + \dots$$

dla  $\xi, \eta = \pm$ . Jak się później okaże tak naprawdę dominujący jest pierwszy wyraz, następne błyskawicznie maleją, ale będą nam jeszcze potrzebne do obliczenia napięcia powierzchniowego (reszta ma postać  $\pm P(aN_x, bN_y)$  gdzie  $a$  i  $b$  są całkowite. Mamy

$$\det(I - V_{pq}) = (1 + K^2)(1 + L^2) - 2K(1 - L^2) \cos p - 2L(1 - K^2) \cos q$$

Obliczymy najpierw  $P(00)$  Dokonując zamiany zmiennych  $p = \Omega + \omega$ ,  $q = \Omega - \omega$  z granicami  $\Omega \in [0, 2\pi]$  i  $\omega \in [-2\pi, 2\pi]$  Wtedy

$$2P(00) = \int_0^{2\pi} d\Omega \int_{-2\pi}^{2\pi} d\omega \ln[(1 + K^2)(1 + L^2)$$

$$-2(K(1 - L^2) + L(1 - K^2)) \cos \Omega \cos \omega + 2(K(1 - L^2) - L(1 - K^2)) \sin \Omega \cos \sin \omega]$$

Przez odpowiednie przesunięcie  $\omega \rightarrow \omega + \alpha$  dla każdego  $\Omega$ , można tę całkę sprowadzić do

$$P(00) = \int_0^{2\pi} d\Omega \int_0^{2\pi} d\omega \ln \left[ (1 + K^2)(1 + L^2) \right.$$

$$\left. -2\sqrt{(K(1 - L^2) + L(1 - K^2))^2 \cos^2 \Omega + (K(1 - L^2) - L(1 - K^2))^2 \sin^2 \Omega \cos \omega} \right]$$

Wykorzystamy wzór

$$\int_0^{2\pi} d\phi \ln(A - B \cos \phi) = 2\pi(\ln(A + \sqrt{A^2 - B^2}) - \ln 2)$$

Wtedy

$$P(00) + (2\pi)^2 \ln 2 = 2\pi \int_0^{2\pi} d\Omega \ln \left[ (1 + K^2)(1 + L^2) \right. \\ \left. + \sqrt{(1 - K^2)^2(1 - L^2)^2 + 16K^2L^2 - 8KL(1 - L^2)(1 - K^2) \cos 2\Omega} \right]$$

Oznaczmy  $\kappa = [\sinh(2\beta J_x) \sinh(2\beta J_y)]^{-1} = (1 - K^2)(1 - L^2)/4KL$ . Daje to

$$P(00) = -(2\pi)^2 \ln 2 - 2(2\pi)^2 \ln(\cosh(\beta J_x) \cosh \beta J_y)$$

$$2\pi \int_0^{2\pi} d\phi \ln(\cosh(2\beta J_x) \cosh(2\beta J_y) + \kappa^{-1} \sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos 2\phi})$$

i ostatecznie w granicy termodynamicznej

$$\beta\Omega/N = -(\ln 2)/2 - \int_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \ln(\cosh(2\beta J_x) \cosh(2\beta J_y) + \kappa^{-1} \sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos 2\phi})$$

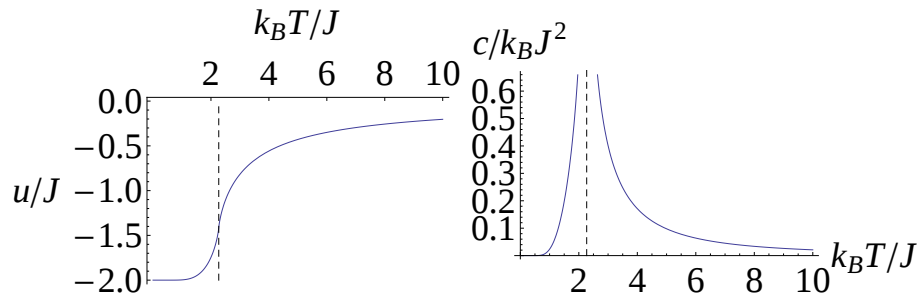
Widać nieanalityczność wzoru dla  $\kappa = 1$  a więc to jest punkt krytyczny. W przypadku izotropowym  $J_x = J_y = J$  energia na spin wynosi

$$u = U/N = -J \coth(2\beta J) [1 + 2(2 \tanh^2(2\beta J) - 1) K(2\sqrt{\kappa}/(1 + \kappa))/\pi]$$

gdzie

$$K(a) = \int_0^{\pi/2} d\phi (1 - a^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}$$

jest całką eliptyczną (Uwaga: Wolfram Mathematica definiuje  $K$  bez kwadratu przy  $a$ !). Poniżej wykresy energii  $u(T)$  i ciepła właściwego  $c = u'(T)$  dla tego przypadku, które rozbiega logarytmicznie w punkcie krytycznym  $T_K = 2J/k_B \ln(1 + \sqrt{2})$ .



Wróćmy do dyskusji  $P(0, \pm N_y)$  i  $P(\pm N_x, 0)$ , niech  $Z = Z_\infty Z'$  gdzie  $Z_\infty$  jest wkładem, który do tej pory obliczyliśmy. Ze wzoru

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm iN\phi} \ln(A - B \cos \phi) = 2\pi((A + \sqrt{A^2 - B^2})/B)^{-N}/N$$

Dostajemy

$$P(0, \pm N_y) = -(2\pi/N_y) \int_0^\phi d\phi f^{-N_y}(\phi), \quad P(\pm N_x, 0) = -(2\pi/N_x) \int_0^\phi d\phi g^{-N_x}(\phi)$$

gdzie

$$\begin{aligned} 2L(1 - K^2)f(\phi) &= (1 + K^2)(1 + L^2) - 2K(1 - L^2) \cos \phi \\ &+ \sqrt{[(1 + K^2)(1 + L^2) - 2K(1 - L^2) \cos \phi]^2 - 4L^2(1 - K^2)^2} \\ 2K(1 - L^2)f(\phi) &= (1 + K^2)(1 + L^2) - 2L(1 - K^2) \cos \phi \\ &+ \sqrt{[(1 + K^2)(1 + L^2) - 2L(1 - K^2) \cos \phi]^2 - 4K^2(1 - L^2)^2} \end{aligned}$$

Zauważmy że  $f, g > 1$  poza punktem krytycznym, a więc całki będą szybko maleć. Jeśli  $N_x \sim N_y$  to wkłady  $P(0, N_y)$  i  $P(N_x, 0)$  maleją bardzo szybko do zera a więc są nieistotne. Sytuacja się

trochę zmienia, kiedy  $N_x \sim \ln N_y$ . Wtedy wkład  $P(N_x, 0)$  maleje ale w sumie statystycznej jest mnożony przez  $N_x$  więc pozostaje istotny. Ponieważ  $P(N_x, 0)$  jest ujemne, więc

$$Z' \simeq \exp(-N_x N_y P(N_x, 0)/(2\pi)^2)$$

Nadal zatem wkład zanika w granicy termodynamicznej ( $\ln Z' \sim N_y g^{-N_x}$ ).

Rozważymy jednak jeszcze inną sytuację – antyperiodyczne warunki brzegowe w kierunku  $x$ . Odpowiada to wymuszeniu istnienia lini rozdziału faz poniżej temperatury krytycznej. Powinna ona dać wkład do napięcia powierzchniowego (dokładniej liniowego tutaj). Nie możemy jednak zamienić  $K \rightarrow -K$  na szczytu brzegów, bo zrukuje to jednorodność macierzy. Okazuje się, że równoważnie można zastąpić  $K \rightarrow K e^{i\pi/N_x}$ . To jednak oznacza zamianę  $\xi \rightarrow -\xi$  w  $Z'$ ,

$$2Z' = e^{a-b} + e^{a+b} + e^{-a-b} - e^{-a+b}$$

gdzie

$$a = N_x N_y P(N_x, 0)/(2\pi)^2, \quad b = N_x N_y P(0, N_y)/(2\pi)^2$$

Dominujący jest teraz wyraz  $e^a$  bo dwa ostatnie się odejmują (różnica jest dużo mniejsza niż suma pierwszych dwóch), czyli

$$Z' \simeq \exp(N_x N_y P(N_x, 0)/(2\pi)^2)$$

a więc podobnie jak poprzednio nie ma to znaczenia w granicy termodynamicznej. Wydawałoby się, że na tym koniec, ale ... przeoczyliśmy ważny szczegół. Wzór (1) jest słuszny dla *małych*  $V$  (czyli małych  $K$  i  $L$ ). Użycie go dla dużych  $V$  wymaga przedłużania analitycznego. Ma to znaczenie tylko w jednym wyrazie, kiedy  $p = q = 0$  bo wtedy  $\det(I - V_{00}) = (1 - KL - K - L)^2$ . We wzorze (1) mamy pierwiastek. W obliczeniach milczaco przyjmowaliśmy dodatni czyli  $|1 - KL - K - L|$ . Jednak w temperaturze krytycznej jest to 0, a więc powinniśmy wziąć  $(1 - KL - K - L)$  dla zachowania analityczności. Musimy wtedy zmienić znak przy wyrażeniu  $e^{a+b}$  (i tylko tym) poniżej temperatury krytycznej i wtedy

$$2Z' = e^{a-b} - e^{a+b} + e^{-a-b} - e^{-a+b} = (e^a + e^{-a})(e^{-b} - e^b)$$

Dominujący jest wyraz  $e^{-a}$  ( $a$  jest ujemne) a  $b \ll 1$  więc

$$Z' \simeq -b e^{-a}$$

bo  $b$  jest małe. Tym razem paradoksalnie ważny staje się wkład  $b$  czyli

$$\ln Z' \simeq \ln \int_0^{2\pi} d\phi f^{-N_y}(\phi)$$

Dla dużych  $N_y$  dominuje wkład od minimum  $f$  które jest dla  $\phi = 0$  czyli

$$f_{min} = L(1 + K)/(1 - K) = \tanh(\beta J_y) e^{2\beta J_x}$$

Stąd mamy dodatkowy wkład do potencjału

$$\Omega'/N_y = 2J_x + k_B T \ln \tanh(J_y/k_B T)$$

Można to interpretować jako napięcie powierzchniowe (liniowe), które w  $T = 0$  jest równe  $2J_x$  (co nie dziwi) a w temperaturze krytycznej znika (też nie dziwi). Jest pośredni dowód występowania przemiany fazowej poniżej temperatury krytycznej, bo napięcie pojawia się tylko między różnymi fazami.

Bezpośrednią identyfikacją fazy jest spontaniczna magnetyzacja. Znajdziemy ją badając długozasięgowe korelacje, bo

$$M^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sigma_{00} \sigma_{m0} \rangle$$

Napierw obliczymy tę granicę, a potem uzasadnimy czemu to wystarcza. W takiej korelacji możemy skorzystać z faktu

$$\begin{aligned} \sigma_{00}(1 + K\sigma_{00}\sigma_{10}) \cdots (1 + K\sigma_{m-1,0}\sigma_{m0})\sigma_{m0} &= K^m(1 + K^{-1}\sigma_{00}\sigma_{10}) \cdots (1 + K^{-1}\sigma_{m-1,0}\sigma_{m0}) \\ &= K^m(1 + (K + K')\sigma_{00}\sigma_{10}) \cdots (1 + (K + K')\sigma_{m-1,0}\sigma_{m0}) \end{aligned}$$

gdzie  $K' = K^{-1} - K$ . Mamy zatem  $V \rightarrow V + K'A$  gdzie elementy macierzy  $A$  są równe 1 dla krawędzi między 00 i  $m0$  oraz 0 w przeciwnym razie. Dlatego

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{m0} \rangle = K^m \frac{\sqrt{\det(I - V - K'A)}}{\sqrt{\det(I - V)}} = K^m \sqrt{\det(I - (1 - V)^{-1}A)}$$

Tymczasem

$$\langle jl | (1 - V)^{-1} | j'l' \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{dp dq}{(2\pi)^2} e^{i(j-j')p + i(l-l')q} (1 - V_{pq})^{-1}$$

gdzie

$$(I - V_{pq})^{-1} \det(I - V_{pq}) = \begin{pmatrix} 1 + L^2 - 2L \cos q - K e^{ip}(1 - L^2) & L(L - e^{-iq} + e^{ip}K(e^{-iq} + L)) & 2iKLe^{ip} \sin q & L(e^{iq} - L - K e^{ip}(e^{iq} + L)) \\ K(K - e^{-ip} + L e^{iq}(e^{-ip} + K)) & 1 + K^2 - 2K \cos p - L e^{iq}(1 - K^2) & K(e^{ip} - K - L e^{iq}(e^{ip} + K)) & 2iKLe^{iq} \sin p \\ 2iKLe^{-ip} \sin q & L(e^{-iq} - L - K e^{-ip}(e^{-iq} + L)) & 1 + L^2 - 2L \cos q - K e^{-ip}(1 - L^2) & L(e^{iq} - L - K e^{-ip}(e^{iq} + L)) \\ K(e^{-ip} - K - L e^{-iq}(e^{-ip} + K)) & 2iKLe^{-iq} \sin p & K(e^{ip} - K - L e^{-iq}(e^{ip} + K)) & (1 + K^2 - 2K \cos p - L e^{-iq}(1 - K^2)) \end{pmatrix}$$

Macierz  $A$  działa tylko na  $|j0 \rightarrow\rangle$  dla  $j = 0, \dots, m-1$  oraz  $|j0 \leftarrow\rangle$  dla  $j = 1, \dots, m$ , a więc możemy ograniczyć się do przestrzeni rozpiętej na tych wektorach (w pozostałej części  $(1 - V)^{-1}A$  jest ściśle trójkątna, więc nie wpływa to na wartość wyznacznika). Stąd także możemy ograniczyć się do  $l = l' = 0$  oraz 1. i 3. wiersza macierzy  $(I - V_{pq})^{-1}$ . Co więcej, okazuje się że nie ma elementów łączących wektory  $|\rightarrow\rangle$  z  $|\leftarrow\rangle$ , ponieważ

$$\begin{aligned} \langle j0 \leftarrow | (1 - V)^{-1} A | j'0 \rightarrow \rangle &\sim \int \frac{dq}{\det(I - V_{pq})} \times \\ &(2iK e^{-ip} \sin q - e^{-iq} + L + K(e^{-iq} + L) + e^{iq} - L - K e^{-ip}(e^{iq} + L)) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle j0 \rightarrow | (1 - V)^{-1} A | j'0 \leftarrow \rangle &\sim \int \frac{dq}{\det(I - V_{pq})} \times \\ &(L - e^{-iq} + K e^{ip}(e^{-iq} + L) + 2iK e^{ip} \sin q + e^{iq} - L - K e^{ip}(e^{iq} + L)) \end{aligned}$$

W obu przypadkach w nawiasie pozostaje czynnik  $\sin q$  który daje zero po scałkowaniu na mocy antysymetrii  $q \rightarrow -q$  ( $\det(I - V_{pq})$  jest symetryczne).

Pozostaje do policzenia

$$\begin{aligned} \langle j0 \rightarrow | (1-V)^{-1} A | j'0 \rightarrow \rangle &= \int \frac{dqdp}{(2\pi)^2 \det(I - V_{pq})} e^{i(j-j'-1)p} \times \\ (1 + L^2 - 2L \cos q - K e^{ip}(1 - L^2) - L^2 + L e^{-iq} - L K e^{ip}(e^{-iq} + L) + L e^{iq} - L^2 - K L e^{ip}(e^{iq} + L) \\ &= \int \frac{dqdp}{(2\pi)^2 \det(I - V_{pq})} e^{i(j-j')p} ((1 - L^2) e^{-ip} - K(1 + 2L \cos q + L^2)) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle j0 \leftarrow | (1-V)^{-1} A | j'0 \leftarrow \rangle &= \int \frac{dqdp}{(2\pi)^2 \det(I - V_{pq})} e^{i(j-j'+1)p} \times \\ (1 + L^2 - 2L \cos q - K e^{-ip}(1 - L^2) - L^2 + L e^{-iq} - L K e^{-ip}(e^{-iq} + L) + L e^{iq} - L^2 - K L e^{-ip}(e^{iq} + L) \\ &= \int \frac{dqdp}{(2\pi)^2 \det(I - V_{pq})} e^{i(j-j')p} ((1 - L^2) e^{ip} - K(1 + 2L \cos q + L^2)) \end{aligned}$$

Wykorzystamy wzór

$$\int_0^{2\pi} d\phi (A - B \cos \phi)^{-1} = 2\pi (A^2 - B^2)^{-1/2}$$

i wprowadzimy oznaczenie

$$w_{\pm} = 1 \pm L - K e^{ip}(1 \mp L)$$

Wtedy np.  $A^2 - B^2 = |w_+ w_-|^2$  Ostatecznie

$$\langle j0 \rightarrow | 1 - (1 - V)^{-1} K' A | j'0 \rightarrow \rangle = - \int_0^{2\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{w_+ w_- e^{i(j-j'-1)p}}{|w_+ w_-|}$$

i podobnie

$$\langle j0 \leftarrow | 1 - (1 - V)^{-1} K' A | j'0 \leftarrow \rangle = - \int_0^{2\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{w_+^* w_-^* e^{i(j-j'+1)p}}{|w_+ w_-|^2}$$

W dalszej analizie rozparzymy dwa przypadki, poniżej i powyżej temperatury krytycznej. Zwróćmy uwagę że poniżej krytycznej  $w_- = -e^{ip}K(1 + L)(1 - e^{-ip}(1 - L)/K(1 + L))$  i  $(1 - L)/K(1 + L) < 1$  czyli możemy napisać

$$\begin{aligned} K \langle j0 \rightarrow | 1 - (1 - V)^{-1} K' A | j'0 \rightarrow \rangle &= C(j - j') = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{2\pi} e^{i(j-j')p} \times \\ &\left( \frac{(1 - e^{ip}K(1 - L)/(1 + L))(1 - e^{-ip}(1 - L)/K(1 + L))}{(1 - e^{-ip}K(1 - L)/(1 + L))(1 - e^{ip}(1 - L)/K(1 + L))} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Wyznaczniki macierzy o elementach

$$C(j - j') = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{(2\pi)} e^{ip(j-j')} f(p)$$

to tzw. wyznacznik Toeplitza. O jego zachowaniu dla dużych wymiarów  $m$  mówi (silne) twierdzenie Szego (dowód na końcu)

$$\det C \rightarrow \exp m \tilde{f}(0) \quad \exp \sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{f}(k) \tilde{f}(-k)$$

gdzie

$$\tilde{f}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{2\pi} e^{ipk} \ln f(p)$$

U nas

$$2 \ln f(p) = \ln(1 - ae^{ip}) + \ln(1 - be^{-ip}) - \ln(1 - ae^{-ip}) - \ln(1 - be^{ip})$$

dla  $a = K(1 - L)/(1 + L)$  i  $b = (1 - L)/K(1 + L)$ . Korzystając z faktu, że

$$\int_0^{2\pi} dp \ln(1 - Ae^{ip}) = 0$$

znika pierwszy czynnik w twierdzeniu Szego. Zostaje zatem

$$M^2 = \exp \sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{f}(k) \tilde{f}(-k).$$

Korzystając z rozwinięcia

$$-\ln(1 - z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l / l$$

mamy

$$\tilde{f}(\pm k) = \pm(a^k - b^k)/2k$$

a stąd

$$\begin{aligned} M^2 &= \exp \sum_{k=1}^{\infty} (2(ab)^k - a^{2k} - b^{2k})/4k = \exp \ln((1 - a^2)(1 - b^2)/4(1 - ab)^2) \\ &= \left( \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{(1 - ab)^2} \right)^{1/4} = (1 - \kappa^2)^{1/4} \end{aligned}$$

(oczywiście dla  $\kappa < 1$ ) a więc  $M = \pm(1 - \kappa^2)^{1/8}$ . Stąd też wykładnik krytyczny  $\beta = 1/8$ .

Dla temperatur powyżej krytycznej musimy skorzystać z dodatku do twierdzenia Szego. Niech  $\langle \sigma_{00} \sigma_{N0} \rangle = M_N^2$ . Jeśli pominiemy czynnik  $e^{-ip}$  w definicji  $C$  możemy wykorzystać zwykłe twierdzenia Szego i wtedy

$$M_N^2 = x_N \det C$$

gdzie  $x_N$  jest rozwiązaniem równania  $C|x\rangle = |0\rangle$ . Rozkładając  $C$  na

$$C_+(z) = [(1 - az)(1 - b^{-1}z)]^{1/2}, \quad C_-(z^{-1}) = [(1 - az^{-1})(1 - b^{-1}z^{-1})]^{1/2}$$

i  $\hat{C}_{\pm} = C_{\pm}(\hat{P}_{\pm})$  znajdujemy w pierwszym przybliżeniu  $|x\rangle = \hat{C}_+^{-1}|0\rangle$ . Ogólne zachowanie  $x_N$  znajdujemy z rozwinięcia

$$\sum_N x_N z^N = [(1 - az)(1 - b^{-1}z)]^{-1/2}$$

Z drugiej strony

$$(1 - z)^{-1/2} = \sum_k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} z^k$$

a więc

$$x_N = \sum_k \frac{(2k)!(2(N-k))!}{4^N(N-k)!^2(2k!)^2} a^k b^{k-N}$$

Dla dużych  $N-k$  i  $2(N-k)$  można wykorzystać wzór Stirlinga  $N! \simeq \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$  Wtedy

$$x_N \simeq b^{-N}(\pi N)^{-1/2} \sum_k \frac{(2k)!}{4^k(N-k)!^2(2k!)^2} (ab)^k = b^{-N}(\pi N)^{-1/2} (1-ab)^{-1/2}$$

Kluczowe jest zachowanie  $b^{-N}/N$  a więc korelacje maleją wykładniczo, jednak pozostałe czynniki są niedokładne.

Aby znaleźć dokładniejsze zachowanie  $x_N$  zauważmy, że w naszym rozwiązaniu nie powinno być  $x_k$  dla  $k > N$ . Pamiętajmy, że  $\hat{C} = \hat{C}_+ \hat{C}_-$ , ale obcinamy macierz do  $N+1$  wymiarów. Niech  $|x\rangle = |x_{\leq}\rangle + |x_{>}\rangle$ , gdzie  $|x_{\leq}\rangle$  jest rzutem na bazę  $|0\rangle, \dots, |N\rangle$  a  $|x_{>}\rangle$  dopełnieniem. Niech  $|y\rangle = \hat{C}_+ \hat{C}_- |x_{>}\rangle$ . Jest to wektor zlokalizowany niedaleko  $|N\rangle$ . Nas interesuje tylko jego rzut na bazę do  $|N\rangle$  czyli  $|y_{\leq}\rangle$  (dlatego też kolejność  $C_+ C_-$  a nie  $C_- C_+$ ). Niech  $\hat{C}_+^{-1} |y_{\leq}\rangle = |q\rangle$  Poprawka do  $x_N$  to

$$\delta x_N = \langle N | \hat{C}_-^{-1} | q_{\leq} \rangle = \langle N | q_{\leq} \rangle = \langle N | q \rangle$$

bo  $\hat{C}_-$  przesuwa wektory do mniejszych a na przekątnej ma 1. Z kolei

$$\langle N | q \rangle = \langle N | \hat{C}_+^{-1} | y_{\leq} \rangle = \langle N | \hat{C}_+^{-1} | y \rangle$$

bo  $\hat{C}_+$  przesuwa do większych (na przekątnej 1). Dalej

$$\langle N | \hat{C}_+^{-1} | y \rangle = \langle N | \hat{C}_+^{-1} \hat{C}_+ \hat{C}_- | x_{>} \rangle = \langle N | \hat{C}_- | x_{>} \rangle$$

Zatem

$$x_N + \delta x_N = \langle N | \hat{C}_+^{-1} | 0 \rangle + \langle N | \hat{C}_- | x_{>} \rangle$$

Z drugiej strony

$$\langle N | \hat{C}_- \hat{C}_+^{-1} | 0 \rangle = \langle N | \hat{C}_- | x_{\leq} \rangle + \langle N | \hat{C}_- | x_{>} \rangle = \langle N | x_{\leq} \rangle + \langle N | \hat{C}_- | x_{>} \rangle$$

także wykorzystując, że  $\hat{C}_-$  zmniejsza indeks. Stąd

$$x_N + \delta x_N = \langle N | \hat{C}_- \hat{C}_+^{-1} | 0 \rangle$$

Z rozwinięcia

$$C_- = \sum_k \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} (a^k z^{-k}) \sum_l \frac{(2l)!}{4^l(l!)^2} (b^{-l} z^{-l})$$

oraz  $C_+$  w pobliżu  $z^N$

$$C_+^{-1} \simeq b^{-q}(\pi N)^{-1/2} (1-ab)^{-1/2} z^q$$

mamy, biorąc  $q = N + k + l$ ,

$$C_- C_+^{-1} \simeq b^{-N}(\pi N)^{-1/2} (1-ab)^{-1/2} \sum_k \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} ((a/b)^k z^{-k}) \sum_l \frac{(2l)!}{4^l(l!)^2} (b^{-2l} z^{-l})$$

Czyli

$$x_N + \delta x_N \rightarrow b^{-N}(\pi N)^{-1/2}(1-ab)^{-1/2}[(1-a/b)(1-b^{-2})]^{-1/2}$$

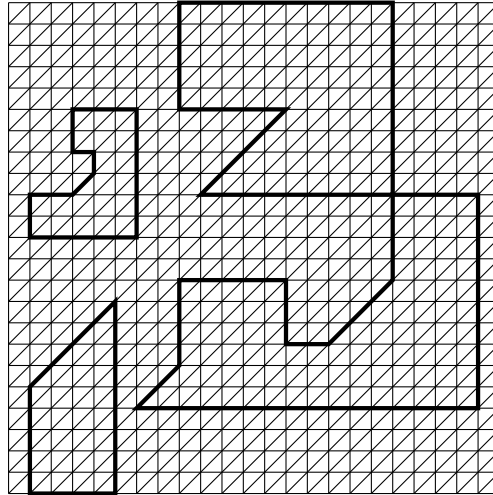
Z drugiej strony z twierdzenia Szego

$$\det C \rightarrow [(1-a^2)(1-b^{-2})(1-a/b)^2]^{1/4}$$

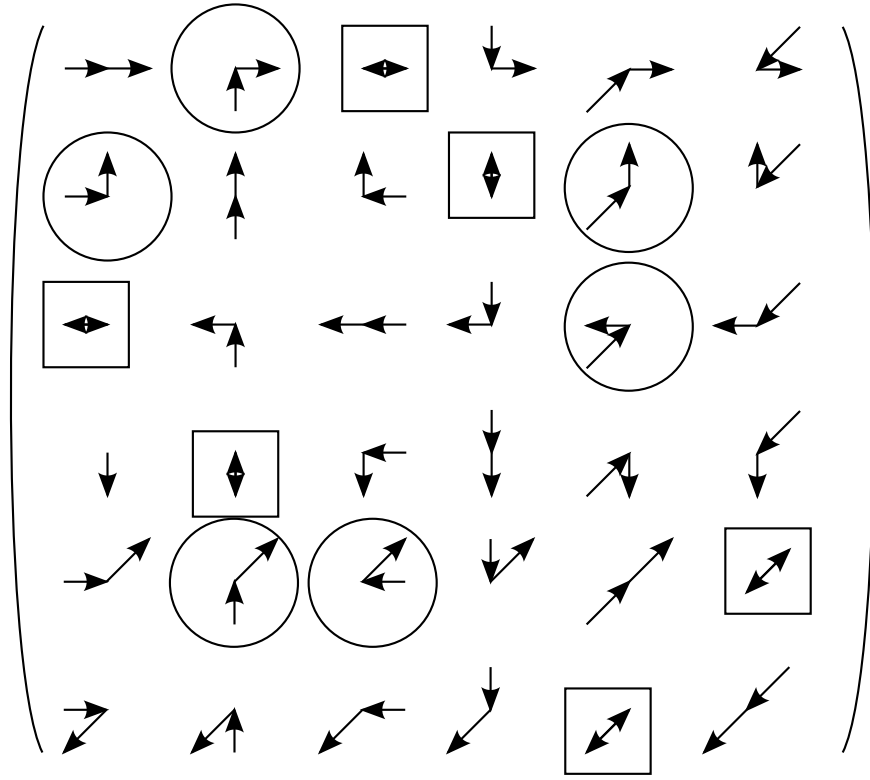
czyli ostatecznie

$$M_N^2 \rightarrow b^{-N}(\pi N)^{-1/2}(1-ab)^{-1/2}[(1-a)/(1-b^{-2})]^{1/4}$$

Podobnie można wyznaczyć korelacje  $\langle \sigma_{00} \sigma_{NN} \rangle$ , jednak wygodniej jest pomocniczo prowadzić krawędzie ukośne, którym przypiszemy wagę  $R$ , jak na rysunku



Wtedy macierz  $V$  powiększa się o wektory ukośne  $\nearrow$  i  $\swarrow$ . Podobnie jak poprzednio trzeba opisać zakręty, co symbolicznie oznaczamy



Dalsza analiza jest analogiczna to sieci kwadratowej, jednak zapis jest na tyle uciążliwy, że lepiej wykorzystać programy do obliczeń symbolicznych (np. Mathematica). Po drodze trzeba zmienić wagi wzdłuż przekątnej dla korelacji, zauważyć, że wystarczy ograniczyć macierz do wektorów ukośnych, i tworzą się dwa sprzężone bloki, niezależne dla  $\nearrow$  i  $\swarrow$  (bez elementów łączących je), a na koniec przejść z  $R \rightarrow 0$ . Wynikiem jest znów wyznacznik Toeplitza z funkcją

$$C(z) = \frac{1 - \kappa z}{\sqrt{(1 - \kappa z)(1 - \kappa z^{-1})}}$$

Poniżej temperatury krytycznej otrzymujemy korelacje jak wcześniej, a powyżej krytycznej

$$M_N^2 \rightarrow \kappa^{-N} (\pi N)^{-1/2} / (1 - \kappa^{-2})^{1/4}$$

Natomiast dokładnie w temperaturze krytycznej  $C_{nm} = (\pi(n - m + 1/2))^{-1}$  Dla takiej macierz można wykorzystać proste twierdzenie, że jeśli  $C_{nm} = (x_n + y_m)^{-1}$  to

$$\det C = \frac{\prod_{n>m} (x_n - x_m)(y_n - y_m)}{\prod_{nm} (x_n + y_m)}$$

W naszym przypadku

$$\det C = (2/\pi)^N \prod_{k=1}^{N-1} (1 - (2k)^{-2})^{k-N}$$

Korzystając z tożsamości

$$\sin z/z = \prod_{n \geq 1} (1 - (z/n\pi)^2)$$

(dowód np. przez porównanie miejsc zerowych, holomorficzność na płaszczyźnie zespolonej i twierdzenie Weierstrassa o faktoryzacji lub formułę sumacyjną Poissona ). Zatem

$$\ln \det C = \sum_{k=1}^{N-1} k \ln(1 - (2k)^{-2}) + N \sum_{k=N}^{\infty} \ln(1 - (2k)^{-2})$$

Ostatni wyraz asymptotycznie dąży do  $-1/4$ , natomiast pierwszy ma wiodący wkład  $-(1/4) \ln N$ . Czynniki mnożący jest skończony. Ostatecznie

$$\det C \rightarrow N^{-1/4} 2^{1/12} e^{1/4} / A^3 \simeq 0,645 N^{-1/4}$$

gdzie  $A$  jest tzw. stałą Glaishera-Kinkelina  $A \simeq 1,282$ , zdefiniowaną jako

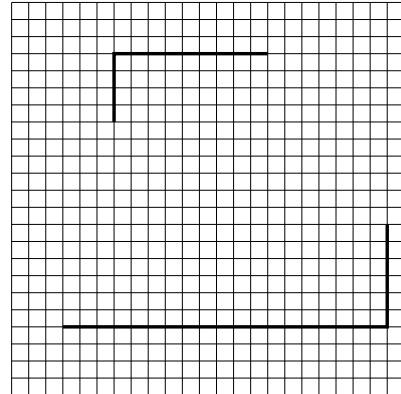
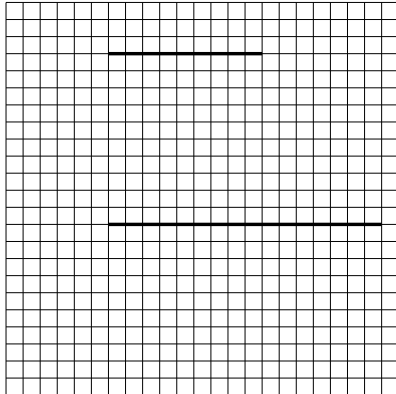
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2/4} n^{-n^2/2 - n/2 - 1/12} \prod_{k=1}^n k^k$$

(stała ta jest często wiązana z pochodną funkcji zeta Riemanna:  $\ln A = 1/12 - \zeta'(-1)$ )

To nie wszystko. Aby upewnić się o skończonej magnetyzacji (lub jej braku) powinniśmy pokazać, że

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{N_x N_y} \rangle \rightarrow M^2, \langle \sigma_{00} \sigma_{N_x N_y} \sigma_{D_x D_y} \sigma_{G_x G_y} \rangle \rightarrow M^4$$

Można to zrobić powołując się na asymptotyczną faktoryzację wyznacznika, w którym tworzymy oddalone ciągi zmienionych wag (tak jak robiliśmy to obliczając  $\langle \sigma_{00} \sigma_{N_0} \rangle$  i  $\langle \sigma_{00} \sigma_{N_N} \rangle$ ) tak jak na poniższych rysunkach



Pełną analizę można przeczytać w książce B.M. McCoy and T.T. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model* (Harvard University Press, Cambridge, 1973), a w skrócie na stronie [http://www.scholarpedia.org/article/Ising\\_model:\\_exact\\_results](http://www.scholarpedia.org/article/Ising_model:_exact_results)

### Twierdzenie Szego

Macierz  $N \times N$   $\hat{C}$  ma elementy  $C_{jl}$

$$C_{jl} = C(j-l) = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{(2\pi)} e^{ip(j-l)} f(p)$$

Jej wyznacznik to tzw. wyznacznik Toeplitza. Twierdzenie Szego mówi że dla  $n \rightarrow \infty$

$$\det C \rightarrow \exp m \tilde{f}(0) \exp \sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{f}(k) \tilde{f}(-k)$$

gdzie

$$\tilde{f}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{2\pi} e^{ipk} \ln f(p)$$

o ile  $f$  istnieje i jest zbieżna. Twierdzenie i dowód przedstawił pierwszy G. Szego, Comm. Sem. Math. de L'Univ. Lund, T. Supp. D. M. Riesz, 228 (1952). My posłużymy się skróconą wersją dowodu B.N. Valuev, Teor. i Mat. Fiz. 55, 475 (1983).

Macierz  $\hat{C}$  można rozparywać jako nieskończenie wymiarową. Załóżmy, że

$$\ln f(p) = L_0 + L_+ + L_-$$

gdzie  $L_0 = \tilde{f}(0)$  oraz

$$L_+ = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-ipk}, \quad L_- = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(-k) e^{ipk}$$

Wprowadzimy także macierze przesunięcia  $\hat{P}_{\pm}$  takie że  $P_{\pm jl} = \delta_{j \pm 1 - l}$  czyli  $\hat{P}$  przesuwają index w górę, a  $\hat{P}_-$  w dół. Wtedy także

$$\hat{C} = \exp L_0 \exp \hat{L}_- \exp \hat{L}_+$$

gdzie

$$\hat{L}_+ = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(k) \hat{P}_+^k, \quad \hat{L}_- = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(-k) \hat{P}_-^k$$

Macierz  $\hat{L}_+$  jest dolnotrójkątna, a  $\hat{L}_-$  górnortrójkątna. Jak łatwo sprawdzić przy obcięciu do  $N$  wymiarów mamy

$$\det_N \hat{A} \hat{B} = \det_N \hat{A} \det_N \hat{B}$$

jeśli  $\hat{B}$  jest górnortrójkątna. Zatem

$$\det_N \hat{C} = e^{NL_0} \det_N (e^{\hat{L}_-} e^{\hat{L}_+} e^{-\hat{L}_-})$$

Z kolei

$$e^{\hat{L}_-} \hat{L}_+ e^{-\hat{L}_-} = \hat{L}_+ + [\hat{L}_-, \hat{L}_+] + \dots$$

gdzie  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  jest komutatorem. Pomińmy wyrazy to komutatory wyższego rzędu. Stąd

$$e^{\hat{L}_-} e^{\hat{L}_+} e^{-\hat{L}_-} = \exp(\hat{L}_+ + [\hat{L}_-, \hat{L}_+] + \dots)$$

Tu możemy skorzystać ze wzoru  $\det e^{\hat{A}} = \exp \text{Tr} \hat{A}$ , ale wymaga to subtelnej założenia, że elementy górnotrójkątne  $\hat{A}$  dostatecznie szybko znikają ( $\sum_k k |\tilde{f}(k)|$  skończone), co na szczęście jest spełnione dla zbieżnych  $f$ . Dla macierzy  $\text{Tr} \hat{A}\hat{B} = \text{Tr} \hat{B}\hat{A}$  więc ślad komutatora znika. Wyjątkiem są obie macierze nieskończone. Wtedy właśnie mamy wkład od wyróżnionego komutatora (od wyższych znika bo wtedy pojawia się macierz skończona). Mamy za to

$$[\hat{L}_-, \hat{L}_+] = \sum_k \tilde{f}(-k) \tilde{f}(k) \hat{I}_k + \dots$$

gdzie  $\hat{I}_k$  jest macierzą jednostkową w pierwszych  $k$  wymiarach a dalej zero. Pominęliśmy także wyrazy pozadiagonalne. Ponieważ  $\text{Tr} \hat{I}_k = k$ , więc otrzymujemy tezę.

W przypadku gdy mamy funkcję  $\tilde{f}(p) = e^{-ip} f(p)$  Wtedy  $\det \bar{C} \rightarrow x_N (-1)^N \det C$  gdzie

$$C|x\rangle = |0\rangle$$

ze wzorów Cramera. Ogólne zachowania  $x_N$  można więc znaleźć z równinienia szeregu a więc  $e^{-L_-}$  (do znalezienia dokładnego zachowania trzeba uwzględnić fakt, że macierz  $C$  ma zawsze skończony wymiar)