

Mechanika Klasyczna

Wykład 1

Opis punktów materialnych w umownym układzie odniesienia: Przestrzeń trójwymiarowa, wektory: $\mathbf{r} = \vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ (zwyczajowo (x, y, z) jeśli jest to jednoznaczne) konwencja sumacyjna $A_i B_i = \sum_i A_i B_i$ (trochę zmienimy ją przy teorii względności), delta Kroneckera i epsilon (symbol Leviego-Civita)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}, \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{dla } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{dla } ijk = 321, 132, 213 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases},$$

iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$ (liczba), wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ (wektor), $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, mieszany $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$ długość wektora $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$. Wektory są prostopadłe, gdy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ a równoległe, gdy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ (wektor zerowy). Czas: $t \in \mathbb{R}$.

Zamiana współrzędnych, ogólnie $\mathbf{r}(u, v, w)$ powinna być jednoznaczna, np. sferyczne

$$\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

dla $r \in [0, \infty[$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi[$ (dla biegunów $\theta = 0, \pi$ dowolne ϕ a dla $r = 0$ także θ)

W ogólnych współrzędnych posługujemy się bazą $\tilde{\mathbf{e}}_u = \partial \mathbf{r} / \partial u$, itd. unormowaną tj. $\mathbf{e}_u = \tilde{\mathbf{e}}_u / \tilde{e}_u$ itd. ma długość 1. W wielu ważnych przypadkach baza jest ortonormalna (wektory są wzajemnie prostopadłe i unormowane)

Ruch płaski, $r_3 = 0$ nie ma 3. wymiaru (lub istnieje wirtualnie) i go pomijamy, współrzędne sferyczne redukują się do biegunowych

$$\mathbf{e}_r = (\cos \phi, \sin \phi), \mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi)$$

Obroty i izometrie przestrzeni. Odległość jest zachowana (tj, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|$ dla grupy translacji $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$, odbicia $\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$ i obrotów $\mathbf{r} = \hat{O} \mathbf{r}'$ gdzie $\hat{O}$ jest macierzą obrotu (rzeczywista), tj. $r_i = O_{ij} r'_j$, i ich złożenia. Macierze obrotu spełniają warunek $\hat{O}^T \hat{O} = \hat{1}$ (macierz jednostkowa – identyczność, tj. $1_{ij} = \delta_{ij}$) tj. $O_{ki} O_{kj} = \delta_{ij}$ przy czym także $\det \hat{O} = 1$. Obrót można wyrazić wektorem $\mathbf{w}$ na osi, $\hat{O} = \exp \hat{W}$ gdzie $W_{ij} = \epsilon_{ikj} w_k$. Kierunek $\mathbf{w}$ oznacza oś obrotu, a długość w – kąt.

Ruch (tor ruchu): $\mathbf{r}(t)$.

Pochodna po czasie $d\alpha/dt \equiv \dot{\alpha}$, $d^2\alpha/dt^2 \equiv \ddot{\alpha}$, itd. (zapamiętać!)

Prędkość $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, $v = |\mathbf{v}|$, przyspieszenie $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. Jednostkowy wektor styczny $\mathbf{t} = \mathbf{v}/v$ (nie mylić z czasem t !), droga $ds = v dt$, $s = \int_0^t dt' v(t')$. Wektor normalny $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{t}}$ (prostopadły do $\mathbf{v}$ i $\mathbf{t}$ bo $2\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}} = d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})/dt = d1/dt = 0$), jednostkowy $\mathbf{n} = \mathbf{N}/N$, natomiast $\rho = v/N$ jest promieniem krzywizny.

Przyspieszenie można rozłożyć na składową styczną i normalną

$$\mathbf{a} = d(v\mathbf{t})/dt = \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}} = \dot{v}\mathbf{t} + v^2\mathbf{n}/\rho$$

czyli $a_t = \dot{v}$ (styczna), $a_n = v^2/\rho$ (normalna) Wektor jednostkowy binormalny $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ (wzory Freneta, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ tworzą bazę ortonormalną).

W ruchu płaskim

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi, \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi$$

Obracanie się (w czasie): Prędkość kątowna $\boldsymbol{\omega}(t)$,

$$\hat{O}(t) = \mathcal{T} \exp \int_0^t dt' \hat{\Omega}(t')$$

gdzie $\Omega_{ij} = \epsilon_{ikj}\omega_k$ a $\mathcal{T}$ oznacza iloczyn chronologiczny tj.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \exp \int_0^t dt' \hat{\Omega}(t') &= \hat{1} + \int_0^t dt' \hat{\Omega}(t') + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \hat{\Omega}(t_2) \hat{\Omega}(t_1) \\ &+ \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \hat{\Omega}(t_3) \hat{\Omega}(t_2) \hat{\Omega}(t_1) + \dots \end{aligned}$$

Sens prędkości kątowej:

$$od/dt = \hat{\Omega}(t)\hat{O}, \mathbf{r}(t) = \hat{O}\mathbf{r}(0), \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Układy względnie przesuujące i obracające się: $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ położenia w układzie odpowiednio U i U' .

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \hat{O}(t)\mathbf{r}'(t)$$

dla zmiennego przesunięcia $\mathbf{r}_0(t)$ i prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}(t)$. Zmiana prędkości

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \hat{O}\mathbf{v}' + \hat{\Omega}\hat{O}\mathbf{r}' = \mathbf{v}_0 + \hat{O}\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{O}\mathbf{r}')$$

i przyspieszenia

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \hat{O}\mathbf{a}' + 2\hat{\Omega}\hat{O}\mathbf{v}' + \hat{\Omega}\hat{\Omega}\hat{O}\mathbf{r}' + \dot{\hat{\Omega}}\hat{O}\mathbf{r}' = \mathbf{a}_0 + \hat{O}\mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times (\hat{O}\mathbf{v}') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\hat{O}\mathbf{r}')) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\hat{O}\mathbf{r}')$$

Transformacja Galileusza $\mathbf{v}_0$ nie zależy od czasu, tj. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{00} + t\mathbf{v}_0$ a $\hat{O}$ jest ustaloną macierzą obrotu (też nie zależy od czasu). Czas t jest TAKI SAM w U i U' . Wtedy $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \hat{O}\mathbf{v}'$, $\mathbf{a} = \hat{O}\mathbf{a}'$. Przyspieszenie jest takie samo, tylko obrócone.

Układ przypiesający bez obrotu (np. ruszający/hamujący samochód, pociąg, samolot), $\hat{O} = \hat{1}$, wtedy $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0$ Układ obracający się o tym samym początku, tj. $\mathbf{r}_0 = 0$

$$\hat{O}^T \mathbf{r} = \mathbf{r}', \hat{O}^T \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}', \hat{O}^T \mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}'$$

gdzie $\boldsymbol{\omega} = \hat{R}\boldsymbol{\omega}'$. Uwaga, korzystaliśmy z tożsamości

$$\hat{R}^T \hat{\Omega}(t) \hat{O} = \hat{\Omega}'(t)$$

oraz

$$\epsilon_{ijk} O_{ia} O_{jb} O_{kc} = \det O \epsilon_{abc} = \epsilon_{abc}$$

i faktu że różniczkowanie po t daje

$$\hat{O}^T(\hat{\Omega}^T\hat{\Omega} + \dot{\hat{\Omega}} + \hat{\Omega}\hat{\Omega})\hat{O} = \hat{O}^T\dot{\hat{\Omega}}\hat{O} = \dot{\hat{\Omega}}'$$

bo $\hat{\Omega}^T = -\hat{\Omega}$.

Przyspieszenie dośrodkowe

$$\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')$$

i przyspieszenie Coriolisa

$$2\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'$$

Wykład 2

Zasady dynamiki w wersji tradycyjnej (Newton):

Dane: zbiór punktów materialnych, siły powodujące ruch

1. zasada dynamiki (bezwładność). Istnieje układ, zwany *inercjalnym*, w którym punkt materialny, na który nie działają żadne siły, spoczywa lub porusza się ze stałą prędkością.

2. zasada dynamiki. Siła $\mathbf{F}$ powoduje przyspieszenie $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ gdzie m jest stałą dodatnią *masą bezwładną* danego punktu materialnego, niezależną od czasu, położenia, prędkości, itp.

3. zasada dynamiki (akcja i reakcja). Dwa punkty materialne działają na siebie siłami przeciwnymi, tj. jeśli i działa na j siłą $\mathbf{F}$ to j na i siłą $-\mathbf{F}$.

Zasada niezależności sił: Siła działająca na punkt i jest sumą sił od innych punktów.

Uwaga: Aby uzyskać zamknięty układ równań ruchu, trzeba znać wartość sił. Przeważnie siły zależą od położenia jednego lub więcej punktów w tej samej chwili czasu t (lokalność czasowa, dlatego będziemy pomijać t jako argument położenia, prędkości, itp.), mogą także zależeć od prędkości a nawet wprost od czasu. Nie mogą zależeć od przyspieszenia i wyższych pochodnych po czasie, bo wtedy traci sens siła jako przyczyna ruchu. Zasady sformułowane w czasach Galileusza i Newtona trafiają w naszych czasach na trudności koncepcyjne. Przykładowe problemy: (grawitacja) Układ inercjalny spoczywa na Ziemi czy spada swobodnie? Czy siły działają na odległość?

Siły w innych układach inercjalnych: Transformacja Galileusza nie zmienia równań ruchu, o ile prawidłowo transformujemy siły, w tym punkty od których zależą. Stały obrót $\hat{R}$ powoduje jedynie konieczność obrócenia wszystkich wektorów występujących w równaniach. Uwaga, przy przejściu do układu o stałej prędkości względnej $\mathbf{v}_0$, np. ani ładunek q ani pole magnetyczne $\mathbf{B}$ występujące w sile Lorentza $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ nie zmieniają się (tj. zmieniają się zgodnie z transformacją położenia i czasu, $t = t'$, $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$) natomiast pole elektryczne zmienia się $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$.

Siły w układach nieinercjalnych: rozpatrzmy tylko sytuacje kiedy siła zależy od położenia (inaczej są komplikacje). W ogólności przyjmujemy że znamy siły w układzie inercjalnym i transformujemy równania ruchu do układu nieinercjalnego.

W przypadku układu jednostajnie przyspieszającego $\mathbf{F}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) - m\mathbf{a}_0$ a obracającego się

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}', t) = \hat{O}^T \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) - 2m\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}'$$

gdzie $-2m\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'$ jest siłą Coriolisa, a $-m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')$ siłą odśrodkową.

Układ wielu punktów opisujemy równaniami

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i0} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

gdzie $\mathbf{F}_{i0}$ jest siłą *zewnętrzną* działającą na punkt i a $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ jest siłą pomiędzy punktami i oraz j .

Ważne przypadki sił:

- zachowawcze: zależą tylko od położenia $\mathbf{r}_j$ i są gradientami tj. $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\{\mathbf{r}\})$ gdzie $\nabla_i = (\partial_{i1}, \partial_{i2}, \partial_{i3})$, $\partial_{ik} = \partial/\partial(r_i)_k$
- centralne, $\mathbf{F}_{ij} \parallel \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{F}_{i0} \parallel \mathbf{r}_i$
- Lorentza $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ dla punktu z ładunkiem q w polu elektrycznym $\mathbf{E}$ i magnetycznym $\mathbf{B}$,
- tarcia, tłumienia: stosowane zwykle empirycznie, często postaci $\mathbf{F}_{i0} = -\gamma \mathbf{v}_i$ albo z powiązanymi składowymi np. $(F, \mu F, 0)$ gdzie F składowa nacisku siły, μF , składowa siły tarcia, a μ stałym współczynnikiem tarcia.

Pęd (w dynamice Newtona) $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$, nie zmienia się przy przesunięciu układu o stały wektor. Pęd całkowity $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ spełnia $\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_{i0}$, więc jest *zachowany* (nie zależy od czasu) gdy siły zewnętrzne sumują się do zera.

Położenie środka masy $\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / M$, prędkość środka masy $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P} / M$, dla $M = \sum_i m_i$ masa całkowita.

Moment pędu: $\mathbf{j}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, zmienia się przy przesunięciu układu o stały wektor. Całkowity moment pędu $\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{j}_i$, dla sił centralnych spełnia

$$\dot{\mathbf{J}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i0}$$

jest zachowany przy braku sił zewnętrznych, lub gdy też są centralne tj. $\mathbf{F}_{i0} \parallel \mathbf{r}_i$

Energia kinetyczna (Newtona) $T_i = m_i v_i^2 / 2$. W przypadku sił zachowawczych zachowana jest energia całkowita czyli $E = \sum_i T_i + V$.

Przykłady:

Oscylator harmoniczny (jednowymiarowy, tj. $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$):

$$m\ddot{x} = -kx$$

gdzie $m, k > 0$. Wtedy $x = A \cos(\omega(t - t_0))$ gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$ jest częstością (oscylacji), A – amplitudą drgań (stałą) a t_0 – ustalonym czasem początkowym (dla maksymalnego wychylenia).

Ruch w polu siły centralnej $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_r \parallel \mathbf{r}$. Wtedy zachowany jest moment pędu $\mathbf{J}$, a ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do $\mathbf{J}$. W układzie, w którym $\mathbf{J} = (0, 0, J)$ (przez obrót zawsze możemy taki wybrać) ruch odbywa się w płaszczyźnie xy . Wtedy $J = mr^2 \dot{\phi}$ jest jednocześnie stałą prędkością polową, tj. wektor $\mathbf{r}$ zakreśla w czasie pole powierzchni proporcjonalne do czasu, $J/2m$ na jednostkę czasu. Radialna składowa ($\mathbf{e}_r$) równań ruchu we współrzędnych biegunowych jest

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F$$

Wobec faktu, że $\dot{\phi} = J/mr^2$ mamy

$$\dot{r} = \dot{\phi}r' = Jr'/mr^2 = -(J/mr)', \quad \ddot{r} = \dot{\phi}\dot{r}'/\dot{\phi} = -(J/mr^2)(J/mr)''$$

gdzie $(') = d/d\phi$ a $('') = d^2/d\phi^2$. Zatem (wzór Bineta)

$$w'' + w = -Fm/J^2w^2$$

gdzie $w = 1/r$.

Przypadek szczególny: zagadnienie Keplera (Coulomba) dla jednego ciała, $F = -\alpha/r^2 = -\alpha w^2$. Dla $\alpha > 0$ siła jest przyciągająca, a $\alpha < 0$ – odpychająca. Wtedy

$$w'' + w = \alpha m/J^2$$

ma ogólne rozwiązanie w postaci $w = \alpha m/J^2 + \epsilon \cos \phi$. Dla $\alpha > 0$ oraz: $\epsilon = 0$ tor jest okręgiem, $|\epsilon| < \alpha m/J^2$ – elipsą, $|\epsilon| = \alpha m/J^2$ parabolą. Dla $|\epsilon| > \alpha m/J^2$ (także $\alpha < 0$) tor jest hiperbolą.

W fizyce często bada się rozpraszanie, czyli zmianę toru ciała (punktu materialnego), które w odległej przeszłości poruszało się ze stałą prędkością z dala od wszelkich sił i pytamy co się stanie w dalekiej przyszłości. Możliwe przypadki to (a) oddalenie się od sił ze stałą prędkością ale zmienionym kierunku (b) uwięzienie w obszarze sił. Dla sił centralnych zależnych tylko od promienia, tj. $F = F(r)$ sprowadza się to do analizy *przekroju czynnego* tj. analizy zachowania ciał poruszających się w przeszłości (asymptotycznie) z prędkością $\mathbf{v}$ w odległości b od osi zderzenia tj. prostej równoległej do $\mathbf{v}$ przechodzącej przez środek. Ciało może zostać uwięzione albo odlecieć z prędkością $\mathbf{v}'$ o tej samej wartości ale innym kierunkiem, tworzącym kąt θ z $\mathbf{v}$. Różniczkowy przekrój czynny przekrój powierzchni prostopadły do osi zderzenia, tj. $d\sigma = 2\pi b db$ przypadający na jednostkę bryłowego kąta rozproszenia tj. $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$

$$d\sigma/d\Omega = |bdb/\sin \theta d\theta|$$

Całkowity przekrój na wciągnięcie ciała to suma pól koła i wszystkich pierścieni, z których to następuje, tj.

$$\sigma_0 = \pi(b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 + \dots)$$

Badanie przekrojów sprowadza się do znalezienia zależności pomiędzy b i θ (uwaga: θ jest zawsze funkcją b ale nie zawsze różnowartościową). W tym celu można wykorzystać wzór Bineta, szukając miejsc zerowych $\phi_{\pm}$ funkcji $w(\phi)$, uwzględniając że $J = mbv$ oraz $b = r \sin(\phi - \phi_-)$ dla dużych r co przekłada się na warunki początkowe $w(\phi_-) = 0$, $w'(\phi_-) = 1/b$. Wtedy $\theta = \pi - \phi_+ + \phi_-$.

Bilans energii. W jednym wymiarze ze stałej energii dla sił zachowawczych

$$E = m\dot{x}^2/2 + V(x)$$

można znaleźć $\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - V)/m}$ i warunek na ruch $E > V$. Zmiana znaku następuje wahadłowo w punktach $E = V$. Stąd znajdujemy funkcję $t(x)$

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2(E - V)/m}}$$

Np. dla oscylatora $V = kx^2/2$ Siła radialna $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$ jest zachowawcza bo $\mathbf{F} = -\nabla V$ dla $V(r) = -\int dr F(r)$. Np. dla siły Keplera mamy $V = -\alpha/r$. Wykorzystując zachowanie $\mathbf{J}$ i sprowadzając ruch do płaszczyzny xy mamy we współrzędnych biegunowych

$$E = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)/2 + V(r) = m\dot{r}^2/2 + J^2/2mr^2 + V(r) = m\dot{r}^2/2 + V_{eff}(r)$$

$$2mEJ^2 = (dr/d\phi)^2/r^2 + 2mV_{eff}(r)/J^2 = (w')^2 + w^2 + 2mV(1/w)/J^2$$

gdzie uwzględniliśmy $J = mr^2\dot{\phi}$ i zdefiniowaliśmy potencjał efektywny $V_{eff} = V + J^2/2mr^2$. Dalsze rozwiązywanie jest zagadnieniem jednowymiarowym

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2(E - V_{eff})/m}}$$

a także

$$\phi = \pm \int \frac{Jdr}{r^2\sqrt{2m(E - V_{eff})}}$$

przy warunku na ruch $E > V_{eff}$.

Zagadnienie dwóch ciał: dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 i położeniach $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ działają na siebie siłą $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Innych sił nie ma. Wtedy opłaca się rozdzielić ruch środka masy $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ i względny $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Odwrotnie $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + m_2\mathbf{r}/(m_1 + m_2)$ oraz $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - m_1\mathbf{r}/(m_1 + m_2)$. Środek masy porusza się ruchem jednostajnym, ze stałą prędkością $\mathbf{V}$. Natomiast ruch względny można sprowadzić do jednego ciała równaniem

$$\mu\mathbf{a} = \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}$$

gdzie $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ jest *masą zredukowaną*. Jeśli np. $\mathbf{F}_{12} = F(r)\mathbf{e}_r$ to pełne rozwiązanie otrzymuje się z rozwiązania problemu jednego ciała w polu siły radialnej, opisanego wcześniej.

Zagadnienie zmiennej masy. W niektórych problemach mechaniki klasycznej występuje masa zmienna, np. rakietę albo odrzutowiec. Polega to na tym że ciało (wyróżniony punkt materialny) wyrzuca z siebie z w czasie masę (powiększający się, w granicy ciągły, zbiór punktów materialnych). Problem jest w praktyce przybliżany, ignoruje się zasadę zachowania energii (która jest częściowo energią ruchu wewnętrznego), za to korzysta z zachowania pędu i masy całkowitej. Jeśli ciało o masie $m(t)$ traci masę w tempie $-dm/dt$ to jego pęd zmienia się $dp/dt = d(mv)/dt = v'dm/dt$ gdzie v jest prędkością ciała a v' prędkością wyrzucanej masy. Jeśli działa dodatkowo siła zewnętrzna F to $d(mv)/dt = v'dm/dt + F$.

Wykład 3

Więzy: Ograniczenie na ruch. Mogą mieć postać równań lub nierówności na wyrażenia od położenia, czasu i prędkości. Analizę więzów ograniczymy do równań zawierających położenia i czas a czasem wyjątkowo prędkość w formie liniowej. Przykładem więzów jest ruch punktu po ustalonej powierzchni lub krzywej. Założymy także brak tarcia. Postulujemy że więzy w celu utrzymania ruchu zgodnego z więzami działają *prostopadle* do powierzchni/krzywej. W języku geometrii różniczkowej siła więzów o równaniu $f(\mathbf{r}) = 0$ ma kierunek ∇f . Jeśli siła jest sumą części niezależnej od więzów, $\mathbf{F}$ i siły więzów, to równanie ruchu ma postać

$$m\mathbf{a} - F = \lambda\nabla f$$

gdzie λ jest liczbą wyznaczaną z warunku więzów $f = 0$, tzw. mnożnikiem Lagrange'a. Zasada prostopadłości więzów jest ogólniej nazywana zasadą d'Alemberta albo zasadą zerowej pracy więzów (jest to postulat!). Do jej napisania musimy sformułować klasę więzów, które będziemy rozważać. Przeważnie mamy do czynienia z więzami holonomicznymi czyli funkcjami położeń i czasu

$$f_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad j = 1..l$$

Zakładamy niezależność więzów czyli macierz $M_{ia} = \partial f_j / \partial r_a$ dla $a = 11, 12, 13, \dots, n1, n2, n3$ ma rząd ℓ . Wtedy równania ruchu punktów, przy znanych siłach $\mathbf{F}_i$ niezależnych od więzów wg zasady d'Alemberta mają postać równań Lagrange'a pierwszego (I) rodzaju

$$m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i = \sum_j \lambda_j \nabla_i f_j$$

gdzie mnożniki Lagrange'a λ_j wyznacza się z warunków więzów. Siły $-\lambda_j \nabla f_j$ są siłami reakcji więzów. Więzy holonomiczne, niezależne od czasu nazywamy skleronomicznymi. Niewielka klasa problemów w praktyce (tocząca się piłka, moneta, nóż, pościg) wymaga więzów nieholonomicznych, tj. zawierających prędkości. Ograniczymy się do funkcji liniowych tj.

$$\sum_i \mathbf{g}_{ij}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{v}_i = g_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t)$$

które można przełożyć na formy różniczkowe

$$\sum_i \mathbf{g}_{ij}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) \cdot d\mathbf{r}_i = g_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) dt$$

Wtedy zasada d'Alemberta daje równania Lagrange'a I rodzaju

$$m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i = \sum_j \lambda_j \nabla_i f_j + \sum_j \kappa_j \mathbf{g}_{ij}$$

i do wyznaczenia są λ_j oraz κ_j

Uwaga: Powyższe więzy ze względu na znak równości nazywa się dwustronnymi; czasem więzy mają postać nierówności np $f(\mathbf{r}) \geq 0$ (są jednostronne) i wtedy gdy zachodzi równość robimy test czy dalszy ruch przy założeniu braku więzów powoduje ich złamanie. Jeśli tak to stosujemy równania Lagrange'a jak dla dwustronnych (sprowadza się to najczęściej do badania zwrotu siły reakcji, czyli znaku λ , czy jest na zewnątrz obszaru zabronionego).

Równania Lagrange'a drugiego (II) rodzaju:

Idea równań Lagrange'a II rodzaju polega na zastąpieniu wszystkich $3n$ współrzędnych dla n punktów i równań więzów holonomicznych poprzez $k = 3n - \ell$ zmiennych krzywoliniowych q_i , $i = 1, \dots, k$, zgodnych z więzami (paramteryzujących zbiór konfiguracji zgodny z równaniami więzów). Zatem $\mathbf{r}_i$ są funkcjami q_j i czasu t , przy czym równania więzów są tożsamościowo spełnione dla wszystkich q_j . Do opisu ruchu wystarczą wtedy funkcje $q_j(t)$. W szczególności

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

Energię kinetyczną możemy więc zapisać

$$T = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i / 2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)$$

Potraktujemy teraz T jako funkcję q_j , $\dot{q}_j$ i t . Wtedy

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \left(\sum_s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \right)$$

a z kolei

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \left(\sum_s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_s} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \right)$$

Zatem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Z kolei suma równań Lagrange'a I rodzaju z wagami $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$ daje

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_s \sum_i \lambda_s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \nabla_i f_s = \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_j} = 0$$

ponieważ więzy są spełnione tożsamościowo.

Jeśli siła jest potencjalna tj. $\mathbf{F} = -\nabla V$ to równania ruchu mają postać równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

dla $L = T - V$ co nazywamy odtąd Lagranżjanem (Lagrangian). Uwaga na ważną różnicę: znak jest przeciwny niż w energii $E = T + V$. Równania (Lagrange'a) są słuszne także gdy V jest potencjałem zależnym od czasu i liniowo od prędkości tj. $\mathbf{v}_i$, który wywołuje siłę

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}_i}$$

Jeśli

$$V = \sum_i C_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

to

$$F_{ib} = \partial_t C_{ib} + \sum_l \dot{r}_{la} (\partial_{la} C_{ib} - \partial_{ib} C_{la})$$

gdzie a i b są indeksami składowych wektorów.

W przypadku więzów mamy

$$V = \tilde{C} + \sum_j \tilde{C}_j(q_1, \dots, q_k) \dot{q}_j$$

gdzie

$$\tilde{C} = \sum_i \mathbf{C}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad \tilde{C}_j = \sum_i \mathbf{C}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Traktując V jako funkcję q_j , $\dot{q}_j$ i t mamy

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \tilde{C}_j, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} =$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_l \frac{\partial r_{ib}}{\partial q_j} \frac{\partial C_{ib}}{\partial r_{la}} \left(\frac{\partial r_{la}}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial r_{la}}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) + \mathbf{C}_i \cdot \left(\sum_s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \right) \right)$$

oraz

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_i \left(\sum_l \frac{\partial C_{ib}}{\partial r_{la}} \frac{\partial r_{la}}{\partial q_j} \left(\frac{\partial r_{ib}}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial r_{ib}}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) + \mathbf{C}_i \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_s \dot{q}_s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_s} \right) \right)$$

czyli

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = \\ & \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_l \frac{\partial C_{ib}}{\partial r_{la}} \left(\frac{\partial r_{ib}}{\partial q_j} \left(\frac{\partial r_{la}}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial r_{la}}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) - \frac{\partial r_{la}}{\partial q_j} \left(\frac{\partial r_{ib}}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial r_{ib}}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) \right) \right) \\ & = \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_l \frac{\partial C_{ib}}{\partial r_{la}} \left(\frac{\partial r_{ib}}{\partial q_j} \dot{r}_{la} - \frac{\partial r_{la}}{\partial q_j} \dot{r}_{ib} \right) \right) \\ & = \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_l \dot{r}_{la} (\partial_{la} C_{ib} - \partial_{ib} C_{la}) \frac{\partial r_{ib}}{\partial q_j} \right) = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Ważnym przykładem siły zależącej od prędkości jest siła Lornetza. W tym celu korzystamy z faktu że pola elektryczne $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i magnetyczne $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ spełniają równania Faradaya $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ i Gaussa $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Wtedy pole magnetyczne można zapisać jako $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ a elektryczne $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \partial_t \mathbf{A}$, gdzie $\Phi(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ są odpowiednio skalarnym potencjałem elektrycznym i wektorowym potencjałem magnetycznym. Jeśli przyjmiemy $V = q(\Phi - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ to otrzymamy siłę Lorentza $q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$ dla punktu o ładunku q .

W obecności więzów nieholonomicznych liniowych możemy zapisać je podstawiając współrzędne uogólnione $\mathbf{r}(q, t)$, tj.

$$\sum_i \mathbf{g}_{is}(\mathbf{r}(q, t), t) \cdot \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j = g_s(\mathbf{r}(q, t), t) dt - \sum_i \mathbf{g}_{is}(\mathbf{r}(q, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

zapisane jako

$$\sum_j \tilde{g}_{js}(q, t) dq_j = \tilde{g}_s(q, t) dt$$

Wtedy równania Lagrange'a mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_s \kappa_s \tilde{g}_{js}$$

Energia jako wielkość zachowana dla równań Lagrange'a. Można sprawdzić że energia

$$E = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

jest zachowana w czasie gdy L nie zależy wprost od czasu. Jest to prawdą także dla liniowych więzów nieholonomicznych o ile dodatkowo $\tilde{g}_s = 0$. Mamy bowiem

$$\dot{E} = \sum_j \left(\ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} - \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{js} \dot{q}_j \kappa_s \tilde{g}_{js} = 0$$

gdzie wykorzystaliśmy równanie więzów w ostatnim kroku. Ponadto $E = T + V$ jeśli T jest (dodatnio określoną) formą kwadratową od $\dot{q}_j$ o współczynnikach zależnych dowolnie od q_j , natomiast V zależy tylko od q_j .

Położenia równowagi. Jeśli L nie zależy od czasu znajdujemy $\tilde{V}(q) = -L(q, \dot{q} = 0)$. Punktem równowagi jest ekstremum $\tilde{V}$, przy czym równowaga jest trwała dla minimum (nie trwała dla maksimum lub punktu siodłowego). Małe drgania. Dla równowagi trwałej w $q = 0$ (ewentualnie przesuwamy zmienne) rozwijamy Lagrangian

$$L \simeq \sum_{js} (A_{js} \dot{q}_j \dot{q}_s - B_{js} q_j q_s) + C_{js} q_j \dot{q}_s$$

pomijając stałą i wyrazy liniowe w $\dot{q}$ (z warunku ekstremum nie ma wyrazów liniowych w q) i równania ruchu są liniowe.

Zasada wariacyjna Hamiltona (zasada najmniejszego działania, a ściślej ekstremalnego).

Równania Lagrange'a II rodzaju można także wyprowadzić w sposób wariacyjny. Dla każdej trajektorii $q_j(t)$ ustalonej w chwili początkowej $t = a$ i końcowej $t = b$ dla $b > a$, tj. $q_j(a)$ i $q_j(b)$ jest ustalone istnieje funkcja zwana działaniem

$$S[q] = \int_a^b L(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t) dt$$

W tym zbiorze trajektorii szukamy takiej, która daje ekstermalne działanie tj. wariacja (nie-wielka zmiana) $\delta S = 0$. Tymczasem

$$\delta S = \int_a^b \delta L dt = \int_a^b \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \int_a^b \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d \delta q_j}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_a^b = \int_a^b \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt$$

Ze względu na dowolność δq_j otrzymujemy równania Lagrange'a.

Przy okazji widać, że zmiana L o pochodną zupełną df/dt dla $f(q, t)$ nie może zmienić równań ruchu. Mamy bowiem

$$L' = L + \dot{f} = L + \sum_j \partial_j f \dot{q}_j + \partial_t f$$

czyli $\partial L'/\partial \dot{q}_j = \partial L/\partial \dot{q}_j + \partial_j f$, zatem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \partial_{tj} f + \sum_l \dot{q}_l \partial_{jl} f$$

a z kolei

$$\frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_l \partial_{lj} f \dot{q}_l + \partial_{tj} f$$

czyli strony są równe.

Niezmienność względem cechowania (pole elektromagnetyczne). Pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ nie zmieniają się przy zmianie $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$, $\Phi \rightarrow \Phi - \partial_t f$ dla dowolnej funkcji $f(\mathbf{r}, t)$. Wtedy

$$L \rightarrow L' = L + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f + q \partial_t f = L + q df/dt$$

Współrzędna cykliczna: jeśli $\partial L/\partial q_j = 0$ to $\partial L/\partial \dot{q}_j$ jest stałą ruchu.

Twierdzenie Noether (Emmy Noether, 1915): Niezmienność działania $\int_a^b L dt$ przy (infinitesimalnej – niewielkiej, $\epsilon \rightarrow 0$) zmianie

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon T(q, t), \quad q_j \rightarrow q'_j = q_j + \epsilon Q_j(q, t)$$

i konsekwentnie

$$\begin{aligned} q_j(t) &\rightarrow q'_j(t') = q_j(t - \epsilon T) + \epsilon Q_j = q_j - \epsilon \dot{q}_j T + \epsilon Q_j \\ \dot{q}_j &\rightarrow \frac{dq'_j}{dt'} = \dot{q}_j - \epsilon d(\dot{q}_j T) dt + \epsilon \dot{Q}_j = \\ &\dot{q}_j - \epsilon \ddot{q}_j T + \epsilon \sum_l \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_l} - \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \epsilon \left(\frac{\partial Q_j}{\partial t} - \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

powoduje istnienie stałej ruchu

$$\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) T - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j$$

Dowód: Działanie po zmianie ma postać

$$\int_a^b L(q, \dot{q}, t) dt \rightarrow \int_{a+\epsilon T_a}^{b+\epsilon T_b} L(q', \dot{q}', t') dt'$$

Rozwijając do wyrazów rzędu ϵ otrzymamy oprócz $\int_a^b L dt$ wyraz ϵ razy:

$$0 = T_b L(q(b), \dot{q}(b), b) - T_a L(q(a), \dot{q}(a), a) + \int_a^b dt \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} (Q_j - T \dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial t} - \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial t} - \ddot{q}_j T + \sum_l \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_l} - \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l \right) \right)$$

Z kolei zgodnie z równaniami Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j T = \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial T}{\partial q_l} \dot{q}_l \right)$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} Q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial Q_j}{\partial q_l} \dot{q}_l \right)$$

czyli po podstawieniu do wcześniejszego równania dosotaniemy całki z pochodnych zupełnych, a więc

$$0 = T L(q, \dot{q}, t) + \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j T \right) \Big|_a^b$$

Ważne przykłady: $T = 1$, $Q = 0$ oznacza niezmienniczość w czasie i daje energię (L nie zależy wprost od czasu). W pozostałych przykładach $T = 0$, np. $Q_{jm} = 1$ dla ustalonego m lub $\mathbf{Q}$ jeśli współrzędne są kartezjańskie, tj. $q_j \rightarrow \mathbf{q}_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3})$, niezmienniczość translacyjna. Wtedy mamy pęd całkowity tj.

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}$$

Z kolei dla $\mathbf{Q}_j = \mathbf{q}_j \times$ (niezmienniczość obrotowa) dostajemy moment pędu

$$\sum_j \mathbf{q}_j \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}$$

Wahadło matematyczne. Punkt o masie m na nierozciągliwej nici o długości ℓ zawieszony w jednorodnym polu grawitacyjnym g . Współrzedną niezależną jest kąt od pionu, ϕ (ruch w jednej płaszczyźnie). Wtedy $x = \ell \sin \phi$, $y = \ell \cos \phi$, $V = -mgy = -mg\ell \cos \phi$. $v = \ell \dot{\phi}$, $T = m\ell^2 \dot{\phi}^2 / 2$ czyli $E = m\ell^2 \dot{\phi}^2 / 2 - mg\ell \cos \phi$. Dla $E > mg\ell$ mamy ruch obrotowy w jednym kierunku. Dla $E < mg\ell$ jest ruch wahadłowy z warunkiem $E + mg\ell \cos \phi > 0$ czyli maksymalny kąt $\phi = \alpha$ spełnia $\cos \alpha = -E / mg\ell$. Wtedy okres wahań (4 razy ruch jednokierunkowy od $\phi = 0$ do α)

$$t_0 = 4 \int_0^\alpha \frac{\ell d\phi}{\sqrt{2(E/m + g\ell \cos \phi)}}$$

Zamieniając zmienne $k \sin \theta = \sin(\phi/2)$ dla $2k^2 = 1 + E/mg\ell$ dostaniemy

$$t_0 = 4\sqrt{\ell/g} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = 4K(k) \sqrt{\ell/g}$$

gdzie $K(k)$ jest całką eliptyczną (zupełną pierwszego rodzaju), w przybliżeniu $2K/\pi = 1 + k^2/4 + \dots$. Uwaga: niektóre programy, np. Mathematica, definiują całkę eliptyczną przez $K(m)$ gdzie $m = k^2$.

Suma prosta: dla $L = L_a(q_a, \dot{q}_a, t) + L_b(q_b, \dot{q}_b, t)$ dla niezależnych zbiorów $q_{a1}, q_{a2}, \dots$ oraz $q_{b1}, q_{b2}, \dots$. Ruchy obu zbiorów są niezależne i opisywane tylko L_a lub L_b . Możemy sumę rozbić dalej na zbiory niezależne o ile to możliwe.

Układ dynamiczny Liouville'a (separowalny), $L = T - V$ gdzie

$$T = \frac{U}{2} \sum_j \dot{q}_j^2, \quad V = \sum_j w_j(q_j)/U, \quad U = \sum_j u_j(q_j)$$

Na mocy równań Lagrange'a mamy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} (U \dot{q}_j) = (u'_j(T + V) - w'_j)/U$$

Zatem, uwzględniając że $T + V = E$ jest energią – stałą ruchu,

$$\frac{d}{dt} (U \dot{q}_j)^2 = 2 \dot{q}_j (u'_j E - w'_j) = 2 d(E u_j - w_j) / dt$$

dostajemy zatem stałą ruchu

$$(U \dot{q}_j)^2 / 2 + w_j - E u_j = c_j$$

gdzie c_j są stałymi spełniającymi $\sum_j c_j = 0$ z zachowania energii. Stąd

$$\sqrt{2} dt / U = \epsilon_j (E u_j - w_j + c_j)^{-1/2} dq_j \equiv ds$$

z $\epsilon_j = \pm 1$. Wtedy

$$s = \epsilon_j \int (E u_j - w_j + c_j)^{-1/2} dq_j$$

separuje zmienne q_j wiążąc je ze wspólną zmienną pomocniczą s . Z kolei czas znajdziemy z faktu że

$$\sqrt{2} t = \int U ds$$

gdzie q_j występujące w U wyrażamy przez s .

Wykład 4

Formalizm Hamiltona. Niech $\dot{q}_j \equiv v_j$ tj. mamy Lagrangian jako funkcję $L(q, \dot{q} \equiv v, t)$. Wprowadamy pędy uogólnione

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial v_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Jeśli macierz (symetryczna)

$$M_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial v_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}$$

jest niezdegenerowana tj. $\det \hat{M} \neq 0$ to można wyrazić v przez p . Dla realnych układów fizycznych jest dodatnio określona tj. L jest wypukłą funkcją v . Wtedy mamy $L(q, v(p), t)$ i nadal słuszne są równania Lagrange'a które można zapisać

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

przy czym pochodna cząstkowa po prawej stronie jest przy ustalonych $\dot{q}$ i jednoznacznie też przy ustalonych p . Wprowadzamy funkcję Hamiltona, będącą przekształceniem Legendre'a dla Lagrangianu

$$H(q, p, t) = \sum_j p_j v_j - L(q, v, t)$$

gdzie v są funkcjami p . Zauważmy że

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i + \sum_j p_j \frac{\partial v_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial p_i} = v_i$$

na mocy definicji p_j . Z kolei $\partial L / \partial q_j = -\partial H / \partial q_j$ co daje dwa równania kanoniczne Hamiltona

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

W opisie Hamiltona jest kilka wygodnych własności. Możemy zdefiniować *przestrzeń fazową* z punktów (q, p) z miarą $dqdp$ a dzięki równaniom Hamiltona objętość przestrzeni fazowej nie zmienia się w czasie (jest nieściśliwa, używając analogii trójwymiarowej), twierdzenie Liouville'a

$$\sum_j \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} \right) = 0$$

Ponadto $H = E$ jest energią, zachowaną, gdy H lub L nie zależy jawnie od czasu.

Przydatne są także *nawiasy Poissona* dla funkcji $F(q, p, t)$, $G(q, p, t)$,

$$\{F, G\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right)$$

o własnościach (prosto sprawdzalnych)

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad \{F, F\} = 0, \quad \{A+B, F\} = \{A, F\} + \{B, F\}, \quad \{AB, F\} = \{A, F\}B + A\{B, F\}$$

$$\{F, q_j\} = -\frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \{F, p_j\} = \frac{\partial F}{\partial q_j},$$

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

i żmudnie dowodzonej tożsamości Poissona

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

Jeśli badamy zachowanie $F(q, p, t)$ na fizycznej trajektorii $q(t), p(t)$, wtedy

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

czyli także $dH/dt = \partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$.

Twierdzenie Poissona-Jacobiego. Jeśli $F(q, p, t)$ i $G(q, p, t)$ są stałymi ruchu na każdej trajektorii $q(t), p(t)$ wtedy $\{F, G\}$ także. Mamy bowiem

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$$

oraz $dF/dt = dG/dt = 0$ czyli

$$\{H, F\} = \partial_t F, \quad \{H, G\} = \partial_t G$$

a z kolei

$$\frac{d}{dt}\{F, G\} = \{\{F, G\}, H\} + \partial_t\{F, G\} = -\{F, \{H, G\}\} - \{G, \{F, H\}\} + \{\partial_t F, G\} + \{F, \partial_t G\} = 0$$

Suma prosta: dla $H = H_a(q_a, p_a, t) + H_b(q_b, p_b, t)$ dla niezależnych zbiorów $q_{a1}, p_{a1}, q_{a2}, p_{a2}, \dots$ oraz $q_{b1}, p_{b1}, q_{b2}, p_{b2}, \dots$. Ruchy obu zbiorów są niezależne i opisywane tylko H_a lub H_b . Możemy sumę rozbić dalej na zbiory niezależne o ile to możliwe.

Uwaga: układ Liouville'a ma prosty Hamiltonian

$$H = \sum_j (p_j^2/2 + w_j)/U$$

i można z równań Hamiltona $\dot{q}_j = p_j/U$ i $\dot{p}_j = (u'_j H - w'_j)/U$ pokazać że

$$p_j^2/2 + w_j - u_j H$$

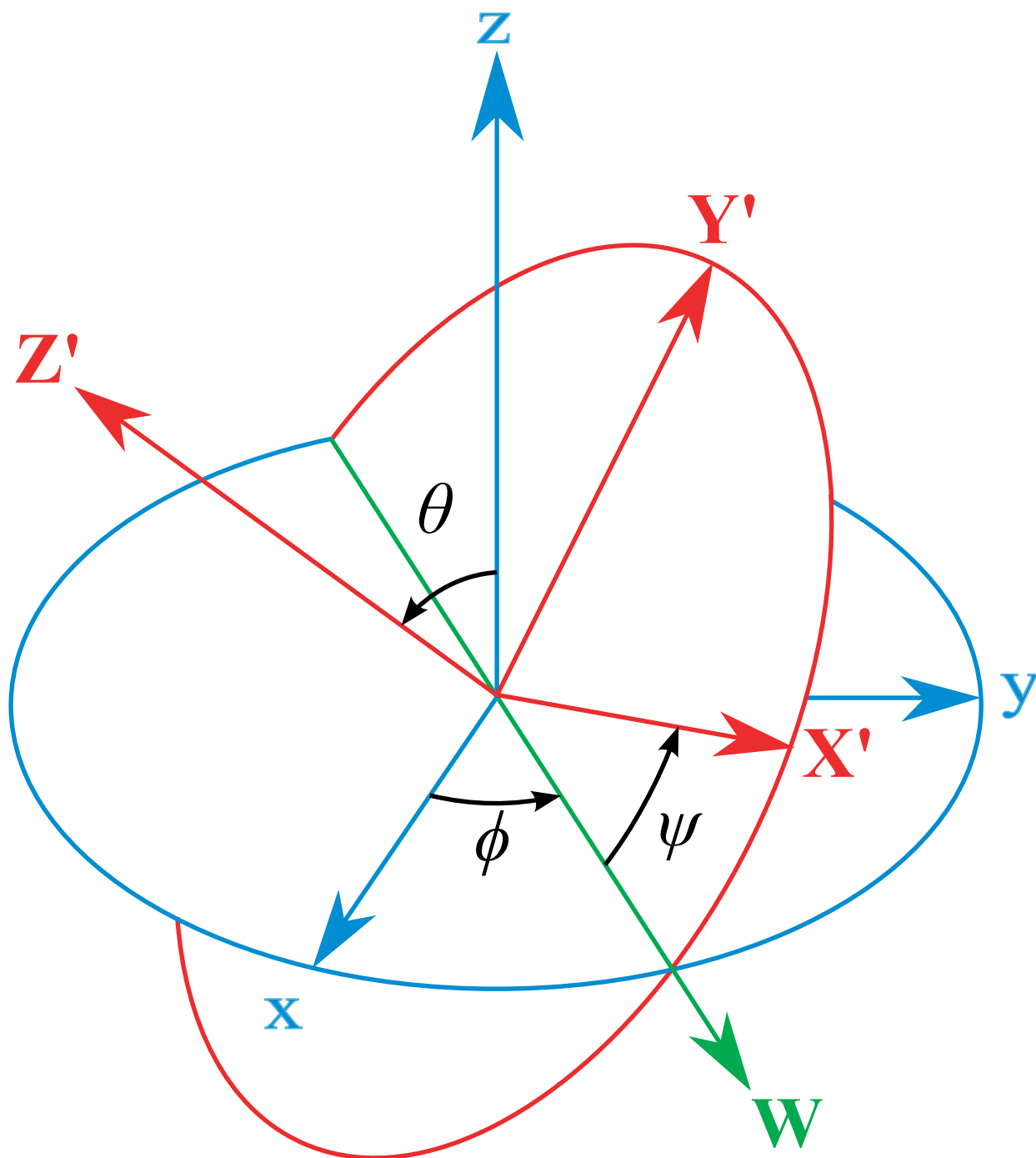
jest stałą ruchu c_j .

Wykład 5

Bryła sztywna. W życiu codziennym bardzo często mamy do czynienia z bryłami zbudowanymi z punktów o ustalonych odległościach wzajemnych. tj. $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ (połączeniach). Są to więzy holonomiczne, skleronomiczne. Często jest ich więcej niż potrzeba z zasady niezależności. Dla zachowania sztywności nie muszą z kolei być zachowane dla wszystkich par. Wystarczy aby z odległości zachowanych z założenia wynikało zachowanie wszystkich (brak przegubów). Wtedy konfigurację bryły sztywnej określa położenie jednego wybranego punktu $\mathbf{r}_0$ (często będzie to środek masy) i macierzy obrotu $\hat{O}$ względem układu spoczynkowego bryły.

Położenie każdego punktu jest wtedy dane

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \hat{O}\mathbf{r}'$$



Rysunek 1: Kąty Eulera (wikipedia: Lionel Brits)

gdzie $\mathbf{r}'$ jest stałym położeniem punktu w układzie bryły. W trakcie ruchu zmienia się $\mathbf{r}_0$ i $\hat{O}$. Macierz $\hat{O}$ ma 3 niezależne parametry, ale zwykle traktuje się ją jako złożenie 3 obrotów, używając kątów Eulera

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Są to obroty kolejno (od lewej do prawej) o kąt ϕ wokół osi z , ϑ wokół x i ψ wokół z . Wersor $\mathbf{e}_w = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ wyznacza kierunek osi węzłów.

W trakcie ruchu będziemy interesować nas prędkość $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$ i prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ powiązana z macierzą $\Omega_{ab} = \epsilon_{acb}\omega_c$ gdzie

$$\hat{\Omega} = (d\hat{O}/dt)\hat{O}^T = \hat{O}\hat{\Omega}'\hat{O}^T, \quad \hat{\Omega}' = \hat{O}^T d\hat{O}/dt$$

oraz $\boldsymbol{\omega} = \hat{O}\boldsymbol{\omega}'$. gdzie wielkości z primem ($'$) są w układzie bryły. Dla opisu za pomocą kątów Eulera mamy

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{e}_z + \dot{\vartheta}\mathbf{e}_w + \dot{\psi}\hat{O}\mathbf{e}_z$$

gdzie $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$, $\hat{O}\mathbf{e}_z = (\sin \vartheta \sin \phi, -\sin \vartheta \cos \phi, \cos \vartheta)$ i analogicznie

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\phi}\hat{O}^T\mathbf{e}_z + \dot{\vartheta}\mathbf{e}'_w + \dot{\psi}\mathbf{e}_z$$

gdzie $\hat{O}^T\mathbf{e}_z = (\sin \vartheta \sin \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \cos \vartheta)$ oraz $\mathbf{e}'_w = \hat{O}^T\mathbf{e}_w = (\cos \psi, -\sin \psi, 0)$

Z kolei prędkości wyrażają się

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

a przyspieszenia

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))$$

Wprowadzając wektory obrócone do układu bryły (a nie liczone w nim) $\hat{O}\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\hat{O}\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ możemy także zapisać

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')$$

Zakładamy, zgodnie z zasadą akcji i reakcji i d'Alemberta, że siły na połączeniach są centralne i przeciwnego znaku. Wprowadzając całkowity pęd i moment pędu bryły

$$\mathbf{P} = \sum m\mathbf{v}, \quad \mathbf{J} = \sum \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

będziemy mieli

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{J}} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}$$

gdzie $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ są siłami zewnętrznymi działającymi na punkt $\mathbf{r}$. Do opisu ruchu bryły wystarczy więc siła wypadkowa $\mathbf{F}$ i całkowity moment siły $\mathbf{D}$. W układzie bryły mamy równania Eulera

$$\dot{\mathbf{J}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{J}' = \mathbf{D}'$$

Wprowadzimy kilka przydatnych wielkości, masę bryły $M = \sum m$, Środek masy $\mathbf{R} = \sum m\mathbf{r}/M$ i środek masy w układzie bryły $\mathbf{R}' = \sum m\mathbf{r}'/M$. Uwaga: dla ciągłego rozkładu masy zastępujemy $\sum m$ przez $\int d\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')$ gdzie ρ jest gęstością masy, często stałą. Wtedy

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_0 + M\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{r}_0), \mathbf{P}' = M\mathbf{v}'_0 + M\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}'$$

oraz

$$\mathbf{J} = \sum m\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))$$

$$\mathbf{J}' = M\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{v}'_0 + M\mathbf{R}' \times \mathbf{v}_0 + \sum M\mathbf{r}'_0 \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}') + \sum m\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')$$

Zauważmy że

$$\sum m\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') = \sum m(r'^2\boldsymbol{\omega}' - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega}')) \equiv \hat{I}'\boldsymbol{\omega}'$$

gdzie wprowadziliśmy tensor momentu bezwładności $\hat{I}$ o składowych

$$I_{ab} = \sum m(r^2\delta_{ab} - r_ar_b)$$

Będziemy pisać $\hat{I}$ (zależy od $\mathbf{r}$) w układzie inercjalnym i $\hat{I}'$ (zależy od $\mathbf{r}'$) w układzie bryły. Tensor ten jest symetryczny, jest więc diagonalizowalny (ma rzeczywiste wartości własne a z wektorów własnych zbudujemy bazę ortonormalną) i dodatnio określony (jedna wartość własna zeruje się tylko dla igły-pręta-kija, masy rozłożonej na prostej zawierającej początek układu).

Energia kinetyczna

$$\begin{aligned} T &= \sum mv^2/2 = \sum mv'^2/2 = \sum m|\mathbf{v}'_0 + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'|^2/2 \\ &= Mv_0'^2/2 + M\mathbf{v}'_0 \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}') + \sum m|\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'|^2/2 \end{aligned}$$

Przy czym

$$\sum m|\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'|^2/2 = \boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{I}'\boldsymbol{\omega}'/2 = I'_{ab}\omega'_a\omega'_b/2$$

Przypadki szczególne. Często opłaca się ustawić początek układu bryły w środku masy co daje $\mathbf{R}' = 0$ znacząco upraszczając wzory:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V}, \mathbf{J} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \hat{I}_0\boldsymbol{\omega}, T = MV^2/2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{I}_0\boldsymbol{\omega}/2$$

dla $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ (predkość środka masy) a $\hat{I}_0$ jest momentem bezwładności liczonym względem środka masy. To samo jest jeśli $\mathbf{r}_0 = 0$ (stały punkt bryły):

$$\mathbf{P} = M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \mathbf{J} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}, T = \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{I}\boldsymbol{\omega}/2$$

Także tensor bezwładności można wyrazić $\hat{I}_0$. Dla bryły przesuniętej o $\mathbf{d}$ względem środka masy mamy twierdzenie Steinera

$$\hat{I} = \hat{I}_0 + M(d^2\hat{1} - \mathbf{d}\mathbf{d}), I_{ab} = I_{0ab} + M(d^2\delta_{ab} - d_ad_b)$$

Często mamy do czynienia z obrotami o stałą oś z (płaski ruch obrotowy). Wtedy do opisu wystarczy jeden kąt ϕ ($\vartheta = \psi = 0$) i tylko jedna składowa $I_{zz} = \sum m(x^2 + y^2)$ a twierdzenie

Steinera ma prostszą formę $I_{zz} = I_{0zz} + Md^2$ gdzie d jest długością rzutu $\mathbf{d}$ na płaszczyznę xy . Dla ruchu jednoosiowego wystarczy pisać $I \equiv I_{zz}$. Pewne bryły (np. jednorodny platoński: czworościan foremny, sześciąt, itd. a także kula i sfera wokół środka) mają izotropowy tensor bezwładności względem środka, tj. wszystkie wartości własne identyczne, równe I i wtedy $\hat{I} = I\hat{1}$ lub $I_{ab} = I\delta_{ab}$ taki tensor nie zależy od układu.

Osie główne. Zawsze można wybrać tak układ współrzędnych bryły aby tensor $\hat{I}$ był diagonalny, tj. $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$ (przez diagonalizację) Wtedy $I_{11} = I_x$, $I_{22} = I_y$, $I_{33} = I_z$ a energię bryły można zapisać poprzez

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{I}' \boldsymbol{\omega}' &= I'_x \omega_x'^2 + I'_y \omega_y'^2 + I'_z \omega_z'^2 \\ &= I'_x (\dot{\phi} \sin \psi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 + I'_y (\dot{\phi} \cos \psi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 + I'_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta)^2\end{aligned}$$

Bryły obrotowo symetryczne (walec, stożek, kula i sfera, także graniastosłup i ostrosłup prawidłowy) wokół osi z mają $I_x = I_y = I_\perp$ i wtedy

$$\boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{I}' \boldsymbol{\omega}' = I'_\perp (\omega_x'^2 + \omega_y'^2) + I'_z \omega_z'^2 = I'_\perp (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I'_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta)^2$$

a bryły izotropowe

$$\boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{I}' \boldsymbol{\omega}' = I(\omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2) = I(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\vartheta)$$

Więzy dla bryły sztywnej. Przeważnie bryła nie jest swobodna, ale zawieszona w 1 (ustalone $\mathbf{r}_0$ ale dowolne obroty) lub 2 punktach (ustalone $\mathbf{r}_0$ i obrót płaski). Mogą być także bryły zawieszone jedna na drugiej. Ponadto toczenie bez poślizgu wymaga równości prędkości brył w punkcie styku, a powierzchnia brył musi być gładka (z dokładnością do drobnych nierówności zapewniających tarcie statyczne). Przeważnie toczenie jest więzem nieholonomicznym, ale liniowym (piłka na boisku, moneta na stole). Czasem więz jest holonomiczny, kiedy są 2 (lub więcej) punkty styku. We wszystkich przypadkach obowiązuje poznana wcześniej zasada d'Alemberta i równania Lagrange'a. Tam gdzie wystarczą więzy holonomiczne będziemy stosowali równania II rodzaju a tam gdzie są jeszcze nieholonomiczne, uzupełnimy je o te więzy bądź odwołamy się do ogólnych równań ruchu i sił reakcji.

Siły tarcia i reakcji. Warunek toczenia wymaga aby (wzajemna) siła w punkcie styku miała obie składowe, prostopadłą $\mathbf{F}_R$ i równoległą $\mathbf{F}_T$ do powierzchni stycznej, zapewniając równe prędkości. Składowa równoległa jest tarcie statycznym, spełniającym warunek $F_T < fF_R$ gdzie f jest statycznym współczynnikiem tarcia. Złamanie nierówności umożliwia poślizg czyli niezerową prędkość względną $\mathbf{v}_T$. W trakcie poślizgu $\mathbf{F}_T$ ma kierunek zgodny w $\mathbf{v}_T$ (o ile np. chropowatość nie wyróżnia jakiegoś kierunku), ale przeciwny zwrot i wartość $F_T = \mu F_R$ gdzie μ jest kinetycznym współczynnikiem tarcia mniejszym od f . Współczynniki f i μ są empiryczne, zależą głównie od materiału. W opisie za pomocą równań Lagrange'a zwykle przyjmujemy tarcie statyczne – toczenie bez poślizgu, $f = \infty$, lub ślizganie bez tarcia $\mu = 0$ a nawet $f = 0$.

Ruch płaski. Jeśli każdy punkt bryły, a nawet układu brył, porusza się z prędkością stałą prostopadłą do ustalonego kierunku, umownie z . to ruch jest płaski. Wtedy prędkość kątowa ma stały kierunek $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) = \boldsymbol{\omega}'$, wektor $\mathbf{v}_0$ tylko składowe xy a do opisu obrotu wystarczy jeden kąt Eulera, ϕ (pozostałe $\vartheta = \psi = 0$) przy czym $\omega = \dot{\phi}$. Siły reakcji utrzymujące ruch płaski są w kierunku z . Upraszcza się także wzór na

$$\boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{I}' \boldsymbol{\omega}' = I_{zz} \omega^2 / 2, \quad J_z = I_{zz} \omega$$

Uwaga: Jeśli na bryłę nie działają żadne siły zewnętrzne (w tym reakcji) to $\mathbf{J}$ jest stały. Ruch płaski jest wtedy możliwy tylko gdy ω jest stała a także $I_{xz} = I_{yz} = 0$, tj. z jest jedną z osi głównych (zobaczmy to jeszcze przy analizie bąka swobodnego). Inaczej I_{xz} i I_{yz} dawałyby część $\mathbf{J}$ w płaszczyźnie xy , która musiałaby się obracać wokół z z częstością ω .

Wahadło fizyczne. Bryła zawieszona w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$ na ustalonej osi poziomej (prostopadłej go $\mathbf{g}$) Przyjmijmy oś z a pole $\mathbf{g} = (g, 0, 0)$. Będzie nas interesować jedynie część położenia środka masy w płaszczyźnie xy , tj. $\mathbf{R}_\perp = (R_x, R_y, 0)$ oraz $I = I_{zz}$. Długość $R_\perp = d$ jest stała. Energia potencjalna wynosi $-MgR_x$ a kinetyczna $I\omega^2/2$. Przyjmując jako zmienną niezależną kąt $\mathbf{R}_\perp$ z osią x jako ϕ mamy $L = I\dot{\phi}^2/2 + Mgd \cos \phi$ jest to zagadnienie równoważne wahadłu matematycznemu z $\ell = I/Md$ (częstość małych drgań wynosi $\sqrt{g/\ell}$) Jeśli mamy możliwość zawieszenia bryły na różnych, ale równoległych osiach (bryłę możemy obracać tylko wokół z) to możemy wykorzystać twierdzenie Steinera $I = I_0 + Md^2$, gdzie I_0 jest momentem bezwładności wokół osi zawierającej środka masy. Wtedy $\ell = d + I_0/Md$. Stąd widać że częstość wahań zależy tylko od d . Jest ponadto taka sama dla par d_1 i d_2 spełniających warunek $d_1 + d_2 = \ell$ a minimalna wartość wynosi $\ell_m = 2d_m$ dla $d = d_m = \sqrt{I_0/M}$. Powyższe własności wykorzystuje się w wahadle rewersyjnym Katera, aby mierzyć dokładnie g znając jedynie sumę $d_1 + d_2$ bez znajomości I_0 . Zamieniając dwa punkty zawieszenia sprawdza się czy okres wahań jest ten sam.

Bąk (ang. top). Przypadek swobodny. Na bryłę nie działają siły zewnętrzne (wypadkowo). Eliminujemy ewentualny ruch jednostajny środka masy przez przejście do układu z nim związanego. Wtedy $\dot{\mathbf{J}} = 0$ czyli

$$\dot{\mathbf{J}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{J}' = \hat{I}'\dot{\boldsymbol{\omega}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \hat{I}'\boldsymbol{\omega}' = 0$$

Ponadto jest zachowany moment pędu $\mathbf{J}$ a więc także $J'^2 = J^2$ oraz energia

$$T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}/2 = \boldsymbol{\omega}' \cdot \hat{I}'\boldsymbol{\omega}'/2$$

Niech bryła ma momenty główne, $I'_x \leq I'_y \leq I'_z$. Jeśli wszystkie są równe to mamy ruch o stałej ale dowolnej prędkości kątowej, a przypadek 2 równych omówimy później. Mamy 2 stałe ruchu

$$2T = I'_x\omega_x'^2 + I'_y\omega_y'^2 + I'_z\omega_z'^2$$

$$J^2 = I_x'^2\omega_x'^2 + I_y'^2\omega_y'^2 + I_z'^2\omega_z'^2$$

Wektor $\boldsymbol{\omega}'$ musi poruszać się więc po krzywej (tzw. polhoidii) będącej przecięciem obu elipsoid. Warunkiem istnienia przecięcia jest

$$2TI'_z \geq J^2 \geq 2TI'_x$$

a eliminując ω_y' otrzymujemy

$$I'_x(I'_x - I'_y)\omega_x'^2 + I'_x(I'_z - I'_y)\omega_z'^2 = J^2 - 2TI'_y$$

przy warunku

$$2T \geq I'_x\omega_x'^2 + I'_z\omega_z'^2$$

$$J^2 \geq I_x'^2\omega_x'^2 + I_z'^2\omega_z'^2$$

Jest to hiperbola bo $I'_z - I'_y \geq 0 \geq I'_x - I'_y$ a w szczególnym przypadku proste (dla $I'_x = I'_y$ lub $I'_z = I'_y$ lub $J^2 = 2TI'_y$). Ruch $\boldsymbol{\omega}$ odbywa się po tzw. herpolhoidii, która ze stałości $\mathbf{J}$ jest pewną płaszczyzną prostopadłą do $\mathbf{J}$ bo rzut $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} = 2T$ jest stały. Ponadto ta płaszczyzna jest w trakcie ruchu styczna do elipsoidy wyznaczonej przez $2T$. Polhodia i elipsoida $2T$ toczy się po herpolhoidii bez poślizgu. Mamy także

$$\omega_x'^2 = \frac{(2T - I'_y \omega_y'^2)I'_z - (J^2 - I_y'^2 \omega_y'^2)}{I'_x(I'_z - I'_x)}, \quad \omega_z'^2 = \frac{(2T - I'_y \omega_y'^2)I'_x - (J^2 - I_y'^2 \omega_y'^2)}{I'_z(I'_x - I'_z)}$$

czyli

$$\omega_x'^2 = \frac{2TI'_z - J^2 - I'_y(I'_z - I'_y)\omega_y'^2}{I'_x(I'_z - I'_x)}, \quad \omega_z'^2 = \frac{2TI'_x - J^2 - I'_y(I'_x - I'_y)\omega_y'^2}{I'_z(I'_x - I'_z)}$$

Przechodząc do równań ruchu otrzymujemy równania Eulera

$$I'_x \dot{\omega}'_x = (I'_y - I'_z)\omega'_y \omega'_z, \quad I'_y \dot{\omega}'_y = (I'_z - I'_x)\omega'_z \omega'_x, \quad I'_z \dot{\omega}'_z = (I'_x - I'_y)\omega'_x \omega'_y$$

Ze środkowego równania, wyrażając $\omega'_{x,z}$ przez ω'_y dostajemy

$$I'_y \sqrt{I'_x I'_z} \dot{\omega}'_y = \pm \sqrt{(2TI'_z - J^2 - I'_y(I'_z - I'_y)\omega_y'^2)(J^2 - 2TI'_x - I'_y(I'_y - I'_x)\omega_y'^2)}$$

Dla $J^2 < 2TI'_y$ podstawiamy

$$\omega'_y = \sqrt{\frac{J^2 - 2TI'_x}{I_y(I'_y - I'_x)}} \sin \alpha$$

przy $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ dostając

$$\sqrt{I'_y I'_x I'_z} \dot{\alpha} = \pm \sqrt{(2TI'_z - J^2)(I'_y - I'_x) - (J^2 - 2TI'_x)(I'_z - I'_y) \sin^2 \alpha}$$

a okres obiegu polhoidii wynosi

$$t_0 = 4 \sqrt{\frac{I'_x I'_y I'_z}{(2TI'_z - J^2)(I'_y - I'_x)}} K(k)$$

(całka eliptyczna) przy

$$k^2 = \frac{(J^2 - 2TI'_x)(I'_z - I'_y)}{(2TI'_z - J^2)(I'_y - I'_x)}$$

Dla $J^2 > 2TI'_y$ podstawiamy

$$\omega'_y = \sqrt{\frac{2TI'_z - J^2}{I_y(I'_z - I'_y)}} \sin \alpha$$

dostając

$$\sqrt{I'_y I'_x I'_z} \dot{\alpha} = \pm \sqrt{(J^2 - 2TI'_x)(I'_z - I'_y) - (2TI'_z - J^2)(I'_y - I'_x) \sin^2 \alpha}$$

a okres obiegu polhoidii wynosi

$$t_0 = 4 \sqrt{\frac{I'_x I'_y I'_z}{(J^2 - 2TI'_x)(I'_z - I'_y)}} K(k)$$

przy

$$k^2 = \frac{(2TI_z - J^2)(I'_y - I'_x)}{(J^2 - 2TI_x)(I'_z - I'_y)}$$

Bąk swobodny symetryczny. Jeśli $I'_x = I'_y = I'_\perp \neq I'_z$ to równania Eulera upraszczają się. Przede wszystkim $\omega'_z = \text{const}$, co powoduje że pozostałe równania stają się liniowe ze stałą częścią prostopadłą $\omega'_\perp = \sqrt{\omega'^2_x + \omega'^2_y}$. Wektor $\boldsymbol{\omega}'$ kręci się wokół osi z' z częstością $\omega'_z(I'_z/I'_\perp - 1)$ (precesja). Może być dodatnia (ruch przeciwnie do zegara patrząc od strony dodatnich z lub ujemna – zgodnie z zegarem). Polhodia i herpolhodia są jednostajnie obieganymi okręgami o stałym wzajemnym nachyleniu. W układzie inercyjnym zachowane jest $\mathbf{J}$. Jeśli $I'_z > I'_\perp$ to $\mathbf{J}'$ jest bliżej osi z' niż $\boldsymbol{\omega}'$ a jeśli $I'_z < I'_\perp$ to dalej. Z kolei rzut $\boldsymbol{\omega}'$ na $\mathbf{J}'$ jest równy $2T = I'_\perp \omega'^2_\perp + I'_z \omega'^2_z$. Częstość precesji w układzie inercyjnym będzie równa częstości precesji nieinercyjnej pomnożonej przez $\omega'_\perp/\omega_0$ gdzie ω_0 jest rzutem $\boldsymbol{\omega}'$ na płaszczyznę prostopadłą do $\mathbf{J}'$ czyli $\omega_0 = (I_z - I_\perp)\omega'_\perp\omega'_z/J$. Częstość inercyjnej precesji wynosi więc $J/I_\perp$.

Bąk symetryczny ciężki. Założymy $I'_x = I'_y = I'_\perp$ i położenie środka masy na osi z' oraz pole grawitacyjne $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Wtedy używając kątów Eulera

$$2T = I'_\perp(\dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + I'_z(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2, \quad V = MgR \cos \vartheta$$

gdzie R jest odległością środka masy od punktu zawieszenia. Ze względu na cykliczność ϕ i ψ mamy 2 stałe ruchu, oprócz energii,

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I'_z(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})$$

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I'_\perp \dot{\phi} \sin^2 \vartheta + p_\psi \cos \vartheta$$

Możemy za pomocą tych stałych wyeliminować $\dot{\phi}$ i $\dot{\psi}$ zostawiając tylko ϑ w energii

$$(p_\phi - p_\psi \cos \vartheta)^2 / 2I'_\perp \sin^2 \vartheta + I'_\perp \dot{\vartheta}^2 / 2 + MgR \cos \vartheta = E' = E - p_\psi^2 / 2I'_\perp$$

Podstawiając $u = \cos \vartheta$, $\dot{u} = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta$ mamy

$$\dot{u}^2 = 2(1 - u^2)(E' - MgRu) / I'_\perp - (p_\phi - p_\psi u)^2 / I'^2_\perp$$

Prawa strona jest wielomianem sześciennym od u ujemnym dla $u = \pm 1$ przy czym $u \in [-1, 1]$. Zatem będzie istnieć dokładnie określony przedział $[u_-, u_+]$ w którym prawa strona jest dodatnia i może się odbywać ruch. Dokładna zależność $u(t)$ jest znowu wyrażana całką eliptyczną, chyba że przedział jest zaniedwalnie mały.

Żyroskop. Bryła symetryczna, $I'_x = I'_y = I'_\perp$ ma oś z' ograniczoną do ustalonej płaszczyzny xz i stały środek masy (unieruchomiony np. odpowiednim zawieszeniem). Wtedy $\phi = 0$. Niech dodatkowo cały żyroskop znajduje się w układzie nieinercyjnym, obracającym się ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\Omega}$. Dla uproszczenia założymy $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega_y, \Omega_z)$ Prędkości kątowe zapiszemy nie w układzie bryły ale w układzie tworzonym przez osie y, z' i x'' prostopadłą do nich. Mamy tylko

$$\omega_y = \dot{\vartheta}, \omega'_z = \dot{\psi}$$

oraz

$$\Omega_x'' = -\Omega_z \sin \vartheta, \quad \Omega_z' = \Omega \cos \vartheta$$

Biorąc pod uwagę całkowitą prędkość kątową $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}$ mamy

$$2T = I_{\perp}'(\Omega_z^2 \sin^2 \vartheta + (\Omega_y + \dot{\vartheta})^2) + I_z'(\Omega_z \cos \vartheta + \dot{\psi})^2$$

Przy braku innych sił mamy stałą ruchu

$$p_{\psi}/I_z' = \frac{\partial T}{I_z' \partial \dot{\psi}} = \dot{\psi} + \Omega_z \cos \vartheta = \omega_1$$

Ponadto

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = I_{\perp}'(\dot{\vartheta} + \Omega_y)$$

Zatem

$$\dot{p}_{\vartheta} = I_{\perp}'\ddot{\vartheta} = I_{\perp}'\Omega_z^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - I_z'\Omega_z\omega_1 \sin \vartheta$$

co daje małe oscylacje wokół $\vartheta = 0$ z częstością

$$\sqrt{I_z'\Omega_z\omega_1/I_{\perp}' - \Omega_z^2}$$

Przykłady toczenia z więzami nieholonomicznymi. Jednorodna kula lub sfera na stole w obecności innych sił $\mathbf{F}$ działających na jej środek masy. Współrzędne punktu na stole (x, y) w którym kula styka się ze stołem oraz ϕ, θ, ψ kąty Eulera.

mamy

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + k\omega^2)$$

gdzie $k = I/m$ jest równe $2R^2/5$ dla kuli jednorodnej lub $2R^2/3$ dla powłoki (piłka), natomiast

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta$$

oraz

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi, \quad \omega_y = \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi, \quad \omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

natomiast równania więzów nieholonomicznych są

$$\dot{x} - R\omega_y = 0, \quad \dot{y} + R\omega_x = 0$$

Z tych równań wynika także, że $R\omega^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$. Ponadto równanie Lagrange'a dla ϕ daje zachowanie $\partial L/\partial \dot{\phi} = mk\omega_z$ (bo L nie zależy od ϕ a więzy od $\dot{\phi}$). Zachowana jest także energia $E = m(1 + k/R^2)v^2/2 + mgx$. Uwaga, moglibyśmy wprowadzić dodatkowy więz braku wirowania w punkcie styku wokół osi z tj. $\omega_z = 0$. wtedy jednak

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mk\dot{\omega}_z = C$$

(mnożnik tego więzu) ale $\dot{\omega}_z = 0$ czyli $C = 0$ i ten więz odpada. Pozostałe równania Lagrange'a mają postać

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda, \quad m\ddot{y} = F_y + \mu$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_z &= \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = 0 \\ mk d(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)/dt &= mk(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) = \lambda R \sin \theta \cos \phi + \mu R \sin \theta \sin \phi \\ mk(\ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta) &= \mu R \cos \phi - \lambda R \sin \phi\end{aligned}$$

Z tych równań otrzymujemy

$$mk(\ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) = R(\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi)$$

i dalej

$$mk\dot{\omega}_x = R\mu, \quad mk\dot{\omega}_y = -R\lambda$$

Moneta na stole. Koło o promieniu R o symetrii osiowej i momentach $I'_\perp$ i I'_z o ostrej krawędzi może toczyć się tylko podłużnie. Oś z' jest osią monety a z jest prostopadła do stołu, x, y są współrzędnymi punktu styku. Środek masy ma położenie $x + R \cos \vartheta \sin \phi, y - R \cos \vartheta \cos \phi, R \sin \vartheta$

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \vartheta + R^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{I'_\perp}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{I'_z}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta)^2 \\ &\quad + mR(\dot{\phi} \cos \vartheta(\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi) - \dot{\vartheta} \sin \vartheta(\dot{x} \sin \phi - \dot{y} \cos \phi))\end{aligned}$$

oraz $V = mgR \sin \vartheta$. Z kolei więzy na styku mają postać

$$\dot{x} - R\dot{\psi} \cos \phi = 0 = \dot{y} - R\dot{\psi} \sin \phi$$

lub alternatywnie

$$\dot{x} \sin \phi - \dot{y} \cos \phi = 0 = \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi - R\dot{\psi}$$

Energia $T + V$ jest zachowana bo więzy nie mają wyrazu wolnego (bez prędkości). Mamy

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + mR(\dot{\phi} \cos \vartheta \cos \phi - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \phi) \\ p_y &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + mR(\dot{\phi} \cos \vartheta \sin \phi + \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \phi) \\ p_\phi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} \cos^2 \vartheta + I'_\perp \dot{\phi} \sin^2 \vartheta + I'_z \cos \vartheta(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta) + mR \cos \vartheta(\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi) \\ &= I'_\perp \dot{\phi} \sin^2 \vartheta + (mR^2 + I'_z) \cos \vartheta(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta) \\ p_\vartheta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = (mR^2 + I'_\perp) \dot{\vartheta} - mR \sin \vartheta(\dot{x} \sin \phi - \dot{y} \cos \phi) = (mR^2 + I'_\perp) \dot{\vartheta} \\ p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I'_z(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta)\end{aligned}$$

oraz równania Lagrange'a

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= A \sin \phi + B \cos \phi, \quad \dot{p}_y = -A \cos \phi + B \sin \phi, \quad \dot{p}_\psi = -BR \\ \dot{p}_\phi &= \frac{\partial T}{\partial \phi} = mR(-\dot{\vartheta} \sin \vartheta(\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi) - \dot{\phi} \cos \vartheta(\dot{x} \sin \phi - \dot{y} \cos \phi)) = -mR^2 \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_\vartheta &= \frac{\partial(T-V)}{\partial\vartheta} = (I'_\perp - mR^2)\dot{\phi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - I'_z \dot{\phi} \sin\vartheta(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\vartheta) \\ &+ mR(\dot{\vartheta} \cos\vartheta(\dot{x} \sin\phi - \dot{y} \cos\phi) - \dot{\phi} \sin\vartheta(\dot{x} \cos\phi + \dot{y} \sin\phi)) - mgR \cos\vartheta \\ &= I'_\perp \dot{\phi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - (mR^2 + I'_z)\dot{\phi} \sin\vartheta(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\vartheta) - mgR \cos\vartheta\end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia $p_1 = p_x \sin\phi - p_y \cos\phi$, $p_2 = p_x \cos\phi + p_y \sin\phi$. Wtedy

$$p_1 = mR\dot{\vartheta} \sin\vartheta, \quad p_2 = mR(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\vartheta) = mRp_\psi/I'_z$$

oraz

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= (\dot{p}_x \sin\phi - \dot{p}_y \cos\phi) + p_2 \dot{\phi} = A + p_2 \dot{\phi} \\ \dot{p}_2 &= (\dot{p}_x \cos\phi + \dot{p}_y \sin\phi) - p_1 \dot{\phi} = B - p_1 \dot{\phi} = -p_1 \dot{\phi} - \dot{p}_\psi/R\end{aligned}$$

Zbierając to razem

$$\begin{aligned}p_\phi &= I'_\perp \dot{\phi} \sin^2\vartheta + (1 + mR^2/I'_z)p_\psi \cos\vartheta, \quad p_\vartheta = (mR^2 + I'_\perp)\dot{\vartheta} \\ \dot{p}_\phi &= -mR^2\dot{\psi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \\ (mR^2 + I'_\perp)\ddot{\vartheta} &= \dot{p}_\vartheta = I'_\perp \dot{\phi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - (1 + mR^2/I'_z)p_\psi \dot{\phi} \sin\vartheta - mgR \cos\vartheta \\ (1 + mR^2/I'_z)\dot{p}_\psi &= -Rp_1 \dot{\phi} = -mR^2 \dot{\phi} \dot{\vartheta} \sin\vartheta \\ I'_\perp (\ddot{\phi} \sin\vartheta + 2\dot{\phi}\dot{\vartheta} \cos\vartheta) &= -p_\psi \dot{\vartheta}\end{aligned}$$

Natomiast

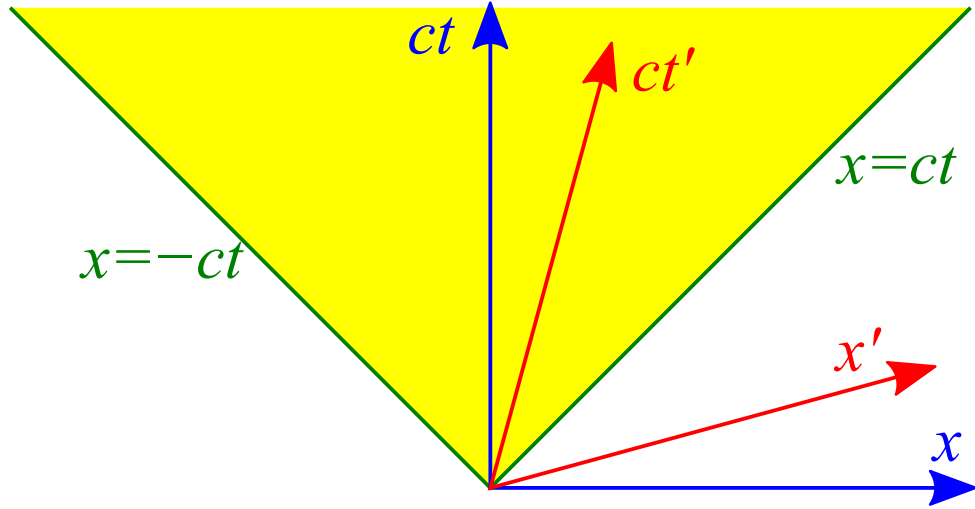
$$T = \frac{1 + mR^2/I'_z}{2I'_z} p_\psi^2 + \frac{I'_\perp + mR^2}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{I'_\perp}{2} \dot{\phi}^2 \sin^2\vartheta$$

W ogólności ruch monety jest dość chaotyczny i wrażliwy na warunki początkowe.

Wykład 6

Szczególne teoria względności. Idea szczególnej teorii względności polega na narzuceniu warunku niezmienności praw ruchu dla pewnych przekształceń czasu i przestrzeni. Wspólną cechą tych przekształceń jest stała prędkość światła, ale nie trzeba od tego warunku zaczynać. W konstrukcji teorii względności istotną rolę odegrały nie tylko ważne doświadczenia np. eksperyment Michelsona-Morley'a czy 19.-wieczne badania aberracji światła gwiazdowego, ale właśnie spójny zapis matematyczny. Trzeba też pamiętać że szczególna teoria względności została później zastąpiona przez ogólną, gdzie prędkość światła jest zasadniczo umowna, a także że nie wynikają z niej konkretne równania ruchu (takie jak Newtona) a jedynie ważne ograniczenia. Tym samym słuszność szczególnej, ale i ogólnej teorii względności jest zawsze powiązana z konkretnym modelem dynamiki (klasycznej, kwantowej lub innej zupełnie abstrakcyjnej) i jej doświadczalną weryfikacją.

Zbudujemy klasę przekształceń czasu i przestrzeni (czasoprzestrzeni) spełniających określone warunki względności. Przekształcenia te można rozumieć jako zmianę układu odniesienia, podobnie jak robiliśmy to dla obrotów lub transformacji Galileusza. Dla uproszczenia przestrzeń zredukujemy do 1 wymiaru (później pokażemy że więcej wymiarów niewiele zmienia). Mamy



Rysunek 2: Osie transformacji Lorentza od układu U' (czerwony) do U (niebieski). Ruch światła (zielony) nie zależy od układu. Obszar przyczynowy żółty.

więc przekształcenia $(t', x') \rightarrow (t, x)$ przeprowadzające odpowiednio czas i położenie (jednowymiarowe) w układzie U' do czasu i położenia w układzie U . Założymy że przekształcenie jest liniowe tj.

$$t = At' + Bx', \quad x = Ex' + Dt'$$

gdzie A, B, C, D są stałymi zależącymi tylko od przyjętych układów U' i U . Punkt $(t', 0)$ przechodzi na $(t, x) = (At', Dt')$ więc U' porusza się względem U z prędkością $x/t = v = D/A$. Analogicznie na $(t, 0)$ przechodzi $(t', x') = (Et/(AE - BD), tD/(BD - AE))$ więc U porusza się względem U' z prędkością $x'/t' = v' = -D/E$. Założymy wzajemną względność czyli $v' = -v$ i wtedy $A = E$. Założymy także że transformacja zależy wyłącznie od v i podlega składaniu co w istocie oznacza że

$$\begin{pmatrix} A & B \\ D & A \end{pmatrix} = \exp w \begin{pmatrix} a & b \\ d & a \end{pmatrix}$$

gdzie a, b, d są stałymi niezależnymi od v natomiast $w(v)$ jest pewną funkcją taką że $w(0) = 0$ (ten sam układ). Dla bardzo małych prędkości v możemy to rozwinąć liniowo $A = 1 + aw$, $B = bw$, $D = dw$. W takim razie $v = dw$ w przybliżeniu liniowym. Możemy przeskalować w tak aby $d = 1$. Przyjmiemy że transformacja nie wyróżnia kierunku prędkości we współczynniku A do daje $a = 0$. Został nam tylko jeden wolny parametr b który może być dodatni lub ujemny. Ujemny daje zwykłe obroty co odrzucamy bo chcemy mieć przyczynowość tj. $A > 0$ dla każdego v (zakładamy że czas płynie do przodu, nawet jeśli przeskalowany). Natomiast dla $b > 0$ przyjmujemy $b = 1/c^2$ gdzie c jest pewną (stałą) prędkością. Oczywiście teraz już możemy przyjąć że jest to prędkość światła i jest zachowana w każdym układzie.

Możemy też zapisać przekształcenie w formie transformacji Lorentza

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2), \quad x = \gamma(x' + vt'), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Przechodząc do 3 wymiarów przestrzennych wprowadzimy ogólną notację pochodzącą od Einsteina i Lorentza. Czteropolożenie $x^0 = ct$ (czas przeskalowany przez c), $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ (położenie w przestrzeni 3-wymiarowej). Tensor metryczny

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Indeksy górne i dolne (litery greckie) x^μ (te zdefiniowaliśmy), x_μ (będą trochę inne)

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{dla } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{dla } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{dla } \mu \neq \nu \end{cases}$$

konwencja sumacyjna

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu$$

(zawsze pary wskaźników) i wtedy

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

czyli $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$, $x_3 = -x^3$. Dla odróżnienia będziemy pisać czterowektory czcionką zwykłą, a stare przestrzenne trójwymiarowe pogrubioną

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}), \quad x \cdot y = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

gdzie $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$ jest starym iloczynem skalarnym. Ogólne przekształcenia Lorentza mają postać macierzy $\hat{\Lambda}$ takich że

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu$$

zachowujące *interwał* czyli

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = x'^\mu x'_\mu = x' \cdot x'$$

lub macierzowo $\hat{\Lambda}^T \hat{g} \hat{\Lambda} = \hat{g}$ lub wskaźnikowo

$$\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu g^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}$$

Uwaga: Ogólnie te warunki dopuszczają także odbicie czasu $x^0 = -x'^0$ i całej czasoprzestrzeni $x^\mu = -x'^\mu$. Aby pozostać w grupie tradycyjnych przekształceń zastrzeżemy $\Lambda^0{}_0 > 0$ oraz $\det \hat{\Lambda} = +1$. W ten sposób mamy tradycyjne transformacje Lorentza w dowolnym kierunku $v \rightarrow \mathbf{v}$ (jeśli $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ to $y = y'$, $z = z'$ i ogólnie nie zmieniają się współrzędne prostopadłe do $\mathbf{v}$), obroty bez zmiany czasu i ich kombinacje. Jest to tzw. grupa $SO^+(1, 3)$ albo właściwa grupa Lorentza.

Transformacje (grupe) Lorentza można wyprowadzić też z liniowości i stałości prędkości światła w dowolnym kierunku. Załóżmy że $x' \cdot x' = 0$ (ruch z prędkością światła) implikuje $x \cdot x = 0$ (nadal ruch prędkością światła). Z częściowej dowolności x' wynika

$$\hat{\Lambda}^T \hat{g} \hat{\Lambda} = \lambda \hat{g}$$

gdzie λ jest pewnym czynnikiem. Obliczając wyznacznik dostaniemy $\lambda^4 = \det^2 \hat{\Lambda}$. Widać że możemy każdą $\hat{\Lambda}$ rozłożyć na właściwą tj. $\det \hat{\Lambda} = 1$ i pewien globalny czynnik. Ponieważ ów czynnik musiałby albo być niezależny od prędkości albo wyróżniać jakiś kierunek (np. $\lambda = \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})$), pominiemy go z założenia. Uwaga: w ogólnej teorii względności można dopuścić $\lambda \neq 1$, jednak powoduje to globalne proporcjonalne przeskalowanie całej przestrzeni, ujęte np. w tzw. stałej kosmologicznej.

Dylatacja czasu: W układzie U' czas płynie wolniej tj. $t = \gamma t'$. Skrócenie Lorentza. Obiekt spoczywający w U' o długości L' (wzdłuż kierunku prędkości względnej) ma w U długość L'/γ bowiem stosujemy warunek $t = 0$ w U . Składanie prędkości. Niech U' porusza się z prędkością $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ względem U . Jeśli w U' obiekt porusza się z prędkością $\mathbf{V}' = (V'_x, V'_y, V'_z)$ to $x' = (ct', V'_x t', V'_y t', V'_z t')$ czyli

$$t = t' \gamma (1 + v V'_x / c^2), \quad x = t' \gamma (V'_x + v), \quad y = V'_y t', \quad z = V'_z t'$$

to w układzie U porusza się z prędkością $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$

$$V_x = \frac{x}{t} = \frac{V'_x + v}{1 + v V'_x / c^2}, \quad V_y = \frac{y}{t} = \frac{V'_y / \gamma}{1 + v V'_x / c^2}, \quad V_z = \frac{z}{t} = \frac{V'_z / \gamma}{1 + v V'_x / c^2},$$

Efekt Dopplera: Jeśli w układzie U' poruszającym się z prędkością $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ względem U porusza się fala z prędkością światła o częstotliwości ω w tym samym kierunku to funkcja falowa ma postać $\cos(\omega'(t' - x'/c))$ W układzie U ta funkcja ma postać

$$\cos(\omega' \gamma (t - xv/c^2 - (x - tv)/c)) = \cos(\omega' \gamma (1 + v/c)(t - x/c))$$

co oznacza że w U fala ma częstotliwość

$$\omega = \omega' \gamma (1 + v/c) = \omega' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Relatywistyczny punkt materialny. Punkt ma pewną trajektorię w czasoprzestrzeni $x(\xi) = (x^0(\xi), x^1(\xi), x^2(\xi), x^3(\xi))$ dla parametru rzeczywistego ξ . Aby móc analizować ruch zgodnie z teorią względności lokalnie wzdłuż trajektorii, nie możemy wybrać $t = \xi$. Również długość (element długości) trajektorii $\sqrt{(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}$ nie spełnia wymogu niezmienniczości. Naturalnym odpowiednikiem relatywistycznym długości jest infinitesimalny interwał $(ds)^2 = dx \cdot dx$. Przy tym założymy czas płynie dodatnio a chwilowa prędkość punktu $= d\mathbf{x}/dt$ nie przekracza c co do wartości. Wtedy możemy zdefiniować różniczkowy *czas własny*

$$d\tau = \sqrt{dx \cdot dx} / c$$

lub całkowo

$$\tau = \int \frac{d\xi}{c} \sqrt{\frac{dx}{d\xi} \cdot \frac{dx}{d\xi}}$$

Jeśli patrzymy na ruch punktu w ustalonym układzie U to możemy użyć chwilowej prędkości punktu (w tym układzie)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}/d\xi}{dt/d\xi} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

i możemy użyć już parametryzacji przez t (czas w U) Wtedy $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ lub

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

W tym zapisie nie widać jawnie niezmienniczości τ ponieważ ustaliliśmy pewien układ U . Czas własny jest w praktyce czasem mierzonym przez zegar podążający wraz z punktem. Ponieważ sam jest wielkością niezależną od układu (niezmienniczą), może być parametrem trajektorii i daje nowy czterowektor, prędkość własną $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/d\tau$. Uwaga: prędkość własna spełnia warunek $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = c^2$ a więc

$$u^0 = \sqrt{c^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = c\gamma(v)$$

Zauważmy też że

$$\mathbf{u} = \gamma(v)\mathbf{v}$$

Masa, pęd i energia. Dla danego punktu zapostulujemy dodatni parametr niezmienniczy m , masę (spoczynkową) i czteropęd $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ gdzie

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \gamma(v)m\mathbf{v}$$

będzie utożsamimy z pędem przestrzennym natomiast

$$p^0 = E/c = mc\gamma$$

gdzie E utożsamimy z energią. Gdy $v = 0$ to $E = mc^2$. Dla małych prędkości mamy

$$E \simeq mc^2 + mv^2/2$$

zgodnie z teorią Newtona. Ponieważ oddziaływania na odległość byłyby sprzeczne z relatywistyczną niezmienniczością, to nie możemy automatycznie przenieść zasad dynamiki Newtona do teorii względności. Istotnymi zasadami słusznymi nadal w relatywistyce jest zachowanie całkowitego pędu i energii czyli czteropędu. Jeśli mamy układ punktów materialnych o pędach $p_1, p_2, \dots$ to zachowany jest całkowity czteropęd

$$P = \sum_j p_j$$

Zasady te można wykorzystać do badania np. punktowych zderzeń (punkty trafiają w siebie dokładnie). Mamy także $p \cdot p = m^2 c^2$ czyli $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}|^2}$. Punkty o zerowej masie spoczynkowej $m = 0$ także mogą mieć pęd i energię, ale muszą poruszać się z prędkością światła, tj. $|\mathbf{v}| = c$ a także $\mathbf{p} = \mathbf{v}E/c^2$ oraz $E = c|\mathbf{p}|$.

Z kolei do badania ruchu w polu sił zewnętrznych podejmiemy konstruując równania Lagrange'a. Formalizm Lagrange'a jest akceptowalny w teorii względności gdyż zasada wariacyjna

Hamiltona musi dawać tę samą trajektorię w każdym układzie odniesienia. Do niezmienniczości wystarczy niezmienniczość działania czyli całki

$$\int dt L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

Widać że w tej formie jest wyróżniony jakiś układ odniesienia. Dlatego najpierw uogólnimy zasadę wariacyjną Hamiltona na przypadek dowolnej parametryzacji trajektorii $x(\xi)$, w tym czasie. Tym samym będziemy mieli 4 (położenie i czas) a nie 3 (samo położenie) współrzędne i 4 (a nie 3) prędkości $dx/d\xi$. Uogólniony Lagrangian $\mathcal{L}$ i działanie ma postać

$$\int d\xi \mathcal{L}(x, dx/d\xi = \dot{x}, \xi)$$

W zasadzie wariacyjnej ustalone będzie całe początkowe i końcowe czteropozłożenie. Mamy więc

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{x=a}^{x=b} d\xi \mathcal{L}(x, \dot{x}, \xi) = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu \right) d\xi = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{d \delta x^\mu}{d\xi} \right) d\xi \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu d\xi + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right|_a^b = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu d\xi \end{aligned}$$

co daje

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

Oczekujemy formy

$$\int d\xi \mathcal{L}(x, \dot{x}, \xi)$$

gdzie $\mathcal{L}$ zawiera funkcje od niezmienników tj. $\dot{x} \cdot \dot{x}$, $x \cdot \dot{x}$ i $x \cdot x$. Ewentualnie $\mathcal{L}$ może zależeć od potencjałów zewnętrznych ale także w sposób niezmienniczy. Zauważmy że jeśli tylko $\mathcal{L}$ nie zależy wprost od ξ (a jedynie od x i $\dot{x}$), co jest naturalne, to mamy zachowaną wielkość

$$\dot{x}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \mathcal{L}$$

Potencjał skalarny $V(x)$ lub czteropotencjał $A(x) = (A^0, \mathbf{A})$. Zapostulujemy postać

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} - q\dot{x} \cdot A(x)$$

gdzie q jest ładunkiem punktu (niezmienniczym), $A^0 = \Phi/c$ gdzie Φ jest potencjałem elektrostatycznym a $\mathbf{A}$ jest wektorowym potencjałem magnetycznym. Przypomnijmy też że $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. W tym przypadku wspomniana wielkość zachowana tożsamościowo się zeruje, ale też postać działania nie zmieni się gdy dowolnie przeskalujemy ξ , tj. zastąpimy przez $\tilde{\xi}(\xi)$ (dowolną funkcję monotoniczną). Pole elektryczne można też zapisać za pomocą tensora pola $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$ (antysymetrycznego) gdzie

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Wtedy

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

dla $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, tj. $F_{01} = E_x/c = -F_{10}$, $F_{21} = B_z = -F_{12}$ itd.

Wyprowadzimy równania ruchu korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju. Dlatego równania wyprowadzimy w określonym układzie odniesienia, ale zobaczymy że nadal mają formę niezmienniczą. Mamy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -\frac{mc\dot{x}}{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}} - qA$$

czyli

$$\frac{d}{d\xi} \frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}} + q\dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu$$

czyli

$$\frac{d}{d\xi} \frac{mc\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}} = q\dot{x}_\nu F^{\mu\nu}$$

Wybierając $\xi = \tau$ dostaniemy

$$m\ddot{x}^\mu = q\dot{x}_\nu F^{\mu\nu}$$

natomiast dla $\xi = t$

$$\dot{\mathbf{p}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

oraz $\dot{E} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ czyli zmianę energii wywołuje praca pola elektrycznego. Gdybyśmy wprowadzili ogólniejszą postać

$$\mathcal{L} = f(\dot{x} \cdot \dot{x}) - q\dot{x} \cdot A$$

to

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 2x_\mu f' - qA_\mu$$

czyli równania ruchu są

$$-\frac{d}{d\xi}(2\dot{x}^\mu f') = q\dot{x}_\nu F^{\mu\nu}$$

ale jednocześnie mamy wielkość zachowaną

$$2\dot{x} \cdot \dot{x} f' - f = C$$

będzie to spełnione dla $f = M\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} - C$ ale to już znamy (stała C jest nieistotna). Druga możliwość to stałe $\dot{x} \cdot \dot{x}$. Z antysymetrii F wynika

$$-\dot{x}_\mu \frac{d}{d\xi}(2\dot{x}^\mu f') = \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Rozkładając lewą stronę dostaniemy

$$(f' + 2(\dot{x} \cdot \dot{x})f'')d(\dot{x} \cdot \dot{x})/d\xi = 0$$

czyli faktycznie $f = M\sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} - C$ lub stałe $\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = R$ co oznacza także $c\tau = R^{1/2}\xi$. W drugim przypadku równania ruchu pozostaną takie same jeśli $2f'(R) = -mcR^{-1/2}$, np. dla $R = c^2$ wystarczy $f = -m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}/2$

Jeśli wrócimy do wersji tradycyjnej $L(\mathbf{x}, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, t)$ to w istocie $t = \xi$ i wtedy mamy

$$L = -mc^2/\gamma - q\Phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

przy $\gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2/c^2)^{-1/2}$. Wtedy otrzymamy *te same* równania ruchu co wcześniej, mimo że nie widać jawnie niezmienniczości. Możemy także otrzymać pędy uogólnione

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} + q\mathbf{A}$$

oraz hamiltonian

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2|\mathbf{p} - q\mathbf{A}|^2} + q\Phi$$

Taki brak jawnej niezmienniczości utrudnia tworzenie ogólniejszych modeli dynamiki zgodnej z teorią względności.

Wykład 7

Mechanika ośrodków ciągłych. Hydrodynamika. Układ wielu punktów materialnych zastąpimy ciągłym ich rozkładem. Mamy gęstość masy $\rho(\mathbf{r}, t)$ (rzeczywista, dodatnia funkcją czasu t i przestrzennego położenia $\mathbf{r} = (x, y, z) = (r_1, r_2, r_3)$, oraz lokalną prędkość $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Nie rozpartujemy tutaj teorii względności (jest to możliwe, ale dużo trudniejsze). W związku z tym założymy zasadę zachowania masy. Jeśli ustalimy pewną objętość (wirtualnie) V to zawarta w niej masa (w danym momencie)

$$M_V(t) = \int dV \rho(\mathbf{v}, t)$$

może zmieniać się tylko poprzez przepływ przez powierzchnię, tj.

$$\dot{M}_V = - \oint \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

gdzie $d\mathbf{S}$ jest elementem powierzchni skierowanym na zewnątrz bryły. Dokładniej $d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v du dv$ jeśli bryła jest opisywana $\mathbf{r}(u, v, h)$, $h \in [0, 1]$ a jej powierzchnia ma $h = 1$. $\mathbf{r}_u = \partial_u \mathbf{r} \equiv \partial \mathbf{r} / \partial u$ itd. oraz jakobian $J = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_h] > 0$ Na mocy twierdzenia Gaussa otrzymujemy różniczkowe równanie ciągłości

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) = 0$$

gdzie $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ jest wektorowym operatorem różniczkowania, w tym przypadku dywergencją. Jeśli ρ jest stałe (nigdy nie jest tak dokładnie, patrz np. prędkość dźwięku) to $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Z kolei równania dynamiki Newtona oznaczają że pęd w danej objętości tj.

$$\mathbf{P}_V(t) = \int dV \rho \mathbf{v}$$

także może zmieniać się tylko przez przepływ przez powierzchnię, tj.

$$\dot{\mathbf{P}}_V = - \oint d\mathbf{S} \cdot \hat{\Pi}(\mathbf{r}, t) + \int dV \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$$

gdzie $\hat{\Pi}$ jest tensorem napięć (macierz 3×3) o składowych Π_{ij} czyli

$$\dot{P}_{i,V} = \oint dS_j \Pi_{ji}(\mathbf{r}, t) + \int dV f_i(\mathbf{r}, t)$$

Tu i dalej stosujemy konwencję sumacyjną $a_j b_j \equiv \sum_{j=1}^3 a_j b_j$, natomiast $\mathbf{f}$ oznacza gęstość sił zewnętrznych. Na mocy twierdzenia Gaussa dostajemy równanie różniczkowe

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \hat{\Pi} + \mathbf{f}$$

albo na składowych

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_j \Pi_{ji} + f_i$$

Moment pędu w danej objętości jest dany

$$\mathbf{J}_V = \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int dV (\mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho)$$

a jednocześnie

$$\partial_t \mathbf{j} = -\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \hat{\Pi}) + \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

lub

$$\partial_t j_i = -\epsilon_{ikl} r_k \partial_m \Pi_{ml} + \epsilon_{ikl} r_k f_l = -\partial_m (\epsilon_{ikl} r_k \Pi_{ml}) + \epsilon_{ikl} \Pi_{kl} + \epsilon_{ikl} r_k f_l$$

a więc

$$\dot{J}_{i,V} = - \oint dS_m \epsilon_{ikl} r_k \Pi_{ml} + \int dV \epsilon_{ikl} (f_l + \Pi_{kl})$$

Założymy że siły wewnątrz płynu są centralne czyli moment pędu zmienia się jedynie pod wpływem sił zewnętrznych $\mathbf{f}$ i przepływów odpowiadających całkom powierzchniowym. Możemy podzielić $\hat{\Pi}$ na część symetryczną $2\hat{\Pi}_s = \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^T$ i antysymetryczną $2\hat{\Pi}_a = \hat{\Pi} - \hat{\Pi}^T$. Dla symetrycznej jest spełnione $\epsilon_{ikl} \Pi_{kl,s} = 0$ a antysymetryczna musiałaby przyjąć postać $\Pi_{kl,a} = \epsilon_{ikl} \partial_m b_{mi}$ z pewnym kolejnym tensorem $\hat{b}$. Przyjmijmy że $\hat{b} = 0$.

Płyn idealny. Jest opisywany jedynie przez ciśnienie $p(\mathbf{r}, t) > 0$

$$\hat{\Pi} = p\hat{1} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}, \quad \Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j$$

Założymy także że ciśnienie jest funkcją gęstości tj. $p = p(\rho)$. Wymaga to założenia adiabatyczności tj. stałej entropii na jednostkę masy, s . Ważne: w rzeczywistości nawet w równowadze ciśnienie zależy od s tj. $p = p(\rho, s)$ a zatem rozpatrujemy przypadek kiedy s jest stałe w całej dostępnej przestrzeni i czasie. Zaniedbujemy także (na razie) procesy nierównowagowe, lepkość i przepływ ciepła.

Zastosowania: Równanie Bernoulliego. Wprowadzimy entalpię na jednostkę masy

$$w = \int dp/\rho$$

co jest dobrze zdefiniowane, bo zakładamy że p i ρ są wzajemnymi funkcjami. Założymy także potencjał grawitacyjny Φ tj. $\mathbf{f} = -\rho \nabla \Phi$. Wtedy otrzymujemy równanie na prędkość

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(w + \Phi)$$

co można przepisać w postaci

$$\partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla(w + \Phi + v^2/2)$$

Dla przepływów stacjonarnych (niezależnych od czasu) mamy wtedy

$$w + \Phi + v^2/2 = \text{const}$$

wzdłuż linii przepływu tj. krzywej stycznej do $\mathbf{v}$.

Równowaga w polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Na mocy równania Bernoulliego $w + gz$ jest stałe, a kolei adiabatycznie $p = A\rho^\gamma$ gdzie γ jest stałym wykładnikiem ($\gamma = 7/5$ dla powietrza – gazu cząsteczek 2-atomowych). co daje $w = \gamma p/\rho(\gamma-1)$ ($w = 7p/2\rho$ dla powietrza). Z równania gazu doskonałego $p/\rho = k_B T/m$ gdzie k_B jest stałą Boltzmanna (określoną w układzie SI) a m masą pojedynczej cząsteczki. Wtedy temperatura maleje liniowo z wysokością.

Ruch stacjonarny ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Wtedy $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega(-y, x, 0)$ co daje stałe $w + \Phi - \omega(x^2 + y^2)/2$.

Prędkość dźwięku. Załóżmy falowe zaburzenie $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho' \ll \rho_0$, $v^2 \ll p/\rho$. $\rho' = A \exp(i(kz - \omega t))$ $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z v_0 \exp(i(kz - \omega t))$ Wtedy

$$-i\omega A + v_0 i k \rho_0 = 0, \quad -i\omega v_0 \rho_0 + (dp/d\rho) i k A = 0$$

czyli prędkość

$$c = \omega/k = \sqrt{dp/d\rho}$$

gdzie $dp/d\rho$ jest ściśliwością adiabatyczną.

Nieciągłość. Szczególny przypadek płynu idealnego $\mathbf{v} = (v(x, t), 0, 0)$, ruch w jednym wymiarze

$$v = \int c d\rho/\rho = \int dp/c\rho,$$

Wtedy funkcja $x(\rho, t)$ odwrotna do $\rho(x, t)$ ma własność

$$\partial_t x = c + v, \quad x = x(\rho, 0) + t(c + v)$$

Przy odpowiednich warunkach początkowych $\partial_\rho x$ zmieni znak (np. $\rho(x, 0) = A + B \tan(x/a)$) czyli rozwiązanie przestanie istnieć (straci ciągłość).

Ciecz lepka. Rezygnujemy z warunku adiabatyczności ale wprowadzamy dodatnią lepkość ścinania η i objętościową ζ . Teraz

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \sigma_{ij}$$

gdzie

$$\sigma_{ij} = \eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i - 2\delta_{ij}\partial_k v_k/3) + \zeta\delta_{ij}\partial_k v_k$$

Aby zamknąć układ równań musimy uzupełnić ewolucją entropii na jednostkę masy $s(\mathbf{r}, t)$

$$\partial_t(\rho s) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho s) = \sigma_{ij}\partial_i v_j/T + \nabla \cdot (\kappa \nabla T)/T$$

gdzie $T(\mathbf{r}, t)$ jest temperaturą a $\kappa > 0$ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Spośród wielkości p, ρ, s, T zawsze 2 są niezależne (i nie zależą od $\mathbf{v}$) a pozostałe wyznaczamy z własności

równowagowych płynu (potrzeba do tego fizyki statystycznej). Współczynniki η , ζ , κ często przyjmuje się stałe bądź zależne od T i p (lub s i ρ). Dla gazu doskonałego $\zeta = 0$. Możemy pominąć ζ także dla cieczy nieściśliwej, oprócz dyskusji zaniku fal dźwiękowych.

Są to tzw. równania Naviera-Stokesa. Do tej pory nie udowodniono w ogólnym przypadku istnienia ich globalnego rozwiązania.

Teoria sprężystości. W odróżnieniu od płynu ciało sprężyste stara się utrzymywać stałe odległości pomiędzy punktami. Statykę i dynamikę określa wtedy Przesunięcie względne punktów. Zakładamy, że możemy każdy punkt ciała może się przesunąć, tj. $\mathbf{r}$ przesuwa się do $\mathbf{r}'$. Istnieje zatem funkcja, pole wektorowe $\mathbf{r}'(\mathbf{r}, t)$. Pewne przesunięcia dopuszczalne, ale nieistotne z punktu widzenia sprężystości, tj. obroty i przesunięcia, takie same dla wszystkich punktów. Założymy także że przesunięcia są niewielkie, czyli wprowadzimy przesunięcie względne $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Przesunięcia powodują powstanie energii potencjalnej $V[u]$ (jest to formalnie funkcjonal czyli funkcja od funkcji). W najprostrzym przypadku ciała izotropowego o energii decyduje tensor 3×3 pochodnych

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_j} = \partial_j u_i$$

Założymy oczywiście, że $V[0] = 0$ czyli brak przesunięć zeruje energię. Energia potencjalna w przypadku liniowym powinna być dodatnią formą kwadratową od powyższych pochodnych. Zakładając że bryła jest izotropowa (nie ma wyróżnionych kierunków), jedyna możliwa postać to

$$V = \int d\mathbf{r} [A(\partial_i u_j + \partial_j u_i - 2\delta_{ij}\partial_k u_k/3)(\partial_i u_j + \partial_j u_i - 2\delta_{ij}\partial_k u_k/3) + B\partial_i u_i \partial_j u_j]$$

gdzie $A, B > 0$ to tzw. współczynniki Lamé i stosujemy konwencję sumacyjną. Uwaga: teoretycznie dopuszczalny byłby trzeci wyraz

$$(\partial_i u_j - \partial_j u_i)(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$$

ale oznaczałby niezerową energię przy obrotach więc jest wykluczony.

Zastosowanie. Proste rozciąganie. Załóżmy że ciało rozciągamy liniowo tj. $\mathbf{u} = (x\alpha, y\beta, z\gamma)$. Wtedy energia jest dana

$$(4A/9)[(2\alpha - \beta - \gamma)^2 + (2\beta - \alpha - \gamma)^2 + (2\gamma - \alpha - \beta)^2] + B(\alpha + \beta + \gamma)^2$$

razy pierwotna objętość. Ustalmy α (np. jest to kierunek w którym trzymamy ciało za końce) i szukamy takich β i γ które dają najniższą energię. Z równań

$$(4A/3)(2\beta - \alpha - \gamma) + B(\alpha + \beta + \gamma) = 0, \quad (4A/3)(2\gamma - \alpha - \beta) + B(\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$

dostajemy $\beta = \gamma = -\alpha\sigma$ gdzie

$$\sigma = \frac{3B - 4A}{6B + 4A}$$

jest liczbą *Poissona*, spełniającą $\sigma \in [-1, 1/2]$. Większość materiałów ma $\sigma > 0$ np. guma $1/2$, korek 0 . Ujemne σ mają tzw. auksetyki (np. specjalne pianki).

Po wstawieniu β i γ energia będzie równa $E\alpha^2/2$ razy objętość gdzie

$$E = \frac{36AB}{2A + 3B}$$

jest *modułem Younga* (proporcjonalność siły do rozciągnięcia). Odwrotnie $A = E/8(1 + \sigma)$, $B = E/6(1 - 2\sigma)$ Dynamika. Energia kinetyczna

$$T = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) |\partial \mathbf{u} / \partial t|^2$$

gdzie ρ jest gęstością masy. Dalej stosujemy zwykle równania Newtona lub Lagrange'a co daje

$$\rho \partial_t^2 u_i(\mathbf{r}, t) = -\delta V / \delta u_i(\mathbf{r}, t)$$

Po prawej stronie występuje tzw. pochodna funkcjonalna, tj. różniczkujemy funkcjonal $V[u]$ po wartościach u (można dla łatwiejszego zrozumienia tej konstrukcji zastąpić ciągle $\mathbf{r}$ przez równomierny rozkład punktów i a pochodne przez ilorazy różnic). Wtedy

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = 4A \Delta \mathbf{u} + (2B + 4A/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

lub

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \frac{e}{2(1 + \sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{e}{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

gdzie $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ to laplasjan. Zastosowanie. Dźwięk. Mamy dwa rodzaje fal dźwiękowych. Podłużne np. $\mathbf{u} = e^{ikz - i\omega t}(\alpha, 0, 0)$ i poprzeczne np. $\mathbf{u} = e^{ikz - i\omega t}(0, \beta, 0)$. Predkość fal podłużnych i poprzecznych $c_{L/T} = \omega/k$,

$$c_L = \sqrt{(2B + 16A/3)/\rho} = \sqrt{(1 - \sigma)E/(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)\rho}, \quad c_T = \sqrt{4A/\rho} = \sqrt{E/2(1 + \sigma)}$$

czyli $c_L > \sqrt{4/3}c_T$ a jeśli $\sigma > 0$ to $c_L > \sqrt{2}c_T$.