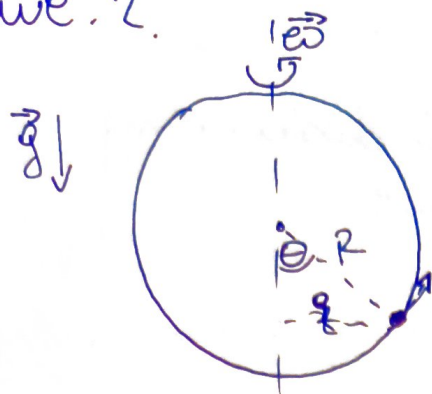


Krzysztof Jabłoński / Bartłomiej Zglinicki
Zadanie 2.



4/5 pkt

Energia kinetyczna koralika wynosi:

$$\frac{m}{2} (\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 R^2)$$

$\downarrow$
 prędkość
 związana z ruchem
 obrotowym poręczy

$\downarrow$
 prędkość związana z
 ruchem koralika
 w ruchu poręczy

Zakładając, że energia potencjalna wynosi 0 dla $\theta = 0$. Wtedy
 $V = mg(R - R \cos \theta) = mgR(1 - \cos \theta)$.

Zatem Lagrangian jest postaci:

$$L = \frac{m}{2} (\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 R^2) + mgR(\cos \theta - 1)$$

A zatem:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} R^2 \cdot 2\dot{\theta} \right) = mR^2 \ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{m}{2} (\omega^2 R^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta) - mgR \sin \theta = \\ &= m(\omega^2 R^2 \cos \theta - gR) \sin \theta \end{aligned}$$

Aby znaleźć położenia równowagi patrzemy

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Czyli:

$$m(\omega^2 R^2 \cos \theta - gR) \sin \theta = 0$$

Wtedy jedno położenie równowagi dostaniemy
kładąc $\sin \theta = 0$, czyli $\theta = 0$ i $\theta = \pi$.

Następne położenia równowagi otrzymam gdy:

$$\omega^2 R \cos \theta - g = 0$$

$$\Downarrow$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

Zatem jeśli koralik znajduje się w $\theta = 0$ to
równania ruchu w przybliżeniu mających drgań
wygledzą tak:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{R}(\omega^2 R - g)\theta \quad (**)$$

Tak jeśli $g > \omega^2 R$ to dostajemy równanie oscylatora
i położenie równowagi $\theta = 0$ odpowiada równowadze
trwałej. Gdy poręcz zaczyna wahać się coraz
szybciej w taki sposób, że $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, to położenie
równowagi zaczyna się przesunąć osiągając wartości
 $\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$.

Natomiast położenie $\theta = \pi$, które odpowiada sytuacji
gdy koralik znajduje się na szczycie poręczy
odpowiada dla różnych $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ położeniu równowagi
chwilejnej.

Częstość własnych drgań otrzymuje się z (**):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{R}(\omega^2 R - g)}$$

1. częstota małych drgań wokół $\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$

2. niech $\varepsilon \rightarrow$ małe przesunięcie

System:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{R} (\omega^2 R \cos(\theta_0 + \varepsilon) - g) \sin(\theta_0 + \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{R} (\omega^2 R (\cos\theta_0 \cos\varepsilon - \sin\theta_0 \sin\varepsilon) - g) (\sin\theta_0 \cos\varepsilon + \sin\varepsilon \cos\theta_0) = \\ &= \frac{1}{R} (\omega^2 R (\cos\theta_0 - \sin\theta_0 \varepsilon) - g) (\sin\theta_0 + \varepsilon \cos\theta_0) \end{aligned}$$

$$\ddot{\varepsilon} \approx \frac{1}{R} (\omega^2 R (\frac{g}{\omega^2 R} - \sin\theta_0 \varepsilon) - g) (\sin\theta_0 + \varepsilon \cos\theta_0)$$

$$\approx \frac{1}{R} (-\sin^2\theta_0 \varepsilon - g \cos\theta_0 \varepsilon) = \omega^2 (1 - \cos^2\theta_0) \varepsilon = -(\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}) \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\omega \approx \sqrt{\frac{1}{R} \sin\theta_0 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}} \quad \text{ i } \theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}}$$

• drobne błędy rachunkowe (nie odejmuję punktów)

• brak stałej ruchu (podpunkt a))

• Lagrange'ian nie zależy jawnie od czasu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = \text{const.}$$

$$\frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 - R^2 \sin^2\theta \omega^2) + mgR (1 - \cos\theta) = \text{const.}$$

↑ znak minus, inaczej niż w tradycyjnej rozważanej „energii”

a) maksymalnie 1 pkt

- pełen punkt przyznawany jest za podanie pełnego wzoru na zachowaną wartość (stałą ruchu, inaczej całkę ruchu).
- samo stwierdzenie „zachowana jest energia” nie jest punktowane, gdyż jest mocno niejednoznaczne – tradycyjnie rozumiana energia nie jest zachowana, bo obracająca się ze stałą prędkością (wymuszona z zewnątrz) obręcz wykonuje nad koralikiem pracę, także jego energia się zmienia.

b) maksymalnie 2pkt, w tym:

- zidentyfikowanie wszystkich czterech charakterystycznych punktów +1pkt.
- jakakolwiek dyskusja na temat trwałości/chwiejności punktów równowagi +0,5pkt.
- pełna dyskusja, jak trwałość zmienia się wraz ze wzrostem ω +0,5pkt.

c) maksymalnie 2pkt, w tym:

- policzenie częstości dla oscylacji dla małych ω +1pkt.
- policzenie częstości dla oscylacji dla dużych ω +1pkt.

Zdarzały się odstępstwa od tych kryteriów (na korzyść studentów) w przypadkach:

- klarownej narracji całego zadania (pomimo pewnych mankamentów w rozwiązaniu).
- krytycznej analizy własnych błędów („widzę, że jednostki się nie zgadzają, ale nie mogę znaleźć błędu” itd.)