Uzupełnienie ćwiczeń z Metod Matematycznych Fizyki (2012/2013)

1. Oś obrotu $SO(3)$

$w(\lambda) = \det(\lambda - R)$ dla macierzy 3×3 obrotu R ($R^T R = I$) jest funkcją rzeczywistą, ciągłą i ma granice $\pm\infty$ więc ma pierwiastek rzeczywisty, λ_1, będący jednocześnie wartością własną, tj. $\lambda_1 v = Rv$, dla rzeczywistego wektora v. Ponieważ $|Rv| = |v|$ (bo $R^T R = 1$), więc $|\lambda_1| = 1$ czyli $\lambda_1 = \pm 1$. Jeśli -1 jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym, to $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$ czyli $\det R = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -|\lambda_2|^2$ co jest niemożliwe, bo $\det R = 1$. Jeśli $\lambda_{2,3}$ są rzeczywiste, to też muszą byc równe ± 1. Jeśli $\lambda_{1,2,3} = -1$, to $\det R = -1$, sprzeczność. Zatem istnieje $\lambda_k = 1$.

2. Warstwy

H jest podgrupą G. Dla każdemu $g \in G$ można przypisać warstwę $Hg = \{hg, h \in H\}$. Warstwy tworzą zbiory rozłączne. Przypuśćmy że $g \in Hg_1 \cap Hg_2$. Wtedy $h_1 g_1 = h_2 g_2$, dla pewnych $h_{1,2} \in H$. Zatem $g_1 = h_1^{-1} g_2$, czyli $g_1 \in Hg_2$ a więc także $Hg_1 \subset Hg_2$. Analogicznie $Hg_2 \subset Hg_1$, czyli $Hg_1 = Hg_2$. Spostrzeżenie: Jeśli $Hg_1 = Hg_2$ to $g_1 g_2^{-1} \in H$. Spostrzeżenie: $g^{-1}h_1 g$ i $g^{-1}h_2 g$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $h_1 = h_2$ (sprawdzamy mnożąc $g \cdot \quad \cdot g^{-1}$). Twierdzenie Lagrange'a: $|G|/|H|$ jest liczbą naturalną, równą liczbie warstw.

3. Lemat Burnside'a

Niech G_x będzie podzbiorem G z punktem stałym x, tj. $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. G_x jest oczywiście podgrupą G. Podzielmy G na warstwy względem G_x. Jeśli $g_{1,2}$ należą do wspólnej warstwy, to $g_2 g_1^{-1} = g'_x \in G_x$, więc $g_2 g_1^{-1} x = x$ czyli $g_1^{-1} x = g_2^{-1} x$. Oznaczmy orbitę pktu x, $Gx = \{gx : g \in G\}$. Na mocy powyższego rozumowania $|Gx| = |G|/|G_x|$ (liczba warstw). Orbity, tak jak warstwy, są rozłączne.

Oznaczmy X^g zbiór pktów stałych g, tj. $X^g = \{x : gx = x\}$. Zatem $\sum |X^g| = \{(g,x) : gx = x\} = \sum |G_x| = \sum |G|/|Gx| = |G| \sum 1/|Gx| = |G||X/G|$ gdzie $|X/G|$ jest liczbą orbit. Równoważnie $|X/G| = \sum |X^g|/|G|$

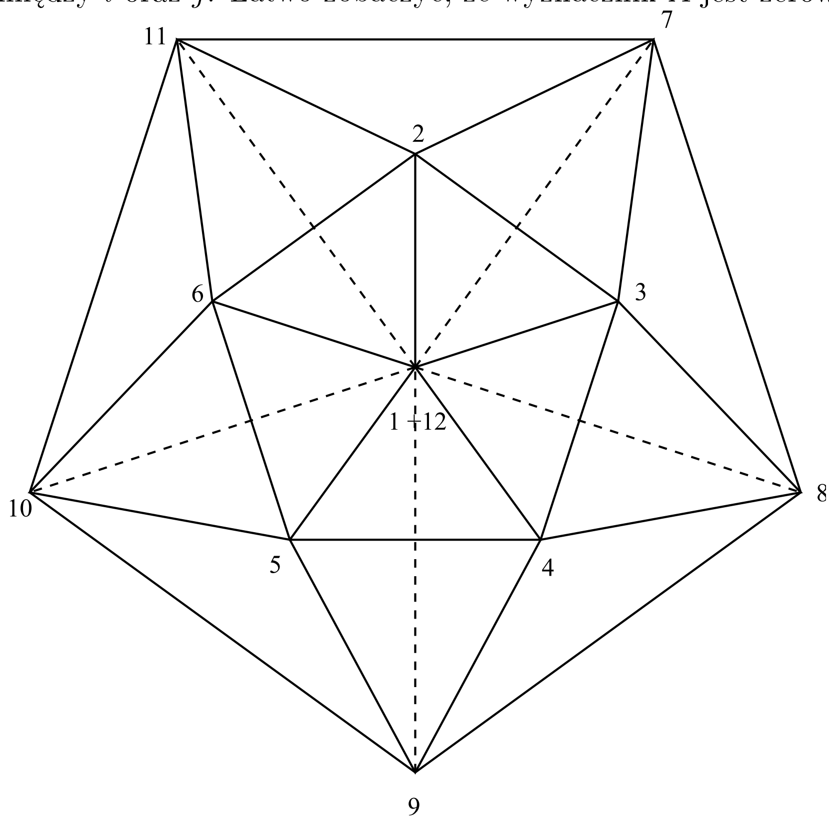
Zastosowanie do podgrup $SO(3)$. Każdy nieneutralny obrót ma 2 punkty stałe na sferze jednostkowej, czyli $|X^g| = 2$ (ale $|X^e| = |X|$) Rozpatrzmy wszystkie elementy $g^{-1} g_x g$, gdzie $g_x \in G_x$. Punktem stałym takiego elementu jest $g^{-1}x$, a zatem G działa na zbiorze pktów stałych X. Mamy $\sum |X^g| = 2|G| - 2 + |X|$. Dla każdej ustalonej pary punktów stałych mamy podgrupę G_x i odpowiednią orbitę Gx. Na mocy lematu Burnside'a $\sum |X^g|/|G| = 2 - 2/|G| + |X|/|G| = |X/G|$, ale jednocześnie $|X| = \sum |Gx|$ gdzie sumujemy po pojedynczych reprezentantach orbit. Zatem $|X|/|G| = \sum 1/|G_x|$ oraz $|X/G| - |X|/|G| = \sum (1 - 1/|G_x|)$ i stąd wzór $2(1 - 1/|G|) = \sum (1 - 1/|G_x|)$.

4. Siatki dwudziestościanu i dwunastościanu foremnego

Niech X będzie zbiorem wszystkich siatek dwudziestościanu. Chcemy policzyć tylko te nieprzystające a więc $|X/G|$. Siatki dostajemy przez odpowiednie rozcięcie dwudziestościanu wzdłuż krawędzi, tak aby dało się je rozpłaszczyć w spójną figurę (Uwaga: Trzeba jeszcze pokazać, że przy rozpłaszczaniu jakieś ściany nie zajdą na siebie. To wydaje się oczywiste po kilku próbach rysowania kontrprzykładu, niemniej ścisły dowód wymaga komputerowego testu, patrz
http://www.al.ics.saitama-u.ac.jp/horiyama/research/unfolding/). Dowód za Ch. Hippenmeyer, *Elemente der Mathematik* 34 (1979) strony 61-63,
http://retro.seals.ch/digbib/view?rid=elemat-001:1979:34::124 . Z lematu Burnside'a wynika, że wystarczy policzyć $|X^g|$ czyli siatki niezmiennicze wględem pewnych obortów. Oczywiście $|X^e| = |X|$. Potrzeba także $|X^2|$ czyli siatki niezmiennicze względem obrotu o 180 stopni wokół środków par równoległych (i przeciwległych) krawędzi (15 elementów). Są jeszcze obroty

wokół wierzchołków o wielokrotność 72 stopni (360/5, w liczbie 4×6) i ścian o 120 stopni (2×10), ale nie dają siatek niezmienniczych (łatwo sprawdzić). W sumie jest 60 elementów Zatem $|X/G| = (|X| + 15|X^2|)/60$.

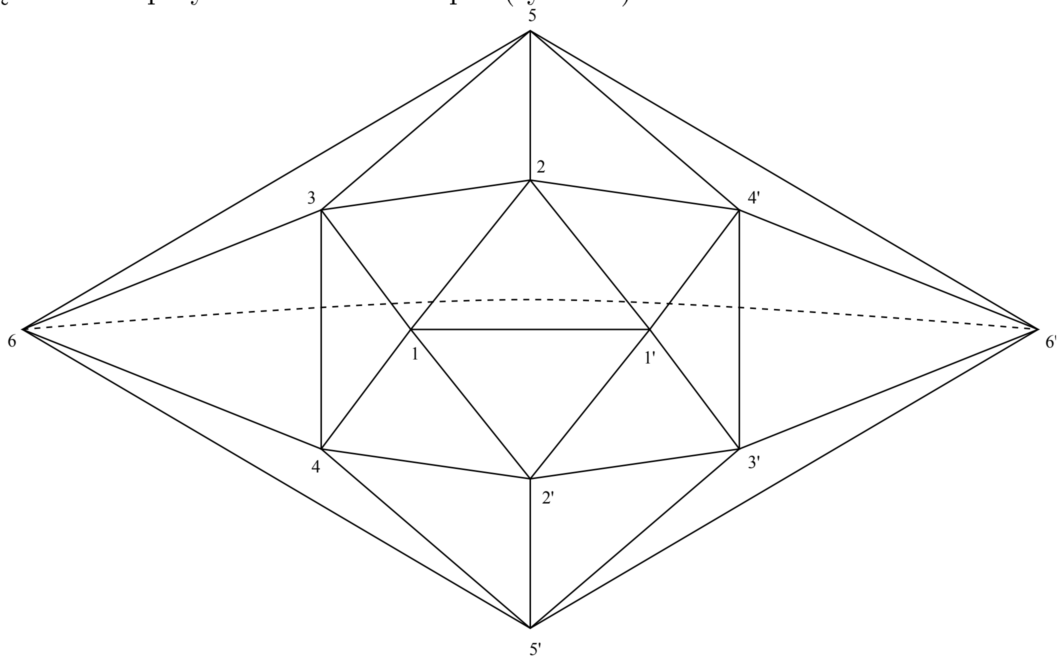
$|X|$ jest liczbą grafów drzewiastych (tzw. drzewa Cayleya, spójne, ale bez pętli), które można narysować wzdłuż krawędzi dwudziestościanu (linie cięcia). Na mocy twierdzenia Kirchhoffa z teorii grafów (więcej na http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Kirchhoffa , na stronie angielskiej szkic dowodu) taka liczba jest równa *dowolnemu* dopełnieniu algebraicznemu, tj. $(-1)^{i+j}M_{ij}$, gdzie M_{ij} jest minorem (wyznacznikiem po skreśleniu i-tego wiersza i j-tej kolumny) macierzy laplasjanu A. Macierz A ma wymiar $n \times n$, gdzie n jest liczba wierzchołków (u nas 12). A_{ii} jest sumą krawędzi wchodzących do wierzchołka i, A_{ij} jest minus sumą krawędzi pomiędzy i oraz j. Łatwo zobaczyć, że wyznacznik A jest zerowy.

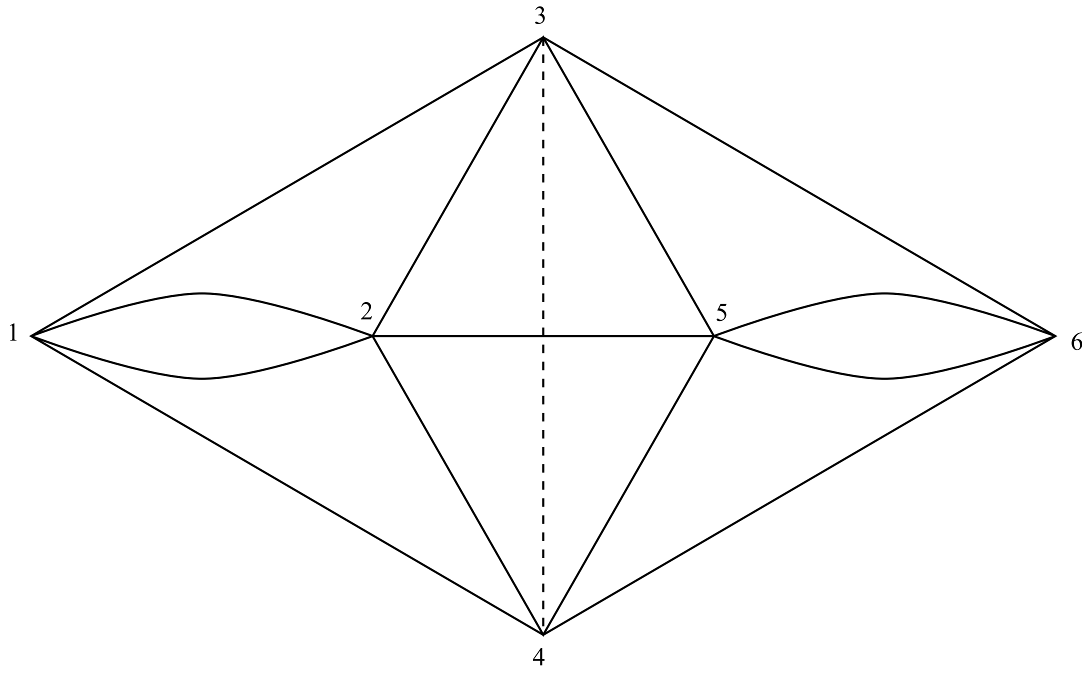


U nas (rysunek)

$$
A = \begin{pmatrix}
5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5
\end{pmatrix}
$$

Mamy $|X| = M_{11} = 5184000$. Do obliczenia $|X^2|$ musimy sparować wierzchołki, które przechodzą na siebie przy obrocie o 180 stopni (rysunek).





Tym razem

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Otrzymujemy $M_{11} = 720$, ale dostajemy po dwa grafy rozłączne, które trzeba połączyć krawędzią $11'$ lub $22'$ czyli $|X^2| = 1440$. Ostatecznie więc $|X/G| = (5184000 + 15 \times 1440)/60 = 86760$. Tę liczbę trzeba podzielić przez 2, aby uwzględnić dwustronność siatek, a łatwo się przekonać, że nie ma siatki symetrycznej (uwaga: niektóre siatki sześcianu są symetryczne). Stąd wynik 43380, taki sam dla dwudziestościanu i dwunastościanu.

5. Twierdzenie Engela

Algebra Liego z elementów nilpotentnych w przestrzeni N wymiarowej V wyraża się przez podalgebrę macierzy górnotrójkątnych w pewnej (wspólnej) bazie $(e_1, ..., e_N)$

Definicje:

- komutator $[A, B] = AB - BA$
- Algebra Liego g spełnia liniowość, $\lambda A + \mu B \in g$ oraz $[A, B] \in g$, jeśli $A, B \in g$
- Algebra jest zbudowana z elementów nilpotentnych jeśli dla każdego $A \in g$ istnieje liczba naturalna K, taka że $A^K = 0$

Dowód przedstawiony poniżej jest uszczegółowioną wersją dowodu z notatek prof. Kaca (http://math.mit.edu/classes/18.745/Notes/Lecture_3_Notes.pdf)

Ogólna idea dowodu: Dowód przeprowadzimy indukcyjnie, stopniowo powiększając algebrę. Załóżmy (indukcyjnie), że twierdzenie jest prawdziwe dla jakiejś podalgebry $g' \subset g$, której każdy element jest kombinacją liniową generatorów $A_1, \ldots, A_n$. Łatwo zauważyć że dowolny iloczyn N generatorów (w dowolnej kolejności, powtórzenia dopuszczalne) się zeruje. Istotnie, macierze górnotrójkątne zawsze obniżają bazę wektorów (bo $Ae_k = \sum_{m<k} a_m e_m$), więc w końcu (po maksymalnie N krokach) każdy wektor się wyzeruje. Chcemy dodać nowy element $A_{n+1} = B$ do algebry (należący do g, ale nie do g'), taki że $[A, B] \in g'$ dla wszystkich $A \in g'$. Gdyby przypadkowo wybrane B nie miało tej własności, to wybieramy takie j_1, że $B_1 = [A_{j_1}, B] \notin g'$. Jeśli B_1 nadal nie pasuje to szukamy j_2, takiego że $B_2 = [A_{j_2}, B_1] \notin g'$, itd. ($B_k = [A_{j_k}, B_{k-1}]$). Poszukiwania muszą zakończyć się sukcesem dla pewnego B_m, bo $B_{2N} = 0$. Jest to bowiem kombinacja wyrażeń w których macierz B obłożona jest $2N$ macierzami A, po lewej m, po prawej $2N - m$, a więc zawsze po którejś stronie jest ich co najmniej N, które ma mocy wcześniejszego stwierdzenia znikają. Jeśli pokażemy, że twierdzenie po dodaniu $A_{n+1} = B_m$ pozostaje prawdziwe, to indukcyjnie możemy dodawać następnie macierze, aż dojdziemy do całej algebry g, bo liczba generatorów g jest skończona (mniejsza od bazy wszystkich macierzy czyli $\leq N^2$).

Drugi kierunek indukcji to przestrzenie pierwiastkowe. Dla ustalonej podgalgebry $h \subset g$ zdefiniujemy poprzestrzenie wektorowe

$$V_0 = \{v : Av = 0 \text{ dla każdego } A \in h\},\ V_k = \{v : Av \in V_{k-1} \text{ dla każdego } A \in h\}, \quad \text{dla } k \in N_+$$

Zauważmy, że $V_{k-1} \subset V_k$. Jeśli $v_0 \in V_0$ to $Av_0 = 0 \in V_1$, czyli $v_0 \in V_1$. Indukcyjnie załóżmy że $V_{k-1} \subset V_k$. Dla $v_k \in V_k$ mamy $Av_k \in V_{k-1}$ czyli $Av_k \in V_k$, a więc $v_k \in V_{k+1}$. Pokażemy, że $V_0 \neq \{0\}$ oraz $V_{k+1} \neq V_k$, poza przypadkiem $V_k = V$. Dzięki temu otrzymamy wstępujący ciąg poprzestrzeni (musi zakończyć się całym V, bo wymiary kolejnych V_k rosną a nie mogą przekroczyć N) i możemy bazę e skonstruować kolejno z bazy V_0, $V_1 - V_0$,..., $V_k - V_{k-1}$,... ($X - Y$ to część bazy X liniowo niezależna od Y). W tej bazie łatwo zobaczyć, że algebra jest górnotrójkątna.

Dowód: Dla pojedynczej macierzy A znajdziemy v_0, biorąc dowolny niezerowy wektor v, budując ciąg $A^m v$, który musi się w końcu zerować bo A jest nilpotentna. Zatem istnieje m takie że $v_0 = A^m v \neq 0$ ale $Av_0 = A^{m+1} v = 0$. Indukcyjnie pokażemy, że istnieje takie $v_k \in V_k$, że $v_k \notin V_{k-1}$ (o ile $V_{k-1} \neq V$). Weźmy dowolne $v \in V$, takie że $v \notin V_{k-1}$. Podobnie jak poprzednio, ciąg $A^m v$ musi w końcu trafić do V_{k-1} czyli znajdziemy m, takie że $v_k = A^m v \notin V_{k-1}$, ale $Av_k = A^{m+1} v \in V_{k-1}$.

Weźmy teraz algebrę g' zbudowaną z macierzy A_i, $i = 1...n$, dla której twierdzenie jest prawdziwe, i uzupełnijmy ją o nową macierz $A_{n+1} = B$, taką że $[A, B] \in g'$ dla każdego $A \in g'$ (wykazaliśmy na początku, że musi to być to możliwe). Nowa algebra $h = g' \oplus B$. Dla algebry g' mamy (jako założenie indukcyjne) stare przestrzenie pierwiastkowe V_k, dla nowej h szukane przestrzenie oznaczymy V'_k. Oczywiście $V'_0 \subset V_0$. Pokażemy, że $V'_0 \neq \{0\}$. Weźmy niezerowe $v_0 \in V_0$. Niech $u = Bv_0$, wtedy dla dowolnego $A \in g'$, $Au = ABv_0 = [A, B]v_0 + BAv_0 = [A, B]v_0 = 0$, ponieważ $A, [A, B] \in g'$. W takim razie $u \in V_0$. Iteracyjnie, $B^m v_0 \in V_0$. Jednak B też jest nilpotentna, a więc w końcu dla pewnego m: $v'_0 = B^m v_0 \neq 0$ oraz $Bv'_0 = B^{m+1} v_0 = 0$. Zatem

$v_0' \in V_0'$.

Dalej rozpatrujemy kolejne k. Zauważmy, że poza $k=0$ nie ma prostej relacji zawierania pomiędzy V_k i V_k'. Pokażemy że istnieje $v_k' \in V_k'$ takie że $v_k' \notin V_k'$ (o ile $V_{k-1} \neq V$). Tym razem dodatkowo oznaczymy $V_k^j = \{v : A_i v \in V_{k-1}', \text{ dla } i = 1...j\}$. Widać, że $V_k^{j+1} \subset V_k^j$. Chcemy pokazać, że $V_k^{n+1} = V_k' \neq V_{k-1}'$. Weźmy $v \in V$ takie, że $v \notin V_{k-1}'$. Ciąg $A_1^m v_k$ w końcu się zeruje (jak poprzednio), więc istnieje $v_k^1 = A_1^m v \notin V_{k-1}'$, takie że $A_1 v_k^1 = A_1^{m+1} v_k^1 \in V_{k-1}'$. Stąd $V_k^1 \neq V_{k-1}'$. Indukcyjnie ze względu na j, niech $V_k^{j-1} \neq V_{k-1}'$. Weźmy $v \in V_k^{j-1}$, takie że $v \notin V_{k-1}'$. Niech $u = A_j v$, wtedy dla dowolnego $i < j$ mamy $A_i u = A_i A_j v = [A_i, A_j]v + A_j A_i v = v_{k-1}' + A_j v_{k-1}''$, gdzie $v_{k-1}' = [A_i, A_j]v \in V_{k-1}'$ (bo $[A_i, A_j]$ wyraża się przez kombinację macierzy A_l, $l < j$ na mocy naszej konstrukcji rosnących algebr a ponadto wiemy że $v \in V_k^{j-1}$) oraz $v_{k-1}'' = A_i v \in V_{k-1}'$. Jednak $A_j v_{k-1}'' = v_{k-2}'' \in V_{k-2}' \subset V_{k-1}'$, a więc $A_i u \in V_{k-1}'$ dla dowolnego i, czyli $u \in V_k^{j-1}$. Z nilpotentności A_j w ciągu $A_j^m v$ znów znajdziemy $v_k^j = A_j^m v \notin V_{k-1}'$, takie że $A_j v_k^j = A_j^{m+1} v \in V_{k-1}'$. Znaleźliśmy więc $v_k^j \in V_k^j$ takie że $v_k^j \notin V_{k-1}'$, zamykając indukcję i cały dowód.

6. Charakterystyka ciała

Charakterystyką ciała nazywamy najmniejszą liczbę naturalną dodatnią n, taką że

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0$$

czyli $n \equiv 0$. Jeśli takiej liczby nie ma, to charakterystyka jest zerem. Skończona charakterystyka musi być liczbą pierwszą różną od 1, przykład: reszty z dzielenia przez liczbę pierwszą. Ciałami o zerowej charakterystyce są np. liczby wymierne, rzeczywiste i zespolone.

7. Własności macierzy nilpotentnych

Pokazaliśmy, że N-wymiarowa macierz nilpotentna A jest w pewnej bazie górnotrójkątna, a więc $A^N = 0$. Jej wielomian charakterystyczny ma postać $\det(\lambda - A) = \lambda^N$, jak również $\mathrm{Tr} A^k = 0$ dla $k > 0$ (bo potęga macierzy nilpotentnej jest także nilpotentna). Twierdzenie Cayleya-Hamiltona (http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Hamilton_theorem) głosi, że jeśli $w(\lambda) = \det(\lambda - A)$, to $w(A) = 0$. Jest ono prawdziwe nie tylko dla ciał, ale także dla dowolnych pierścieni przemiennych (niekonieczne jest istnienie elementu neutralnego i odwrotnego dla mnożenia). Zatem jeśli $\det(\lambda - A) = \lambda^N$, to $A^N = 0$ czyli A jest nilpotentna.

Niech A będzie dowolną macierzą N-wymiarową, taką że $\mathrm{Tr} A^k = 0$ dla $0 < k \leq N$. Wtedy (a) $\det A = 0$ jeśli charakterystyka ciała jest nie jest dzielnikiem N, (b) A jest nilpotentne jeśli charakterystyka jest zerowa lub większa od N.

Dowód:

(a) Niech $w(\lambda) = \det(\lambda - A) = \lambda^N + c_1 \lambda^{N-1} + \cdots + c_{N-1}\lambda + c_N$. Wtedy $\det A = (-1)^N c_N$. Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona wynika, że $A^N + c_1 A^{N-1} + \cdots + c_{N-1} A + c_N I = 0$ czyli $\mathrm{Tr} A^N + c_1 \mathrm{Tr} A^{N-1} + \cdots + c_{N-1} \mathrm{Tr} A + c_N \mathrm{Tr} I = 0$. Skoro $\mathrm{Tr} A^k = 0$ to $c_N \mathrm{Tr} I = N c_N = 0$. Jeśli charakterystyka nie dzieli N, to $N \neq 0$ czyli $c_N = 0$ czyli $\det A = 0$. Uwaga: jeśli charakteystyka dzieli N to kontrprzykładem jest macierz jednostkowa.

(b) Znajdujemy przestrzenie pierwiastkowe, V_k zdefiniowane jak w pkt. 5. Nie wiemy jeszcze czy A jest nilpotentna więc tylko $V_k \subset V_{k+1}$. Niech $m \leq N$ będzie taką liczbą że $V_m = V_{m+1}$ jeśli $V_m = V$ (cała przestrzeń) to teza jest prawdziwa. Załóżmy więc, że V jest sumą prostą przestrzeni V_m i niezerowej W. Bazę V można zbudować z bazy V_m i W. W takiej bazie A ma postać blokową

$$\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

gdzie A' jest górnotrójkątna ($V_m \times V_m$) a zero w $W \times V_m$ wynika z faktu że $AV_m \subset V_m$ i nie daje nic z W). Zauważmy, że

$$\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'^2 & A'B + BC \\ 0 & C^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A'^k & * \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$$

Zatem $\mathrm{Tr}A^k = \mathrm{Tr}A'^k + \mathrm{Tr}C^k = \mathrm{Tr}C^k$ (bo A' jest górnotrójkątna). Skoro $\mathrm{Tr}A^k = 0$ to także $\mathrm{Tr}C^k = 0$ a więc na mocy (a) wiemy że $\det C = 0$ (bo charakterystyka nie może być dzielnikiem wymiaru C, mniejszego niż N). Zatem C ma zerowy wektor własny $v \in W$, czyli taki że $Av = Bv \in V_m$wbrew założeniu, że $V_m = V_{m+1}$. Uwaga: jeśli charakterystyka nie przekracza N to kontrprzykładem jest macierz jednostkowa ograniczona do przestrzeni o wymiarze charakterystyki.

8. Dodatek do twierdzenia Engela

Przy okazji twierdzenia Engela pokazaliśmy, że jeśli g składa się z elementów nilpotentnych, to ciągi $[A, X]$, $[A', [A, X]]$, $[A'', [A', [A, X]]]$ itd., ostatecznie się zerują. Oznacza to, że reprezentacja dołączona $\breve{A}X = [A, X]$ jest także zbudowana z elementów nilpotentnych. Można to, pod pewnymi ograniczeniami, pokazać w drugą stronę. Zauważmy jednak, że macierz jednostkowa I jest przemienna z każdą macierzą. Z kolei każdą macierz A można zapisać jako kombinację liniową $\lambda I + A'$, gdzie $\mathrm{Tr}A' = 0$ oraz $\lambda = \mathrm{Tr}A/N$. Dlatego ograniczymy się do macierzy bezśladowych.

Pokażemy twierdzenie:
Jeśli g jest algebrą Liego N-wymiarowych macierzy bezśladowych ($\mathrm{Tr}A = 0$ dla wszystkich $A \in g$, zamknięcie algebry gwarantuje fakt, że dla skończonych macierzy A i B mamy $\mathrm{Tr}[A, B] = 0$), charakterystyka nie dzieli N i reprezentacja dołączona, działająca na wszystkich macierzach kwadratowych, jest zbudowana z elementów nilpotentnych, to g też tworzą tylko elementy nilpotentne.

Uwaga: Jest to nieprawdą gdy charakterystyka dzieli N (patrz zadanie domowe 33).

Dowód: Wystarczy pokazać, że jeśli $\breve{A}$ jest nilpotentne to A również. Działania na macierzach można opisać w przestrzeni tensorowej, np. operacja na X dana AXB w przestrzeni tensorowej ma zapis $A \otimes B^T$ (transpozycja wynika z faktu że B działa z prawej strony, a więc na wiersze a nie kolumny). Łatwo sprawdzić, że $\mathrm{Tr}A \otimes B^T = \mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B$. Możemy zdefiniować

$$\breve{A}_L X = AX,\ \breve{A}_R = XA,\ \breve{A}_L = A \otimes I,\ \breve{A}_R = I \otimes A^T$$

Widać, że $\check{A} = \check{A}_L - \check{A}_R$ oraz $\check{A}_L\check{A}_R = \check{A}_R\check{A}_L$ czyli $\check{A}_{L,R}, \check{A}$ są przemienne. Skoro $\check{A}$ jest nilpotentny to $\check{A}_L^k\check{A}$ również, bo jeśli $\check{A}^m = 0$ to $(\check{A}_L^k\check{A})^m = \check{A}_L^{km}\check{A}^m = 0\check{A}_M^{km} = 0$ (wykorzystaliśmy przemienność $\check{A}$) Korzystając punktu 7 wiemy więc, że $0 = \mathrm{Tr}\check{A}_L^k\check{A} = \mathrm{Tr}\check{A}_L^{k+1} - \mathrm{Tr}\check{A}_L^k\check{A}_R$. Ponadto $\check{A}_L^k = A^k \otimes I$ oraz $\check{A}_L^k\check{A}_R = A^k \otimes A^T$ czyli $\mathrm{Tr}\check{A}^k = N\mathrm{Tr}A^k$ oraz $\mathrm{Tr}\check{A}_L^k\check{A}_R = \mathrm{Tr}A^k\mathrm{Tr}A$ Zatem ostatecznie $0 = N\mathrm{Tr}A^{k+1} - \mathrm{Tr}A^k\mathrm{Tr}A$. Skoro $\mathrm{Tr}A = 0$ a $N \neq 0$ (bo charakterystyka nie dzieli N) to $\mathrm{Tr}A^{k+1} = 0$. Jest to prawdą dla wszystkich k, a więc na mocy pktu 7(a) wiemy, że $\det A = 0$.

Podobnie jak w 7(b) chcemy pokazać, że $V_m = V$. Przypuśćmy, że tak nie jest i zróbmy rozkład blokowy A jak w 7(b). Zauważmy że $\det C \neq 0$. Gdyby bowiem $\det C = 0$ to istniałby taki wektor $v \in W$, że $Cv = 0$ czyli $Av = Bv \in V_m$ co przeczy defnicji m. Podzielmy także A' na bloki, wydzielając jak pierwszą część V_0 (czyli $AV_0 = 0$), która jest niezerowa bo wiemy że $\det A = 0$ a więc istnieje $v_0 \neq 0$ takie że $Av_0 = 0$. Zatem

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_0 & B_0 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Weźmy teraz X w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie $Y \neq 0$. Wtedy łatwo sprawdzić, że

$$\check{A}^k X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^k Y C^k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jednak $\det C \neq 0$ czyli C jest odwracalna. Gdyby $(-1)^k YC^k = 0$ to $Y = 0(-1)^k C^{-k} = 0$, sprzeczność. Zatem $V_m = V$ co kończy dowód.

9. Niespójność $SO(k,l)$, gdzie $k,l > 0$

Grupa $SO(k,l)$ zachowuje iloczyn skalarny

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - y_1^2 - \cdots - y_l^2$$

Sprawdźmy czy przekształcenie $x_1 \to -x_1$, $y_1 \to -y_1$, oraz $x_m, y_m \to x_m, y_m$ dla $k > 1$ daje się otrzymać w sposób ciągły. W zapisie blokowym każdy element $SO(k,l)$ działa

$$\begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zachowanie iloczynu skalarnego oznacza że

$$\begin{pmatrix} R_{xx}^T & R_{yx}^T \\ R_{xy}^T & R_{yy}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

a więc

$$R_{xx}^T R_{xx} - R_{yx}^T R_{yx} = I,\ R_{yy}^T R_{yy} - R_{xy}^T R_{xy} = I$$

W takim razie $R_{xx}^T R_{xx} = R_{yx}^T R_{yx} + I$. Macierz $A = R_{yx}^T R_{yx}$ jest symetryczna a więc ma rzeczywiste wektory i wartości własne i jest diagonalizowalna. Jeśli $Ax = \lambda x$ to $\lambda x^T x = x^T A x = x^T R_{yx}^T R_{yx} x = y^T y$ gdzie $y = R_{yx} x$. Ponieważ $x^T x$ oraz $y^T y$ to zwykłe iloczyny skalarne (sumy kwadratów liczb rzeczywistych), więc są nieujemne czyli $\lambda \geq 0$. Jeśli λ jest wartością własną $R_{yx}^T R_{yx}$ to $\lambda+1$ jest wartością własną $R_{xx}^T R_{xx} = R_{yx}^T R_{yx} + I$. Wyznacznik $R_{xx}^T R_{xx}$ jest iloczynem wartości własnych więc jest ≥ 1. Zatem $|\det R_{xx}| \geq 1$. Jednak w żądanym przekształceniu $\det R_{xx} = -1$, a więc musielibyśmy znaleźć ciągłe przejście między $\det R_{xx} \geq 1$ do $\det R_{xx} = -1$ co jest niemożliwe (wyznacznik jest ciągły), zgodnie z naszym wnioskiem.

10. Uogólnione grupy Lorentza

Rozważmy ogólnie przestrzeń D-wymiarową (zwykle $D = 4$, ale rozpartujemy sytuację ogólną), w której jest definiowany symetryczny tensor metryczny g, macierz liczb rzeczywistych o składowych $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Wprowadzimy też konwencję Einsteina $A^\alpha B_\alpha \equiv \sum_\alpha A^\alpha B_\alpha$. Dla gowolnej wielkości oznaczymy $A_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} A^\beta$. Założymy, że g jest niezdegenerowane ($\det g \neq 0$) i oznaczymy g^{-1} (tensor odwrotny do g) o składowych $g^{\alpha\beta}$ czyli $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g^\alpha_\gamma \equiv \delta^\alpha_\gamma$. Tutaj δ^α_γ jest zwykłą deltą Kroneckera, czyli $\delta^\alpha_\gamma = 1$ dla $\alpha = \gamma$ i 0 dla $\alpha \neq \gamma$. Oczywiście $A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$. Zauważmy, że $\delta^\alpha_\alpha = D$, bo sumujemy jedynki. Uwaga: g można zawsze sprowadzić w odpowiedniej bazie do formy sygnaturowej, czyli tylko ± 1 na głównej przekątnej, wtedy $g = g^{-1}$. W ten sposób otrzymamy $SO(k,l)$ dla k-krotnie $+1$ oraz l-krotnie -1.

Grupę Lorentza tworzą przekształenia zachowujące g tj. $\Lambda^\alpha{}_\beta$, takie że

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \;\; g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}$$

Niech $\Lambda = \exp A$ (A ma składowe $A^\sigma{}_\rho$). Ponieważ $\Lambda^T g \Lambda g^{-1} = I$, więc $\exp A^T \exp(g A g^{-1}) = I$ czyli $A^T = -g A g^{-1}$ co daje $(gA)^T = -gA$ a więc elementy macierzy $A_{\sigma\rho} = g_{\sigma\mu} A^\mu{}_\rho$ są antysymetryczne, tj. $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$. Możemy więc zdefiniować algebrę zbudowaną z elementów $L_{\alpha\beta}$ (to są osobne macierze a nie elementy jednej macierzy L!),o elementach $(L_{\alpha\beta})^{\mu\nu} = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta$. Zatem $A = A^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}/2$. Rozpatrzmy algebrę rozpiętą na L. Otrzymamy

$$[L_{\mu\nu}, L_{\alpha\beta}] = g_{\nu\alpha} L_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} L_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} L_{\nu\alpha}$$

Taka relacja algebraiczna posostaje prawdziwa dla dowolnej reprezentacji algebry Lorentza, dlatego w dalszym ciągu nie zakładamy szczególnej postaci L. Zauważmy, że $[L_{\mu\nu}, L_{\alpha\beta}] + [L_{\alpha\beta}, L_{\mu\nu}] = 0$, a więc (korzystamy z symetrii g)

$$g_{\nu\alpha} \bar{L}_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} \bar{L}_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha} \bar{L}_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} \bar{L}_{\nu\alpha} = 0$$

gdzie $\bar{L}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + L_{\beta\alpha}$. Mnożąc (i sumując) powyższą równość przez $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}$ dostajemy

$$2(1-D) g^{\mu\nu} \bar{L}^{\mu\nu} = 0$$

Przypadek $D = 1$ jest trywialny bo wtedy L_{11} jest dowolne, albo zerem z założenia, dlatego założymy $D > 1$. Mnożąc (i sumując) poprzednią równość tylko przez $g^{\mu\alpha}$ dostajemy

$$2\bar{L}_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}(g^{\mu\alpha} \bar{L}_{\mu\alpha}) - D\bar{L}_{\nu\beta} = 0$$

a ponieważ środkowe wyrażenie znika, dostajemy

$$(2-D)\bar{L}_{\nu\beta}=0$$

Stąd dla $D>2$ mamy $\bar{L}_{\nu\beta}=0$ czyli $L_{\mu\nu}=-L_{\nu\mu}$: L są antysymetryczne. Dla $D=2$ nie dostajemy więcej warunków, ale wszystkie L są przemienne, więc algebra jest trywialna; możemy oczywiście antysymetrię założyć, jak w $so(1,1)$. Z powodu antysymetrii L nie są one niezależne: diagonalnych nie ma, a resztę zadaja np. naddiagonalne, w liczbie $D(D-1)/2$

Stałe struktury (nie zerują się tylko dla $D>2$), otrzymujemy z przyrównania

$$[L_{\mu\nu},L_{\alpha\beta}]=f^{\rho\tau}{}_{\mu\nu,\alpha\beta}L_{\rho\tau}$$

w postaci

$$2f_{\rho\tau,\mu\nu,\alpha\beta}=g_{\nu\alpha}g_{\mu\rho}g_{\beta\tau}-g_{\nu\alpha}g_{\mu\tau}g_{\beta\rho}-g_{\nu\beta}g_{\mu\rho}g_{\alpha\tau}+g_{\nu\beta}g_{\mu\tau}g_{\alpha\rho}$$
$$-g_{\mu\alpha}g_{\nu\rho}g_{\beta\tau}+g_{\mu\alpha}g_{\nu\tau}g_{\beta\rho}+g_{\mu\beta}g_{\nu\rho}g_{\alpha\tau}-g_{\mu\beta}g_{\nu\tau}g_{\alpha\rho}$$

Forma Cartana-Killinga ma postać

$$K_{\mu\nu,\alpha\beta}=f^{\rho\tau}{}_{\mu\nu,\gamma\sigma}f^{\gamma\sigma}{}_{\alpha\beta,\rho\tau}$$

Jej obliczenie jest doś żmudne (w ogólności mamy $8\times 8=64$ wyrazów), ale wykorzystując liczne symetrie okazuje się, że wystarczy obliczyć tylko kilka wyrazów, a reszta sprowadzi się do już obliczonych. Ostatecznie

$$K_{\mu\nu,\alpha\beta}=(2-D)(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}-g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$$

Pamiętając o antysymetrii, możemy zastrzec że $\mu>\nu$ oraz $\alpha>\beta$, i wtedy

$$K_{\mu\nu,\alpha\beta}=2(2-D)g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$$

czyli otrzymujemy iloczyn tensorowy tensorów metrycznych g, $K\sim g\otimes g$. Stąd K jest ujemnie określona tylko, gdy g jest dodatnio/ujemnie określone lub $D=2$. Dla $so(k,l)$ taka sytuacja zachodzi tylko, gdy $k=0$ lub (równoważnie) $l=0$ lub $D=2$. Dlatego $SO(k,l)$ jest grupą zwartą tylko dla $kl=0$, a niezwarta w przeciwnym razie ($D=2$ rozpartuje się osobno, jako zwarta $SO(2)=U(1)$ oraz niezwarta $SO(1,1)=GL(1)$).