Zadania domowe z Metod Matematycznych Fizyki (2012/2013)

Zad. 1
Wypisać tabelę działania grupy obrotów czworościanu A_4.

Zad. 2
Znaleźć podgrupy grupy kwaternionów Q. Z jakimi grupami są izomorficzne? Sprawdzić, że Q/Z_2 jest grupą ilorazową. Z jaką grupą jest izomorficzna?

Zad. 3
Scharakteryzować elementy grupy trójwymiarowych obrotów $SO(3)$, wychodząc z definicji i doprowadzając do reprezentacji przez kąty Eulera.

Zad. 4
Sprawdzić, że macierze

$$\begin{pmatrix} a & d & h \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

dla $abc \neq 0$ tworzą grupę (z mnożeniem macierzowym)

Zad. 5*
Wykazać, że wszystkie grupy rzędu 8 (elementów) są izomorficzne z Z_2^3, $Z_2 \times Z_4$, Z_8, D_4 lub Q.

Zad. 6
Ile kątów Eulera potrzeba, aby sparametryzować elementy grupy $SO(4)$? Podać przykład parametryzacji.

Zad. 7
Sprawdzić do końca izomorfizm $SU(2) \to SO(3)$

$$U = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(x^2 - y^2) & \mathrm{Im}(x^2 + y^2) & -2\mathrm{Re}(xy) \\ -\mathrm{Im}(x^2 - y^2) & \mathrm{Re}(x^2 + y^2) & 2\mathrm{Im}(xy) \\ 2\mathrm{Re}(x\bar{y}) & 2\mathrm{Im}(x\bar{y}) & |x|^2 - |y|^2 \end{pmatrix}$$

Zad. 8
Jakie macierze U odpowiadają obrotom wokół osi x, y, z?

Zad. 9
Sprawdzić, że izomorfizm z Zad. 7 można zapisać

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c' & a' + ib' \\ a' - ib' & -c' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} c & a + ib \\ a - ib & -c \end{pmatrix} U^\dagger$$

Zad. 10
Znaleźć reprezentacje grupy obrotów sześcianu i (*) dwunastościanu foremnego przez permutacje ścian. Porównać z reprezentacją "automatyczną" z tw. Cayleya.

Zad. 11*
Pokazać, że grupy kwaternionów Q nie da się repsezentować permutacjami na < 8 elementach. Wskazówka: zauważyć, że i, j, k muszą być reprezentowane przez cykle 4-elementowe i opcjonalnie transpozycje (tj. 4-cykl lub 4-cykl i transpozycja).

Zad. 12

Pokazać, że tensorową reprezentację $R \in SO(2)$ w $\mathbf{R}^2 \otimes \mathbf{R}^2$ można zapisać

$$RBR^T = R \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{pmatrix} R^T$$

Zad. 13

Pokazać, że tensorową reprezentację $R \in SO(3)$ w $\mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{R}^3$ można zapisać

$$RBR^T = R \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix} R^T$$

Zad. 14

Pokazać, że reprezentacja z poprzedniego zadania zachowuje niezależnie składowe macierzy B: macierz jednostową ze współczynnikiem $\mathrm{Tr}B/3$, część antysymetryczną, część symetryczną bezśladową.

Zad. 15

Jak działa element $SO(2)$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

na tensory $\mathbf{R}^2 \otimes \mathbf{R}^2 \otimes \mathbf{R}^2$?

Zad. 16

Znaleźć klasy sprzężoności A_4.

Zad. 17

Znaleźć orbity grupy obrotów sześcianu.

Zad. 18

Znaleźć orbity grupy macierzy trójkątnych

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad. 19

Rozłożyć na składowe nieprzywiedlne reprezentację tensorową $SU(2)$ na $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$.
Wskazówka: można skorzystać z postaci macierzowej UBU^T (jak zad. 13), szukać składowych jednowymiarowych (co zostanie?).

Zad. 20

Pokazać proste fakty
(a) Grupa permutacji 3-elementowych S_3 jest generowana przez a o rzędzie 3 i b o rzędzie 2, spełniające $ab = ba^2$
(b) Grupa kwaternionów Q jest generowana przez a i b o rzędzie 4, takie że $ab = ba^3$ oraz $a^2 = b^2$

Zad. 21

Zapisać za pomocą generatorów grupy diedralne (symetrii wielokatów foremnych)

Zad. 22

Wypisać wszystkie macierze 2-wymiarowej reprezentacji nieprzywiedlnej grupy S_3, oraz macierze reprezentacji regularnej. Jak to zrobić, aby macierze były rzeczywiste?

Zad. 23

Znaleźć wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy symetrii kwadratu (D_4) i pięciokąta foremnego (D_5). Napisać tablice charakterów. Które reprezentacje można zapisać w postaci rzeczywistej?

Zad. 24

ρ jest dwuwymiarową nieredukowalna reprezentacją S_3. Rozłożyć $\rho \otimes \rho$ na składowe nieredukowalne. Wskazówka: $a^3 = b^2 = e$, $ab = ba^2$ oraz

$$\rho(a) = A = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/3} \end{pmatrix}, \rho(b) = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zwrócić uwagę na wartości własne $A \otimes A$ i na tej podstawie typować składowe nieredukowalne.

Zad. 25*

Pokazać, że grupa obrotów dwudziestościanu jest izomorficzna z A_5.

Zad. 26

Znaleźć macierz A taką, że

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uwaga: Macierz nie jest diagonalizowalna!

Zad. 27

Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem poprawność reprezentacji jednowymiarowych A_4.

Zad. 28

Niech $q = \sum_{a \in G} \chi(a^2)/|G|$. Reprezentacja jest typu

- rzeczywistego jeśli $q = 1$
- zespolonego jeśli $q = 0$
- kwaternionowego jeśli $q = -1$

Sprawdzić typ każdej reprezentacji omawianej na ćwiczeniach i z poprzednich zadań domowych.

Zad. 29

Obliczyć

$$\exp \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \exp \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \exp \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad. 30

Znaleźć stałe struktury i formę Cartana-Killinga dla algebry macierzy

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. 31
Znaleźć stałe struktury i formę Cartana-Killinga dla algebry $su(2)$, generowanej przez $i\sigma_k$ gdzie $\sigma_{1,2,3}$ to macierze Pauliego:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zad. 32
Pokazać, że dowolna kombinacja liniowa macierzy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jest nilpotentna, ale nie mają wspólnej bazy górnotrójkątej (bo mają różne wektory własne).

Zad 33*
Pokazać że w ciele o charakterystyce p (liczba pierwsza), np. reszty z dzielenia przez p, macierz $p \times p$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(tj. $a_{ij} = \delta_{i,j+1}$ gdzie $k+p \equiv k$) ma własność $A^p = 1$ (nie jest niplotentna), podczas gdy $\check{A}^p = 0$ ($\check{A}X = [A, X]$).

Zad. 34
Obliczyć element $SU(2)$: $U = \exp(ix\sigma_1 + iy\sigma_2 + iz\sigma_3)$ gdzie σ_k to macierze Pauliego (zad. 31), a x, y, Z są paramterami rzeczywistymi.

Zad. 35
Pokazać że 3-wymiarowa nieredukowalna reprezentacja $SU(2)$ (zad. 19) jest równoważna reprezentacji $SO(3)$, działającej na wektorze (x, y, z), jeśli działanie $SU(2)$ zapiszemy jako

$$U \begin{pmatrix} z - iy & x \\ x & -z - iy \end{pmatrix} U^T$$

Zad. 36
Pokazać, że

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + [A, [A, B]]/2 + [A, [A, [A, B]]]/3! + \cdots =$$
$$B + \check{A}B + \check{A}^2 B/2 + \check{A}^3/3! + \cdots = \exp \check{A}\, B$$

gdzie $\check{A}B = [A, B]$.
Wskazówka: Zapisać $e^A = e^{tA}$ dla $t = 1$ i różniczkować iteracyjnie t. Inny sposób wymaga pokazania np. indukcją, że

$$\check{A}^n B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} B A^k$$

Zad. 37

Znaleźć $e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB}$ z dokładnością do t^2.

Zad. 38

Dla macierzy Pauliego (zad. 31) obliczyć $(\sigma_1\sigma_3)^{2013}$

Zad. 39

Znaleźć wyrażenie wprost elementów $SO(1,2)$ przez $SL(2,\mathbf{R})$ jak w zad. 7,8,9.

Zad. 40

Znaleźć stałe struktury i formę Killinga dla algebry $sl(2,\mathbf{C})$. Przyjąć bazę algebry: $\sigma_{1,2,3}$ (boosty w kierunkach x,y,z) oraz $i\sigma_{1,2,3}$ (obroty wokół x,y,z), gdzie σ_k to odpowiednie macierze Pauliego (zad. 31). Porównać z $so(1,3)$.

Zad. 41

Jakim elementom $SO(1,3)$ odpowiadają elementy $SL(2,C)$: $I\cosh\alpha + \sigma_k \sinh\alpha$ oraz $I\cos\phi + i\sigma_k \sin\phi$?

Zad. 42*

Znaleźć wyrażenie wprost elementów $SO(1,3)$ przez $SL(2,\mathbf{C})$.

Zad. 43

Pokazać homomorfizm $SL(2,\mathbf{R})\times SL(2,\mathbf{R}) \to SO(2,2)$ zadany przez $Z \to GZH^T$, gdzie $G,H\in SL(2,\mathbf{R})$ oraz

$$Z = \begin{pmatrix} x+y & z+t \\ z-t & x-y \end{pmatrix}$$

wykorzystując wyznacznik.

Zad. 44

Pokazać homomorfizm $SU(2)\times SU(2) \to SO(4)$ zadany przez $Z \to U_1 Z U_2^\dagger$, gdzie $U_1,U_2,Z \in SU(2)$ oraz

$$Z = \begin{pmatrix} x+iy & z+it \\ it-z & x-iy \end{pmatrix}$$

Sprawdzić, że homomorfizm zachowuje unitarność Z. Zauważyć, że można to także pokazać wykorzystując kwaterniony, bo $SU(2) = Sp(1)$.

Zad. 45

Pokazać izomorfizm $SL(2,\mathbf{R}) = SU(1,1)$. Macierze $U\in SU(1,1)$ spełniają $U\sigma_z U^\dagger = \sigma_z$ (patrz zad. 31) oraz $\det U = 1$.

Wskazówka: przyjąć $U = SGS^\dagger$ dla $G\in SL(2,R)$ oraz $S = (I+i\sigma_x)/\sqrt{2}$.

Zad. 46

Relacje komutacyjne dla $so(3)$ i $su(2)$ można zapisać $[J_j,J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$. Operator Casimira ma postać $J^2 = J_jJ_j$. Sprawdzić, że $[J^2,J_k]=0$. Dla $J_\pm = J_1 \pm J_2$ oraz stanów własnych J_3, $J_3 e_m = m e_m$ o własności $J_+ e_j = 0$ mamy $J_\pm e_m = c_m^\pm e_{m\pm 1}$. Obliczyć $c^\pm$ przyjmując konwencję $c\geq 0$ oraz $c_m^+ = c_{m+1}^-$.

Zad. 47

Dla grupy Lorentza przyjąć $2L_k = \epsilon_{kjl}L_{jl}$ (tj. $L_3 = L_{12}$, itd.) oraz $K_j = L_{j0}$. Znaleźć relacje komutacyjne. Pokazać, że operator Casimira $L^2 - K^2$ jest przemienny z L i K. Pokazać, że $2Q_j^\pm = iL_j \pm K_j$ mają relacje komutacyjne $[Q_j^\pm, Q_k^\mp] = 0$ oraz $[Q_j^\pm, Q_k^\pm] = i\epsilon_{jkl}Q_l^\pm$ oraz $L^2 - K^2 = 2(Q^{+2} + Q^{-2})$.

Zad. 48*

Jak wyglądają operatory L dla reprezentacji funkcyjnej $so(3)$ i $so(1,3)$?
Wskazówka $f(v) = f(\Lambda^{-1}v) \simeq f(v) - v^T A^T \nabla f(v)$, jeśli $\Lambda = \exp A \simeq I + A$. Przydatne oznaczenie: $\partial_\mu f = \partial f/\partial x^\mu$

Zad. 49*

Jak wygląda operator Casimira dla reprezentacji funkcyjnej $SO(3)$ i $SO(1,3)$? Znaleźć podział na laplasjan i część radialną (czynniki $r\partial r = x_j \partial_j$ dla $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dla $so(3)$ oraz dalambercjan $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = g^\mu \nu \partial_\mu \partial_\nu = c^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2$ oraz część interwałową (czynniki $2x^\mu \partial_\mu = u\partial/\partial u$ dla $u = s^2 = x^\mu x_\mu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.