

Dodatek A (do ćwiczeń na I tydzień)

Na ćwiczeniach w poniedziałek 5 XI robiliśmy zadanie:

Zad Znaleźć zbiór $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - n)^2 + (y - n)^2 < 2n^2\}$

Rozwiązanie które znaleźliśmy polegało na zauważeniu, że każdy wyraz powyższej sumy opisuje punkty należące do wnętrza koła. Narysowaliśmy koła dla kilku n i zaobserwowaliśmy, że wszystkie są w tym samym punkcie styczne do prostej $y = -x$, a ich środki leżą na prostej $y = x$. Z rysunku wyciągnęliśmy wniosek, że szukany zbiór to

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$$

Jednak nie udowodniliśmy tego formalnie, co uczynimy poniżej.

Chcemy pokazać, że $A = B$, czyli że zachodzi

$$\forall_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} (x, y) \in A \iff (x, y) \in B \quad (1)$$

Przekształćmy wpraw warunek

$$(x - n)^2 + (y - n)^2 < 2n^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{n} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{n} - 1\right)^2 < 2$$

czyli

$$\frac{x^2}{n^2} - 2\frac{x}{n} + \frac{y^2}{n^2} - 2\frac{y}{n} + 2 < 2 \Rightarrow x + y > \frac{x^2 + y^2}{2n} \quad (2)$$

Pokazanie teraz, że wynikanie w (1) rzeczywiście zachodzi w obie strony nie jest już trudne:

i) $\Rightarrow$

Skoro punkt $(x, y) \in A$, to jego współrzędne spełniają (2), więc zachodzi

$$x + y > \frac{x^2 + y^2}{2n} \geq 0 \Rightarrow x + y > 0,$$

czyli rzeczywiście $y > -x$, tzn. $(x, y) \in B$.

ii) $\Leftarrow$

Skoro punkt $(x, y) \in B$, to z definicji zbioru B zachodzi $y + x > 0$. Chcemy pokazać, że wynika stąd, że

$$x + y > \frac{x^2 + y^2}{2n}.$$

Jeśli jednak ustalimy punkt (x, y) , to zawsze znajdzie takie odpowiednio duże n , że ta nierówność będzie zachodzić (jedyną niepewność, czy mogę tak zrobić eliminuje fakt, że $y + x > 0$ - w przeciwnym wypadku, lewa strona byłaby ujemna, a prawa zawsze dodatnia). Czyli rzeczywiście punkt $(x, y) \in A$.

□