

Zadania domowe (do ćwiczeń z I i II tygodnia)

Zad 1 Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna, lecz jej pochodna nie jest ciągła w $x = 0$.

Zad 2 Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n(4-x_n)$, gdzie $x_0 \in]0, 1[$.

Odp. Zbieżny do 1.

Zad 3 Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$ (tj. z liczby całkowitych na liczby całkowite niepodzielne przez 3) zadana wzorem

$$f(n) = (-1)^n + 3E\left(\frac{n}{2}\right)$$

jest bijekcją.

Zad 4 Podać przykład bijekcji $f : X \rightarrow Y$, jeśli

a) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z}$, Wskazówka: skorzystać z funkcji $E(x)$,

b*) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

c*) $X = [0, 1]$, $Y =]0, +\infty[$.