

Zadania domowe z „Analizy z algebrą”

seria 3a

1. Znaleźć rozwinięcie Taylora wokół punktu $x = 0$ dla:
 - a) $f(x) = (\sin x)^2 - x^2 e^{-x}$, do rzędu piątego włącznie,
 - b) $f(x) = (1 + \operatorname{tgh}(x))^\pi$, do rzędu trzeciego włącznie.
 - c) $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ dla $x \neq 0$, $f(0) = e$ do rzędu trzeciego włącznie.
2. Granice a, c, d, e, f, i, o z zadania 11 serii 2 znaleźć ponownie, tym razem przy wykorzystaniu wzoru Taylora.
3. Zbadać przebieg następujących funkcji i naszkicować ich wykresy:
 - a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;
 - b) $y = \frac{x^3}{x-1}$;
 - c) $y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}$;
 - d) $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$;
 - e) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;
 - f) $y = x^2 e^{-x}$;
 - g) $y = \frac{e^{-x}}{1-x}$;
 - i) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
 - j) $y = \sin x - \sin^2 x$;
 - k) $y = x \operatorname{arctg} x$;
 - l) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
4. Posługując się warunkiem koniecznym zbieżności szeregu pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sin \frac{1}{n}\right); \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}).$$

5. Stosując kryterium porównawcze, zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-1/n}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n};$$
$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}; \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tgh}^2 \frac{1}{n}; \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log \frac{n^3+1}{n^3}}; \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{n^2}, x \in \mathbb{R}.$$

6. Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^{2n}};$$
$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (x \operatorname{arctg}(n^2+1))^n, x \in \mathbb{R}_+ \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}; \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^n(n+1)}.$$

7. Stosując kryterium zagęszczeniowe zbadać zbieżność szeregów:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log^2(n+1)}.$$

8. Zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych:

$$\begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right); \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{100} n}{n} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}; \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos \pi n^2; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}. \end{aligned}$$

9. Stosując wybrane przez siebie kryterium zbadać zbieżność szeregów:

$$\begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+5} - 2\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1} \right), \\ c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\sqrt[3]{n^4-n+1}}{n^2 + 4\sqrt[3]{n^7+2n}}, \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1} \right), \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} f(n), \text{ gdzie } f(n) \text{ jest funkcją ograniczoną w } \mathbb{R}, \\ f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, \text{ gdzie } a > 0, \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2)}, \\ h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}, \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{\pi}{2} n, \\ j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \text{ gdzie } a > 0. \quad k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}, \quad l) \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}, \\ m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad n) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1000 + (-1)^n}{n}, \quad o) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{3} - 2)^n. \end{aligned}$$

10. Zbadaj zbieżność szeregów w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ ($q \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)

$$\begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1})^p; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n^p}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n} \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}; \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

11. Zbadaj zbieżność szeregów ewentualnie policz ich sumę.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n; \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}.$$

Podpowiedzi: 6e) Gdy $x = \frac{2}{\pi}$ spytaj ćwiczeniowca, on Ci wskaże drogę. 9f) Gdy $a = e$ postąp jak wyżej. 9l) Pokaż, że ciąg sum częściowych $\sum_{n=1}^N \sin na$ jest ograniczony (mnożąc sumę częściową przez $\sin \frac{a}{2}$ i korzystając ze wzoru $2 \sin b \sin c = \cos(b-c) - \cos(b+c)$).