XII seria zadań z mechaniki kwantowej I (zadania fakultatywne)

12 stycznia 2005

Zadanie 1.

Cząstka o masie m i ładunku q znajduje się w polu elektromagnetycznym o potencjałach Φ i $\vec{A}$.

a) Wykazać, że dla równanie Schrödingera z czasem jest niezmiennicze względem transformacji cechowania: $\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\vec{a} \rightarrow \vec{A} + \text{grad}\,\chi$, jeśli $\Psi \rightarrow \Psi e^{\frac{iq\chi}{\hbar}}$.

b) Wyprowadzić dla takiej cząstki równanie ciągłości $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0$, gdzie $\rho = \Psi^*\Psi$ i $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*\text{grad}\,\Psi - \Psi\text{grad}\Psi^*] - \frac{q}{m}\vec{A}\Psi^*\Psi$,

i wykazać, że ρ i $\vec{j}$ są niezmiennicze względem transformacji cechowania.

Zadanie 2.

Znaleźć poziomy energetyczne i funkcje falowe cząstki o masie m i ładunku q w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = B\vec{e}_z$, przyjmując potencjał $\vec{A} = -By\vec{e}_x$ (na ćwiczeniach używaliśmy $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$). Analizę przeprowadzić w kartezjańskim układzie współrzędnych i porównać uzyskane wyniki z wynikami z ćwiczeń.

Zadanie 3.

Cząstka o spinie $s = \frac{1}{2}$ i momencie magnetycznym μ znajduje się w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = B(0, \sin\delta, \cos\delta)$, czyli część spinowa hamiltonianu tej cząstki $\hat{H} = -\mu\vec{B}\hat{\vec{\sigma}}$, gdzie $\hat{\vec{\sigma}}$ - macierze Pauliego.

a) Wyznaczyć wartości energii spinowej tej cząstki i odpowiadające im unormowane spinowe funkcje falowe.

b) Wyznaczyć i przedyskutować ewolucję czasową funkcji spinowej $\eta(t)$, jeśli $\eta(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zadanie 4.

a) Wykazać, że operator $(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)^n$, gdzie $\vec{\sigma}_1$ i $\vec{\sigma}_2$ - macierze Pauliego określające operatory spinu cząstek 1 i 2, można wyrazić w postaci liniowej funkcji operatora $\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$:

$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)^n = \frac{1}{4}[3 + (-3)^n] + \frac{1}{4}[1 - (-3)^n]\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$, $n = 1, 2, 3, ...$

b) Wykazać, że energia potencjalna $V = V_c(r) + V_\sigma(r)\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$ oddziaływania dwóch cząstek o spinie $s = \frac{1}{2}$ jest równoważna sferycznie symetrycznej energii potencjalnej $V_s(r) = V_c(r) - 3V_\sigma(r)$ w stanie singletowym ($S = 0$) i potencjałowi $V_t(r) = V_c(r) + V_\sigma(r)$ w stanach trypletowych) ($S = 1$).

Zadanie 5.

Dwie cząstki o orbitalnych momentach pędu $\hat{\vec{L}}_1$ i $\hat{\vec{L}}_2$ są w stanie $|l_1 m_1 > |l_2 m_2 >$.

a) Wyznaczyć dla tego stanu dozwolone liczby kwantowe l, m i wartości oczekiwane dla $\hat{\vec{L}}^2$ i $\hat{\vec{L}}_z$, gdzie $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{L}}_1 + \hat{\vec{L}}_2$ jest całkowitym momentem orbitalnym układu cząstek.

b) W szczególnym przypadku $m_1 = l_1$ i $m_2 = l_2 - 1$ znaleźć prawdopodobieństwa wystąpienia poszczegóLnych wartości l w tym stanie.