

Mechanika Kwantowa
III rok
Zadania domowe seria 2

1. Rozważmy cząstkę w jednowymiarowej studni potencjału o postaci

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{dla } x < 0 \text{ i } x > L \end{cases}$$

Jej funkcja falowa w chwili $t = 0$ wynosi

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} N \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \text{dla } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ i } x > L \end{cases}$$

- a) Przedstaw $\Psi(x, 0)$ jako superpozycję stanów stacjonarnych $\phi_n(x)$ w studni

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

i znajdź współczynniki rozkładu c_n .

- b) Korzystając z wyników podpunktu a) znajdź $\Psi(x, t)$

c) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru energii wartości E_n (odpowiadającej energii n -tego stanu stacjonarnego)? Jaka jest wartość oczekiwana energii?

Wskazówka: $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$

2. Dana jest funkcja falowa (w jednym wymiarze):

$$\psi(x, t) = N e^{-\alpha|x|} e^{-i\omega t}$$

gdzie N, α, ω - dodatnie stałe rzeczywiste.

- a) unormować ψ do jedynki.

b) obliczyć wartości oczekiwane x, x^2, p, p^2 i sprawdzić zasadę nieoznaczoności.

c) jaki musi być potencjał $V(x)$, aby ψ spełniała równanie Schrödingera z tym potencjałem? (Wsk. Zróżniczkować ψ dwukrotnie względem x i jednokrotnie względem t).

3. Jednowymiarowa gaussowska paczka falowa opisująca ruch elektronu w jednym wymiarze ma w chwili $t = 0$ dyspersję σ i jest scentrowana wokół punktu $x_0 > 0$, przy czym $x_0 \gg \sigma$. Paczka obdarzona jest średnim pędem $-p_0$ i porusza się w kierunku nieskończonej bariery potencjału ustawionej w punkcie $x = 0$. Wyznaczyć zależność funkcji falowej od czasu. Naszkicować rozkład gęstości prawdopodobieństwa w różnych fazach ruchu (przed, w trakcie i po zderzeniu z barierą).

Wsk.: Nieskończona bariera potencjału narzuca warunek znikania funkcji falowej w $x = 0$. Warunek ten można wymusić symetryzując dowolne rozwiązanie swobodnego równania Schrödingera:

$$\Psi_s(x, t) = \Psi(x, t) - \Psi(-x, t).$$