IV seria zadań z mechaniki kwantowej I

26 października 2004

Zadanie 1.

Znaleźć funkcje falowe i energie stanów związanych cząstki o masie m w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x) & |x| \le \frac{a}{2}, \\ \infty & |x| > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Rozważyć $\alpha > 0$ i $\alpha < 0$.

Zadanie 2.

Cząstka o masie m rozprasza się na jednowymiarowym potencjale $V(x)$, który dla $x \to -\infty$ dąży do V_-, a dla $x \to \infty$ dąży do V_+. Wykazać, że dla $E > \max\{V_-, V_+\}$ współczynniki przejścia i odbicia:

a) nie zależą od tego, z której strony cząstka pada na potencjał,

b) sumują się do jedności.

Wskazówka: Oznaczyć przez $\psi_+(x)$ rozwiązanie dla cząstki padającej z lewej strony, a przez $\psi_-(x)$ - dla cząstki padającej z prawej strony. Wykazać, że: $\psi_- \frac{d\psi_+}{dx} - \psi_+ \frac{d\psi_-(x)}{dx} = const$, $\psi_\pm \frac{d\psi_\pm^*}{dx} - \psi_\pm^* \frac{d\psi_\pm(x)}{dx} = const_\pm$.

Zadanie 3.

Znaleźć poziomy energetyczne i odpowiadające im unormowane funkcje falowe dla cząstki o masie m w polu siły o potencjale:

a) $V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & x \ge 0. \end{cases}$

b) $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - Fx$, czyli dla oscylatora harmonicznego poddanego działaniu stałej siły zewnętrznej F.

Zadanie 4.

Znaleźć poziomy energetyczne i odpowiadające im funkcje falowe dla cząstki o masie m w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \le 0, \\ V_0(\frac{x}{a} - \frac{a}{x})^2 & x > 0. \end{cases}, \ a > 0.$$

Wskazówka: Wprowadzić zmienną niezależną $\xi = \frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar}x^2$ i po analizie równania Schrödingera przy $\xi \to 0$ i $\xi \to \infty$ przejść do zmiennej zależnej $u(\xi)$ określonej wzorem $\psi = \xi^\nu e^{-\frac{1}{2}\xi}u(\xi)$, gdzie $\nu = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0a^2}{\hbar^2}})$.