VII seria zadań z mechaniki kwantowej I

16 listopada 2004

Zadanie 1.
Cząstka znajduje się w stanie o określonych wartościach $\vec{L}^2$ i L_z, czyli ustalonych liczbach kwantowych l i m. Obliczyć $< L_{z'} >$ i $< L^2_{z'} >$ dla rzutu momentu pędu na oś z' skierowaną w kierunku $[\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha]$, czyli dla $\hat{L}_{z'} = \sin\alpha\cos\beta\hat{L}_x + \sin\alpha\sin\beta\hat{L}_y + \cos\alpha\hat{L}_z$.
Wskazówka: Wykazać wcześniej, że w powyższym stanie $< L_x >=< L_y >= 0$, $< L^2_x >=< L^2_y >$, $< L_xL_y + L_yL_x >= 0$ przez obliczenie w tym stanie $< L_+ >$ i $< L^2_+ >$.

Zadanie 2.
Cząstka znajduje się w stanie z $l = 1$ i $m = 1$. Wykorzystując wyniki zadania 1, obliczyć prawdopodobieństwa wystąpienia określonych wartości rzutu momentu pędu cząstki na oś z'.
Wskazówka: Znając $< L_{z'} >$ i $< L^2_{z'} >$, w tym wypadku można łatwo obliczyć prawdopodobieństwa P_1, P_0 i P_{-1}.

Zadanie 3.
Wykorzystując wyniki ze wskazówki zadania 1, wybrać ze stanów z określonymi wartościami l i $m = \{-l, ..., l\}$ stany, dla których można najdokładniej określić jednocześnie L_x i L_y.

Zadanie 4.
Wykazać, że funkcja falowa $\psi = Ax$ jest funkcją własną operatorów $\hat{\vec{L}}^2$ i $\hat{L}_x$.

Zadanie 5.
Sprawdzić, że $j_2(kr)$ spełnia równanie radialne z $l = 2$ dla cząstki swobodnej ($k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$).
Wskazówka: Wyznaczyć $j_2(x)$ ze wzoru $j_l(x) = (-x)^l \, (\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^l \, \frac{\sin x}{x}$.