

Egzamin pisemny z mechaniki kwantowej I

25 stycznia 2005 r.

Zadanie 1 (6 pkt.)

Wyznaczyć poziomy energetyczne dwuwymiarowego atomu wodoru

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{\alpha}{\rho}$$

oraz unormowaną funkcję falową stanu podstawowego. Wskazówka: zastosować współrzędne biegunowe ρ, ϕ w których laplasjan ma postać: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$, a następnie po wyłączeniu zachowania asymptotycznego (potęgowego przy $\rho = 0$ i wykładniczego w nieskończoności) poszukać rozwiązania w postaci szeregu, w sposób analogiczny jak dla problemu w trzech wymiarach.

Zadanie 2 (5 pkt.)

Dany jest hamiltonian

$$H = \hbar \omega a^\dagger a + \lambda (a^{\dagger 2} + a^2).$$

gdzie $[a, a^\dagger] = 1$ i $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) Pokazać, że operatory zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned} b^\dagger &= a^\dagger \cosh \beta + a \sinh \beta \\ b &= a \cosh \beta + a^\dagger \sinh \beta \end{aligned}$$

spełniają reguły komutacyjne: $[b, b^\dagger] = 1$.

b) Znaleźć taką wartość parametru β , by

$$H = \hbar \omega' b^\dagger b + E_0$$

gdzie $E_0 \in \mathbf{R}$.

c) Zinterpretować i podać widmo hamiltonianu H .

Zadanie 3 (5 pkt.)

Płaski rotator $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ (I - moment bezwładności rotatora) został zaburzony przez $H' = V_0 \cos 2\phi$. Znaleźć poprawki do energii rotatora w stanie podstawowym i pierwszym wzbudzonym z uwzględnieniem rachunku zaburzeń do tego rzędu, w którym pojawiają się po raz pierwszy poprawki niezerowe. W przypadku degeneracji wyznaczyć funkcje falowe w zerowym rzędzie odpowiadające obliczonym poprawkom.

Zadanie 4 (4 pkt.)

Spoczywająca cząstka o spinie $1/2$ i momencie magnetycznym μ znajduje się w polu magnetycznym $\vec{B} = (0, 0, B)$. W chwili $t = 0$ spin jest skierowany wzdłuż osi x

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć prawdopodobieństwo w funkcji czasu, że spin jest skierowany przeciwnie do osi x .

Powodzenia!