Rozwiązania zadań z egzaminu pisemnego z mechaniki kwantowej I

25 stycznia 2005 r.

Zadanie 1.

Zupełny układ operatorów przemiennych dla dwuwymiarowego atomu wodoru to H i L_z, czyli będziemy szukać wspólnych funkcji własnych $\psi(\rho, \varphi)$ tych operatorów. Rozwiązanie równania $L_z\psi = m\hbar\psi$ znamy: $\psi = R(\rho)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Po wstawieniu tego rozwiązania do równania $H\psi = E\psi$ otrzymujemy równanie radialne $\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{m^2\hbar^2}{2\mu\rho^2})R = 0$. Szukamy rozwiązań dla stanów związanych, czyli dla $E < 0$, i wprowadziwszy oznaczenie $\kappa = \sqrt{\frac{-2\mu E}{\hbar^2}}$, mamy $\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (-\kappa^2 + \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\frac{1}{\rho} - \frac{m^2}{\rho^2})R = 0$. Zbadamy postać rozwiązań fizycznych przy $\rho \to \infty$ i $\rho \to 0$. Przy $\rho \to \infty$ równanie ma postać $\frac{d^2R}{d\rho^2} - \kappa^2R = 0$ i z jego ogólnego rozwiązania $R = Ae^{-\kappa\rho} + Be^{\kappa\rho}$ warunek całkowalności z kwadratem prowadzi do rozwiązania $R = Ae^{-\kappa\rho}$. Przy $\rho \to 0$ równanie ma postać $\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}R = 0$ i z jego ogólnego rozwiązania $R = C\rho^{|m|} + D\rho^{-|m|}$ warunek braku osobliwości w $\rho = 0$ prowadzi do rozwiązania $R = C\rho^{|m|}$.

Po wprowadzeniu wzorem $R = \rho^{|m|}e^{-\kappa\rho}u(\rho)$ nowej zmiennej zależnej u równanie radialne (pomijamy proste przekształcenia) jest równoważne równaniu

$\rho\frac{d^2u}{d\rho^2} + (2|m| + 1 - 2\kappa\rho)\frac{du}{d\rho} - [(2|m| + 1)\kappa - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}]u = 0$.

Poszukajmy rozwiązania tego równania w postaci szeregu potęgowego $u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\rho^k$. Na współczynniki a_k otrzymujemy równanie:

$\sum_{k=0}^{\infty}[(k(k-1) + k(2|m|+1))a_k\rho^{k-1} - (2\kappa k + (2|m|+1)\kappa - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2})a_k\rho^k] \equiv 0$, czyli

$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(k+2|m|+1)a_{k+1} - ((2k+2|m|+1)\kappa - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2})a_k]\rho^k \equiv 0$, skąd

wynika wzór rekurencyjny $a_{k+1} = \frac{(2|m|+2k+1)\kappa - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}}{(k+1)(k+2|m|+1)}a_k$. Przy $k >> 1$ mielibyśmy $\frac{a_{k+1}}{a_k} \approx \frac{2\kappa}{k}$, co odpowiadałoby funkcji $e^{2\kappa\rho}$ i prowadziłoby do niecałkowalnej funkcji $R \sim e^{\kappa\rho}$. Szereg musi więc urywać się dla pewnego $k = n_\rho$, $n_\rho = 0, 1, 2, \ldots$, stając się wielomianem stopnia n_ρ, czyli musi zachodzić związek $(2|m| + 2n_\rho + 1)\kappa - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} = 0$, skąd $\kappa = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2(2|m|+2n_\rho+1)}$.

Poziomy energetyczne określa więc wzór $E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu} = -\frac{2\mu\alpha^2}{\hbar^2n^2}$, gdzie główna liczba kwantowa $n \equiv 2|m| + 2n_\rho + 1 = 1, 3, 5, \ldots$. Degeneracja poziomu o głównej liczbie kwantowej n wynosi n, gdyż na tyle sposobów można przy ustalonym n wybrać m i $\psi = A\rho^{|m|}u_{n_\rho}(\rho)e^{-\kappa\rho}e^{im\varphi}$. Dla stanu podstawowego z $n = 1$ mamy $n_\rho = 0$, $m = 0$, $\psi = Ae^{-\kappa_1\rho}$, gdzie $\kappa_1 = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}$, i z warunku unormowania $2\pi|A|^2\int_0^\infty d\rho\rho e^{-2\kappa_1\rho} = 1$ otrzymujemy $A = \frac{1}{\sqrt{8\pi}\kappa_1}$.

Zadanie 2.

a) $[b, b^\dagger] = [a, a^\dagger]\cosh^2\beta + [a^\dagger, a]\sinh^2\beta = \cosh^2\beta - \sinh^2\beta = 1$.

b) Ponieważ $a^\dagger = b^\dagger\cosh\beta - b\sinh\beta$ i $a = b\cosh\beta - b^\dagger\sinh\beta$, to

$H = \hbar\omega[b^\dagger b\cosh^2\beta - (b^\dagger b^\dagger + bb)\sinh\beta\cosh\beta + bb^\dagger\sinh^2\beta] + \lambda[(b^\dagger b^\dagger + bb)(\cosh^2\beta + \sinh^2\beta) - 2(b^\dagger b + bb^\dagger)\sinh\beta\cosh\beta]$

i podstawiając z a) $bb^\dagger = b^\dagger b + 1$ otrzymujemy $H = b^\dagger b[\hbar\omega(\cosh^2\beta + \sinh^2\beta) - 4\lambda\cosh\beta\sinh\beta] - (b^\dagger b^\dagger + bb)[\hbar\omega\sinh\beta\cosh\beta - \lambda(\cosh^2\beta + \sinh^2\beta)] + E_0$.

Jeśli wybierzemy $\hbar\omega\sinh\beta\cosh\beta - \lambda(\cosh^2\beta + \sinh^2\beta) = 0$, czyli $\frac{1}{2}\hbar\omega\sinh(2\beta) - \lambda\cosh(2\beta) = 0$ i ostatecznie $\mathrm{tgh}\,2\beta = \frac{2\lambda}{\hbar\omega}$, to otrzymamy $H = \hbar\omega' b^\dagger b + E_0$, gdzie $\hbar\omega' = \hbar\omega\cosh(2\beta) - 2\lambda\sinh(2\beta)$.

Rozwiązanie $\beta = \frac{1}{2}\mathrm{artgh}\frac{2\lambda}{\hbar\omega}$ istnieje, jeśli $|2\lambda| < \hbar\omega$, bo dla rzeczywistych x zawsze $|\mathrm{tgh}\,x| < 1$. Ponieważ $\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tgh}^2x}}$ i $\sinh x = \frac{\mathrm{tgh}x}{\sqrt{1-\mathrm{tgh}^2x}}$, to

$\hbar\omega' = \hbar\omega\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{\hbar^2\omega^2}}} - 2\lambda\frac{\frac{2\lambda}{\hbar\omega}}{\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{\hbar^2\omega^2}}} = \hbar\omega\sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{\hbar^2\omega^2}}$.

c) Ponieważ związki komutacyjne dla operatorów a i b są takie same, a wartości energii dla oscylatora z $H_{osc} = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ wynoszą $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, ...$, to w tym zadaniu widmo hamiltonianu H ma postać $E_n = \hbar\omega' n + E_0$, $n = 0, 1, 2, ...$

Zadanie 3.
Stanami własnymi hamiltonianu $H_0 = \frac{L_z^2}{2I}$ są stany własne składowej momentu pędu $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\varphi}$, czyli $\psi_m^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, prowadzące do $E_m^0 = \frac{m^2\hbar^2}{2I}$. Liczba kwantowa m musi być całkowita, aby $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$; funkcje ψ_m^0 są układem ortonormalnym: $(\psi_k^0, \psi_m^0) = \delta_{km}$. Poziomy energetyczne są dla $m \neq 0$ dwukrotnie zdegenerowane - odpowiadają im ψ_m^0 i ψ_{-m}^0.
Dla stanu podstawowego z $m = 0$ mamy $E_0^0 = 0$, $\psi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ i brak degeneracji. Wtedy $H'\psi_0^0 = \frac{V_0}{2}(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{V_0}{2}(\psi_2^0 + \psi_{-2}^0)$. Stąd $E_0^1 = (\psi_0^0, H'\psi_0^0) = 0$, zaś do E_0^2 mamy wkład tylko od stanów $k = 2$ i $k = -2$, czyli
$E_0^2 = \frac{\frac{V_0^2}{4}}{0 - \frac{4\hbar^2}{2I}} + \frac{\frac{V_0^2}{4}}{0 - \frac{4\hbar^2}{2I}} = -\frac{V_0^2 I}{4\hbar^2}$.
Dla pierwszego stanu wzbudzonego z $m = \pm 1$ mamy $E_1^0 = \frac{\hbar^2}{2I}$ i degenerację dwukrotną z $\psi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi}$ i $\psi_{-1}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi}$. Wtedy:
$H'\psi_1^0 = \frac{V_0}{2}(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} = \frac{V_0}{2}(\psi_3^0 + \psi_{-1}^0)$
$H'\psi_{-1}^0 = \frac{V_0}{2}(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} = \frac{V_0}{2}(\psi_1^0 + \psi_{-3}^0)$
Macierz zaburzenia $= \begin{bmatrix} (\psi_1^0, H'\psi_1^0) & (\psi_1^0, H'\psi_{-1}^0) \\ (\psi_{-1}^0, H'\psi_1^0) & (\psi_{-1}^0, H'\psi_{-1}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V_0}{2} \\ \frac{V_0}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ma wartości własne E_1^1 równe $\frac{V_0}{2}$ i $-\frac{V_0}{2}$ i odpowiadające im wektory własne $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Dla $E_1^1 = \frac{V_0}{2}$ mamy więc $\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^0 + \psi_{-1}^0) = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\pi}}$,
a dla $E_1^1 = -\frac{V_0}{2}$ odpowiednio $\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^0 - \psi_{-1}^0) = \frac{i\sin\varphi}{\sqrt{\pi}}$.

Zadanie 4.
Stanami własnymi macierzy diagonalnej $H = -\mu B\sigma_z = \begin{bmatrix} -\mu B & 0 \\ 0 & \mu B \end{bmatrix}$ są $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dla $E = -\mu B$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dla $E = \mu B$.
Ponieważ $\phi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, to $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\mu Bt/\hbar} \\ e^{-i\mu Bt/\hbar} \end{pmatrix}$.
Prawdopodobieństwo pozostania w stanie $\phi(t=0)$ ze spinem wzdłuż osi x wynosi $P_+ = |(\phi(t=0), \phi(t))|^2 = |\frac{1}{2}(e^{i\mu Bt/\hbar} + e^{-i\mu Bt/\hbar})|^2 = \cos^2(\mu Bt/\hbar)$, a prawdopodobieństwo odwrócenia spinu $P_- = 1 - P_+ = 1 - \cos^2(\mu Bt/\hbar) = \sin^2(\mu Bt/\hbar)$.