Egzamin poprawkowy z mechaniki kwantowej I
18 lutego 2005 r.

Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i dyskusji wyników spowoduje istotne obniżenie oceny.

Zadanie 1 (4 pkt.)

Cząstka o masie m znajduje się w dwuwymiarowym potencjale

$$V(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 & 0 < x < a, \\ \infty & \text{pozostałe } x. \end{cases}$$

a) Wyznaczyć poziomy energetyczne cząstki.
b) Dla jakiej wartości a pierwszy stan wzbudzony cząstki będzie zdegenerowany?
Wskazówka: Wykazać, że $V(x,y)$ można zapisać w postaci $V(x,y) = V_x(x) + V_y(y)$, co pozwala rozdzielić zmienne $\psi(x,y) = f(x)g(y)$ w równaniu Schrödingera.

Zadanie 2 (5 pkt.)

Elektron w atomie wodoru znajduje się w stanie opisanym przez unormowaną funkcję falową $\psi = R_{21}(r)(\sqrt{\frac{1}{3}}Y_{10}(\vartheta,\varphi) + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}(\vartheta,\varphi))$, gdzie $R_{21}(r) = \sqrt{\frac{1}{24a_0^3}}\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}$.
a) Obliczyć prawdopodobieństwa pomiaru poszczególnych wartości L_z
oraz obliczyć $< L_z >$ i $< L_x >$.
b) Obliczyć średnią odległość elektronu od jądra.
Wskazówka: $L_{\pm}Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\,\hbar\, Y_{l,m\pm1}$.

Zadanie 3 (6 pkt.)

Cząstka o masie m rozprasza się na potencjale $V(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, $\alpha > 0$.
a) Przy użyciu metody fal cząstkowych znaleźć przesunięcia fazowe rozpraszania δ_l dla wszystkich l.
b) Obliczyć amplitudę rozpraszania dla $\frac{8m\alpha}{\hbar^2} << 1$ i porównać ją z amplitudą rozpraszania f_B obliczoną w przybliżeniu Borna.
Wskazówka: $\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$, $f_B = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^{\infty} dr r \sin(qr)V(r)$, $\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 4 (5 pkt.)

Cząstka o spinie $s = \frac{1}{2}$ i momencie magnetycznym μ znajduje się w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = B(\sin\delta, 0, \cos\delta)$, czyli część spinowa hamiltonianu tej cząstki ma postać $H = -\mu\vec{B}\vec{\sigma}$, gdzie $\vec{\sigma}$ - macierze Pauliego.
a) Wyznaczyć wartości energii spinowej tej cząstki i odpowiadające im unormowane spinowe funkcje falowe.
b) Wyznaczyć ewolucję czasową funkcji spinowej $\eta(t)$, jeśli $\eta(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, i obliczyć prawdopodobieństwo odwrócenia spinu cząstki w chwili t.

Powodzenia!