Pierwsze kolokwium z mechaniki kwantowej I
27 listopada 2004 r.

Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i dyskusji wyników spowoduje istotne obniżenie oceny.

Zadanie 1 (5 pkt.)
Cząstka o masie μ znajduje się w potencjale $V(r) = -\alpha\,\delta(r-a)$, $\alpha > 0$.
Wyznaczyć energię i funkcję falową stanu stacjonarnego związanego z $l = 0$ (bez obliczania stałej normalizacyjnej).
Dla jakich wartości α istnieje taki stan?
Wskazówka: Graficzne rozwiązywanie równania na energię jest prostsze po wyrażeniu funkcji hiperbolicznych przez funkcje wykładnicze.

Zadanie 2 (1 pkt. + 4 pkt.)
Cząstka o masie μ znajduje się w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a, \\ \infty & \text{pozostałe}\, x. \end{cases}$$

a) Wyznaczyć poziomy energetyczne cząstki i odpowiadające im unormowane funkcje falowe.
b) Wyznaczyć $\Psi(x,t)$, prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w stanach o określonej energii i $<$E$>$, jeśli w chwili $t = 0$ cząstka znajduje się w stanie

$$\Psi(x, t=0) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a}} \sin\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{\pi x}{a} & 0 < x < a, \\ 0 & \text{pozostałe}\, x. \end{cases}$$

Wskazówka: Przydatne wzory:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Zadanie 3 (2 pkt. + 3 pkt.)
a) Obliczyć komutator $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ dla składowych kartezjańskich orbitalnego momentu pędu cząstki i wypisać uogólnioną zasadę nieoznaczoności dla pomiaru tych składowych.
b) Obliczyć dyspersje dla tych składowych i sprawdzić słuszność tej zasady dla cząstki w stanie o ustalonych liczbach kwantowych l i m określających wartości $\vec{L}^2$ i L_z.

Powodzenia!