Rozwiązania zadań z I kolokwium z mechaniki kwantowej I

Zadanie 1.

Dla tego potencjału stany związane mogą pojawić się tylko dla energii $E < 0$.

Po podstawieniu $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ równanie radialne dla stanów związanych s (czyli z $l = 0$)

$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E + \alpha\delta(r-a))\chi = 0$ jest równoważne równaniom $(\kappa = \sqrt{\frac{-2\mu E}{\hbar^2}})$:

$\frac{d^2\chi_<}{dr^2} - \kappa^2\chi_< = 0$ dla $r < a$, $\frac{d^2\chi_>}{dr^2} - \kappa^2\chi_> = 0$ dla $r > a$ i warunkom brzegowym:

$\chi_<(0) = 0$, $\lim_{r\to\infty}\chi_>(r) = 0$,

$\chi_>(a) = \chi_<(a)$, $\chi'_>(a) = \chi'_<(a) - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\chi_>(a)$.

Rozwiązania ogólne tych równań mają postać $\chi_< = A\sinh(\kappa r) + B\cosh(\kappa r)$, $\chi_> = Ce^{-\kappa r} + De^{or}$
i z warunków brzegowych otrzymujemy:

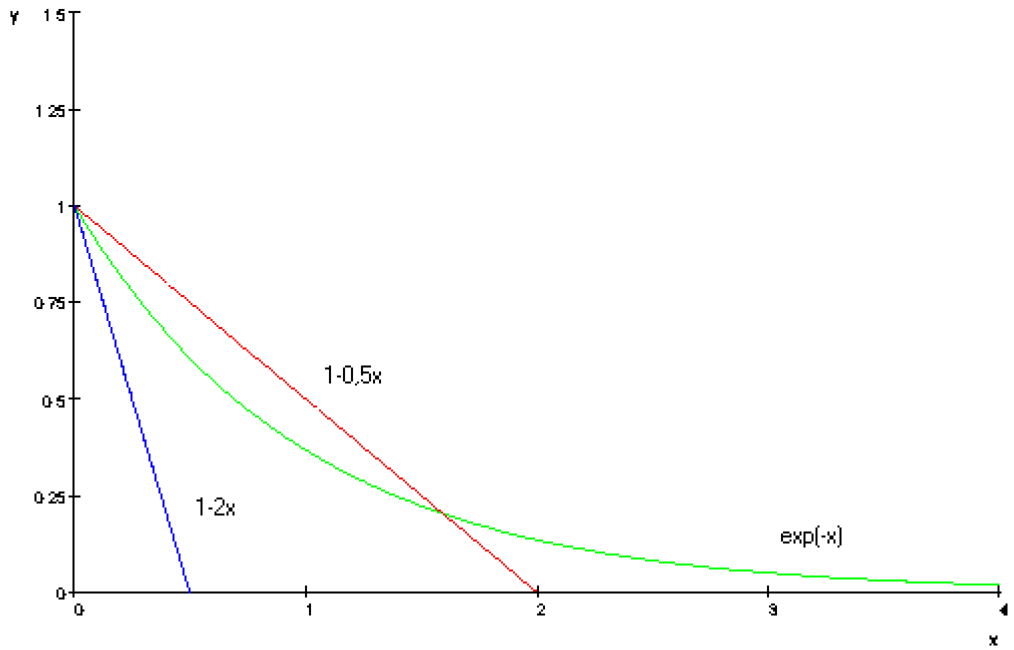
$B=0$, $D=0$, $Ce^{-\kappa a} = A\sinh(\kappa a)$, $-\kappa Ce^{-\kappa a} = \kappa A\cosh(\kappa a) - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}Ce^{-\kappa a}$.

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań jest więc

$\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} - \kappa = \kappa\,\mathrm{ctgh}(\kappa a)$, czyli $1 + \mathrm{ctgh}(\kappa a) \equiv 1 + \frac{e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}}{e^{\kappa a} - e^{-\kappa a}} \equiv \frac{2e^{\kappa a}}{e^{\kappa a} - e^{-\kappa a}} \equiv \frac{2}{1 - e^{-2\kappa a}} = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2\kappa}$,

a więc $e^{-2\kappa a} = 1 - \frac{\hbar^2}{2\mu\alpha a}2\kappa a$.

Gdy $\frac{\hbar^2}{2\mu\alpha a} \geq 1$, równanie to nie ma rozwiązań; gdy $\frac{\hbar^2}{2\mu\alpha a} < 1$, czyli $\alpha > \frac{\hbar^2}{2\mu a}$, jest dokładnie jedno rozwiązanie - zob. rysunek, $x=2\kappa a$:



Zadanie 2.

a) Mamy rozwiązać dla $E > 0$ równanie Schrödingera bez czasu $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0$

z potencjałem $V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{pozostałe } x \end{cases}$. Otrzymujemy więc $\psi=0$ w obszarze poza studnią (w obszarze z $V = \infty$) i wewnątrz studni (w obszarze $0 < x < a$) równanie $\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$, gdzie $k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$, oraz warunki brzegowe (zszycia): $\psi(0)=0$, $\psi(a)=0$.

Ogólne rozwiązanie tego równania $\psi = A\sin(kx) + B\cos(kx)$ jest niezerowe i spełnia warunki brzegowe, jeśli $B=0$, $\sin(ka)=0$, czyli $k = \frac{n\pi}{a}$, n = 1, 2, 3, ... Warunek normalizacji $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\, dx = 1$ prowadzi do

$$|A|^2 \int_0^a \sin^2(\frac{n\pi x}{a})dx = \frac{|A|^2\, a}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sin^2 y dy = \frac{|A|^2\, a}{2n\pi}\int_0^{n\pi}(1-\cos(2y))dy = \frac{|A|^2\, a}{2n\pi}(y - \frac{1}{2}\sin(2y))\Big|_0^{n\pi} = \frac{|A|^2\, a}{2} = 1,$$

czyli $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

Ostatecznie $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$, $\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}) & 0 < x < a \\ 0 & \text{pozostale } x \end{cases}$, n = 1, 2, 3, ...

b) Ponieważ $\frac{2}{\sqrt{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a})\cos(\frac{\pi x}{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}}(\sin(\frac{\pi x}{a}) + \sin(\frac{3\pi x}{a}))$, więc $\Psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_3)$,

czyli $\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \psi_3 e^{-i\frac{E_3 t}{\hbar}})$. Prawdopodobieństwo wystąpienia w stanie o energii E_1 wynosi

$P_1 = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, $P_3 = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, a średnia energia $< E >= P_1E_1 + P_3E_3 = \frac{1}{2}(\frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu a^2} + \frac{9\hbar^2\pi^2}{2\mu a^2}) = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2\mu a^2}$.

Zadanie 3.

a) $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$, $\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$, $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$, gdzie $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$, $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$, $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$.

Ponieważ $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$, $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ oraz $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$, to (pomijając ^):

$$[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = y[p_z, z]p_x + yz[p_z, p_x] + [y, z]p_x p_z + z[y, p_x]p_z - y[p_z, x]p_z +$$
$$- yx[p_z, p_z] - [y, x]p_z p_z - x[y, p_z]p_z - z[p_y, z]p_x - zz[p_y, p_x] - [z, z]p_x p_y - z[z, p_x]p_y + z[p_y, x]p_z +$$
$$+ zx[p_y, p_z] + [z, x]p_z p_y + x[z, p_z]p_y = i\hbar(-yp_x + xp_y) = i\hbar L_z.$$

Z ogólnej zasady nieoznaczoności: jeśli dla hermitowskich operatorów $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ zachodzi $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, to w dowolnym stanie $\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2}|< C >|$, gdzie średnie odchylenie standardowe np. dla wielkości A zdefiniowane jest przez $\sigma_A = \sqrt{<(A - < A >)^2>} = \sqrt{< A >^2 - < A >^2}$.

W naszym wypadku mamy więc $\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}|< L_z >|$.

b) Ponieważ dla $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ mamy $\hat{L}_\pm \psi_{lm} \sim \psi_{l,m\pm 1}$, to wartość oczekiwana w stanie ψ_{lm} wynosi $< L_+ >\equiv (\psi_{lm}, \hat{L}_+\psi_{lm}) = 0 =< L_x > + i < L_y >$ i ze względu na rzeczywistość wartości średnich wielkości fizycznych reprezentowanych przez operatory hermitowskie mamy $< L_x >= 0 =< L_y >$.

Analogicznie ze względu na $< L_+^2 >= 0 =< L_x^2 - L_y^2 > + i < L_x L_y + L_y L_x >$ otrzymujemy $< L_x^2 >=< L_y^2 >$ oraz $< L_x L_y + L_y L_x >= 0$. Stąd w stanie ψ_{lm} mamy

$$< L_x^2 >=< L_y^2 >= \frac{1}{2} < L_x^2 + L_y^2 >= \frac{1}{2} < \vec{L}^2 - L_z^2 >= \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1) - m^2]$$

oraz $\sigma_{L_x} = \sigma_{l_y} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{l(l+1) - m^2}$. Wtedy $\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} = \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1) - m^2]$ oraz $< L_z >= m\hbar$ i spełniona jest zasada nieoznaczoności $\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar^2}{2}|m|$, gdyż nierówność $l(l+1) - m^2 \geq |m|$ jest równoważna nierówności $l(l+1) - |m|(|m|+1) \geq 0$, która jest słuszna, gdyż $|m| \leq l$.