Rozwiązania zadań z kolokwium poprawkowego z mechaniki kwantowej I
24 stycznia 2005 r.

Zadanie 1.
Unormowanymi rozwiązaniami zagadnienia własnego $L_z\psi_m = m\hbar\psi_m$, czyli równania $\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{d\varphi} = m\hbar\psi$, są $\psi_m = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im\varphi}$, przy czym z warunku $\psi(\varphi+2\pi) = \psi(\varphi)$ wynika $m = 0, \pm1, \pm2, ...$. Funkcje te odpowiadają energiom $E_m = \frac{m^2\hbar^2}{2I}$, przy czym dla $m \neq 0$ poziomy są dwukrotnie zdegenerowane - odpowiadają im funkcje ψ_m i ψ_{-m}.
Jeśli $\Psi(t=0) = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}\cos^2\varphi = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}(e^{2i\varphi}+2+e^{-2i\varphi})$, to
$\Psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}(e^{2i\varphi-i\frac{E_2t}{\hbar}}+2+e^{-2i\varphi-i\frac{E_2t}{\hbar}}) = \sqrt{\frac{1}{6}}((\psi_2+\psi_{-2})e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}}+2\psi_0)$.
Pomiar energii da $E_2 = \frac{2\hbar^2}{I}$ z prawdopodobieństwem $P_2+P_{-2} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ oraz $E_0 = 0$ z prawdopodobieństwem $P_0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Zadanie 2.
a) $[r,p_r]\psi = \frac{\hbar}{i}[r\frac{1}{r}\frac{d(r\psi}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d(r^2\psi)}{dr}) = \frac{\hbar}{i}(\psi + r\frac{d\psi}{dr} - 2\psi - r\frac{d\psi}{dr}) = i\hbar\psi$, czyli $[r,p_r] = i\hbar$.
Zasada nieoznaczoności dla tych wielkości ma więc postać $\sigma_r^2\sigma_{p_r}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$,
gdzie $\sigma_r^2 \equiv < r^2 > - < r >^2$, $\sigma_{p_r}^2 \equiv < p_r^2 > - < p_r >^2$.
W stanie $\psi = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\pi}}e^{-\lambda r}$ mamy kolejno ($\int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n!$):
$< r > = \int d^3r r|\psi|^2 = 4\pi\frac{\lambda^3}{\pi}\int_0^\infty dr r^3 e^{-2\lambda r} = \frac{1}{4\lambda}\int_0^\infty dx x^3 e^{-x} = \frac{3}{2\lambda}$,
$< r^2 > = \int d^3r r^2|\psi|^2 = 4\pi\frac{\lambda^3}{\pi}\int_0^\infty dr r^4 e^{-2\lambda r} = \frac{1}{8\lambda^2}\int_0^\infty dx x^4 e^{-x} = \frac{3}{\lambda^2}$,
$\sigma_r^2 = \frac{3}{\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{3}{4\lambda^2}$,
$< p_r > = \int d^3r\psi^* p_r\psi = \frac{\hbar}{i}4\pi\frac{\lambda^3}{\pi}\int_0^\infty dr r(1-\lambda r)e^{-2\lambda r} = \frac{\hbar\lambda}{i}\int_0^\infty dx(x-\frac{1}{2}x^2)e^{-x} = \frac{\hbar\lambda}{i}(1-1) =$
$= 0$,
$< p_r^2 > = \int d^3r|p_r\psi|^2 = 4\pi\hbar^2\frac{\lambda^3}{\pi}\int_0^\infty dr(1-\lambda r)^2 e^{-2\lambda r} = 2\hbar^2\lambda^2\int_0^\infty dx(1-x+\frac{1}{4}x^2)e^{-x} =$
$= 2\hbar^2\lambda^2(1-1+\frac{1}{2}) = \hbar^2\lambda^2$,
$\sigma_{p_r}^2 = 2\lambda^2$, $\sigma_r^2\sigma_{p_r}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 > \frac{1}{4}\hbar^2$.
b) Równanie radialne dla atomu wodoru ma postać $\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{2}{r}\frac{dr}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E + \frac{e'^2}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2})R = 0$, gdzie $e'^2 \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Wynikająca z zadanej funkcji ψ (odpowiadającej $l=0$, bo niezależnej od θ i φ) funkcja $R = Ae^{-\lambda r}$ ma spełniać równanie radialne dla dowolnego r, czyli
$[\lambda^2 - \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu e'^2}{\hbar^2 r}]Ae^{-\lambda r} \equiv 0$,
skąd $\lambda = \frac{\mu e'^2}{\hbar^2} = \frac{1}{a_0}$, $E = -\frac{\hbar^2\lambda^2}{2\mu} = -\frac{e'^2}{2a_0}$.

Zadanie 3.
Punktem wyjścia są stany stacjonarne problemu niezaburzonego:
energie $E^0_{n_xn_y} = \frac{\hbar^2(n_x^2+n_y^2)\pi^2}{2ma^2}$; $n_x, n_y = 1,2,3,...$ i ortonormalne funkcje falowe

$$\psi^0_{n_xn_y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{a}\sin\frac{n_x\pi x}{a}\sin\frac{n_y\pi y}{a} & 0<x<a,\ 0<y<a \\ 0 & \text{pozostałe } x \text{ i } y, \end{cases}$$

Stan podstawowy jest niezdegenerowany i odpowiada mu funkcja falowa ψ_{11}.
Ponieważ $V'\psi^0_{11} = \frac{V_0}{4}\psi^0_{22}$, to $E^1_{11} = (\psi^0_{11}, V'\psi^0_{11}) = \frac{V_0}{2}(\psi^0_{11}, \psi^0_{22}) = 0$.

Pierwszy stan wzbudzony jest dwukrotnie zdegenerowany i odpowiadają mu funkcje falowe ψ^0_{21} i ψ^0_{12}.
Ponieważ $V'\psi^0_{21} = \frac{V_0}{4}(\psi^0_{12} + \psi^0_{32})$, $V'\psi^0_{12} = \frac{V_0}{4}(\psi^0_{21} + \psi^0_{23})$, to
macierz zaburzenia $= \begin{bmatrix} (\psi^0_{21}, V'\psi^0_{21}) & (\psi^0_{21}, V'\psi^0_{12}) \\ (\psi^0_{12}, V'\psi^0_{21}) & (\psi^0_{12}, V'\psi^0_{12}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V_0}{4} \\ \frac{V_0}{4} & 0 \end{bmatrix}$.
Wartościami i wektorami własnymi tej macierzy są odpowiednio
$\frac{V_0}{4}$ i $\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $-\frac{V_0}{4}$ i $\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Stanowi $\sqrt{\frac{1}{2}}(\psi^0_{21} + \psi^0_{12})$ odpowiada więc $E^1 = \frac{V_0}{4}$,
a stanowi $\sqrt{\frac{1}{2}}(\psi^0_{21} - \psi^0_{12})$ odpowiednio $E^1 = -\frac{V_0}{4}$.