XII seria zadań domowych z elektrodynamiki R (2009/10)

Zadanie 1.
Wykazać, że wzór Jefimienki dla pola $\vec{E}$ w próżni:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\Big(\frac{[\rho]_{ret}\vec{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\rho}]_{ret}\vec{n}}{cR} - \frac{[\dot{\vec{j}}]_{ret}}{c^2R}\Big),$$

gdzie $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$, $[f(\vec{r}', t')]_{ret} = f(\vec{r}', t - \frac{R}{c})$, można zapisać w równoważnej postaci

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\Big(\frac{[\rho]_{ret}\vec{n}}{R^2} + \frac{([\vec{j}]_{ret}\vec{n})\vec{n} + ([\vec{j}]_{ret}\times\vec{n})\times\vec{n}}{cR^2} + \frac{([\dot{\vec{j}}]_{ret}\times\vec{n})\times\vec{n}}{c^2R}\Big).$$

Z pierwszej postaci widać, że dla statycznych źródeł otrzymujemy wzór Coulomba, natomiast z drugiej postaci, że proporcjonalna do $\frac{1}{R}$ składowa pola $\vec{E}$ jest prostopadła do $\vec{n}$, czyli poprzeczna.
Uwaga: Dla pola $\vec{B}$ taka analiza nie jest potrzebna, gdyż oryginalny wzór Jefimienki ma prostszą postać

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\Big(\frac{[\vec{j}]_{ret}\times\vec{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\vec{j}}]_{ret}\times\vec{n}}{cR}\Big).$$

Zadanie 2.
W umieszczonym w próżni nieskończonym prostym drucie (obojętnym elektrycznie) płynie prąd o natężeniu

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla}\, t \le 0, \\ I_0\frac{t}{T} & \text{dla}\, t > 0, \end{cases}$$

gdzie $T > 0$. Znaleźć $\vec{E}$ i $\vec{B}$ dla powstałego pola elektromagnetycznego.

Zadanie 3.
Wzdłuż osi z między punktami $z = -\frac{d}{2}$ i $z = \frac{d}{2}$ umieszczono antenę liniową z prądem o natężeniu $I = \mathrm{Re}\{I_0 \sin(2\pi\frac{z}{d})e^{-i\omega t}\}$. Wyznaczyć i przedyskutować rozkład kątowy uśrednionej po czasie mocy promieniowania $\langle\frac{dI}{d\Omega}\rangle$ oraz uśrednioną po czasie moc promieniowania $\langle I\rangle$ anteny.

Zadanie dodatkowe.
Wykazać, że dla elektrodynamiki z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi wzory Jefimienki mają postać

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\Big(\frac{[\rho_e]_{ret}\vec{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\rho}_e]_{ret}\vec{n}}{cR} - \frac{[\dot{\vec{j}}_e]_{ret}}{c^2R}\Big) - \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\Big(\frac{[\vec{j}_m]_{ret}\times\vec{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\vec{j}}_m]_{ret}\times\vec{n}}{cR}\Big),$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\Big(\frac{[\vec{j}_e]_{ret}\times\vec{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\vec{j}}_e]_{ret}\times\vec{n}}{cR}\Big) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\Big(\frac{[\rho_m]_{ret}\vec{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\rho}_m]_{ret}\vec{n}}{cR} - \frac{[\dot{\vec{j}}_m]_{ret}}{c^2R}\Big).$$

13.05.2010