

II seria zadań domowych z elektrodynamiki R (2009/10)

Zadanie 1.

Wyznaczyć gęstość ładunku elektrycznego wytwarzającego pole elektrostatyczne o potencjale

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e_e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-2\frac{r}{a}},$$

gdzie e_e jest ładunkiem elementarnym. Obliczyć całkowity ładunek elektryczny z definicji i z całkowego prawa Gaussa. Jakiemu układowi odpowiada znaleziony rozkład ładunku i jaki jest sens fizyczny długości a ?

Zadanie 2.

Wyznaczyć w całej przestrzeni rozkład potencjału ϕ i natężenia \vec{E} pola elektrostatycznego jednorodnie naładowanej ładunkiem Q sfery o promieniu R w zmodyfikowanej elektrodynamice, w której natężenie pola ładunku punktowego q umieszczonego w początku układu określone jest zmodyfikowanym wzorem Coulomba

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{2+\gamma}} \vec{e}_r, \quad |\gamma| \ll 1.$$

Przeanalizować wyniki i zwrócić uwagę, że w tej zmodyfikowanej elektrodynamice (czyli dla $\gamma \neq 0$) oczywiście nie obowiązuje standardowe prawo Gaussa.

Odpowiedź: Jeśli środek sfery znajduje się w początku układu współrzędnych, to

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(a+r)^{1-\gamma} - |a-r|^{1-\gamma}}{2ar(1-\gamma^2)}.$$

Zadanie 3.

W elektrodynamice z fotonem o masie $m_\gamma \neq 0$ wzór Coulomba dla ładunku punktowego q w początku układu współrzędnych ma postać

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (1 + \mu r) e^{-\mu r} \vec{e}_r, \quad \mu = \frac{m_\gamma c}{\hbar}.$$

Wyznaczyć potencjał skalarny $\phi(\vec{r})$ dla tego pola i wykazać, że prawo Gaussa dla powierzchni sfery $S(r)$ (i odpowiadającej jej kuli $K(r)$) o środku w początku układu przyjmuje wtedy postać

$$\oint_{S(r)} \vec{E} d\vec{S} + \mu^2 \int_{K(r)} \phi dV = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Zadanie 4.

Wykazać, że postać wzoru na siłę Lorentza w elektrodynamice z monopolami magnetycznymi jest niezmiennicza względem transformacji dualnej.

Zadanie dodatkowe.

Obliczyć całkowity pęd \vec{p}_{em} i całkowity moment pędu pola elektromagnetycznego \vec{L}_{em} wytworzonego przez znajdujące się w odległości d od siebie nieruchomy punktowy ładunek elektryczny q_e i nieruchomy punktowy monopol magnetyczny q_m . Zwrócić uwagę, że $|\vec{L}_{em}|$ nie zależy od wyboru początku układu współrzędnych i od d .

Wskazówka: Obliczyć bezpośrednio potrzebne całki lub wykorzystać metodę obliczeń przedstawioną w podrozdziale 6.13 podręcznika J. D. Jacksona.