

III seria zadań domowych z elektrodynamiki R (2009/10)

Zadanie 1.

Wykazać, że odpowiednikami wzoru

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad \text{w przestrzeni trójwymiarowej } (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

są wzory

$$\Delta \ln \frac{a}{\rho} = -2\pi\delta(\vec{\rho}) \quad \text{w przestrzeni dwuwymiarowej } (\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\Delta |x| = 2\delta(x) \quad \text{w przestrzeni jednowymiarowej.}$$

Uwaga: Wyniki te oznaczają, że w wyrażeniach na potencjał elektrostatyczny dla ładunku punktowego pojawia się $\frac{1}{r}$, dla jednorodnie naładowanej nieskończonej nici wzdłuż osi z pojawia się $\ln \frac{a}{\rho}$ a dla jednorodnie naładowanej płaszczyzny Oyz pojawia się $|x|$. Dlaczego możemy uważać, że mamy szczęście, żyjąc w przestrzeni trójwymiarowej?

Zadanie 2.

W magnetostatyce potencjały pola wytworzonego przez prądy stałe o gęstości $\vec{j}(\vec{r})$ (niezerowej w skończonym obszarze przestrzeni) określa wzór Biot-Savarta

$$\phi(\vec{r}) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

a) Wykazać, że potencjały te odpowiadają cechowaniu Coulomba (a zarazem cechowaniu Lorentza i cechowaniu czasowemu), jeśli prądy \vec{j} spełniają zasadę zachowania ładunku elektrycznego.

b) Obliczyć $\vec{E}(\vec{r})$ i $\vec{B}(\vec{r})$ oraz sprawdzić, że spełniają one równania Maxwella.

Zadanie 3.

Przez odcinek walcowego przewodnika o promieniu a i długości l przepływa jednorodnie w całym przekroju stały prąd o natężeniu I przy różnicy potencjałów V między końcami przewodnika. Obliczyć wektor Poyntinga wewnątrz przewodnika i moc pola elektromagnetycznego wpływającą przez powierzchnię boczną przewodnika.

Zadanie 4.

Naładowany kondensator płaski (z okładkami o powierzchni S w odległości d), z jednorodnym polem elektrycznym o natężeniu $\vec{E} = E\vec{e}_z$ wewnątrz, umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = B\vec{e}_y$.

a) Obliczyć pęd pola elektromagnetycznego w przestrzeni między okładkami kondensatora.

b) Obliczyć całkowity pęd mechaniczny, jaki uzyska kondensator w procesie jego rozładowania, gdy okładki kondensatora połączymy wzdłuż osi z przewodnikiem (na prąd płynący w przewodniku będzie działać siła magnetyczna).

Zadanie 5.

Dwa jednakowe ładunki punktowe q znajdują się w odległości $2a$ od siebie. Przez scałkowanie tensora napięć Maxwella po płaszczyźnie równoodległej od tych ładunków obliczyć siłę, z jaką ładunki oddziałują ze sobą.