

VII seria zadań domowych z elektrodynamiki R (2009/10)

Zadanie 1.

Dwie połówki nieskończonej przewodzącej powierzchni walcowej o promieniu R mają potencjały V (dla $0 \leq \varphi < \pi$) i $-V$ (dla $\pi \leq \varphi < 2\pi$). Wykazać, że potencjał wewnątrz i na zewnątrz powierzchni walcowej można zsumować, otrzymując

$$\phi(\rho, \varphi) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2R\rho \sin \varphi}{|R^2 - \rho^2|} \right).$$

Obliczyć gęstość powierzchniową ładunku na powierzchni walcowej.

Wskazówka: $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$.

Zadanie 2.

Pusty wewnątrz sześcian ograniczony jest sześcioma ścianami przewodzącymi leżącymi w płaszczyznach $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x = a$, $y = a$, $z = a$. Potencjał ścian $z = 0$ i $z = a$ wynosi V , a pozostałe ściany są uziemione. Wyznaczyć potencjał w dowolnym punkcie wewnątrz sześcianu (w postaci szeregu) oraz powierzchniową gęstość ładunku na wewnętrznej stronie ściany $z = a$.

Zadanie 3.

Wewnątrz przewodzącej powierzchni kulistej o promieniu R i ładunku Q w odległości $d < R$ od jej środka znajduje się ładunek punktowy q . Znaleźć potencjał ϕ wewnątrz i na zewnątrz powierzchni kulistej, rozkład ładunku oraz siłę działającą na ładunek punktowy.

Zadanie 4.

a) Dwie uziemione półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi tworzą ze sobą kąt dwuścienny $\frac{\pi}{n}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Znaleźć metodą obrazów potencjał ϕ ładunku punktowego q znajdującego się w obszarze tego kąta dwuściennego.

b) Znaleźć metodą obrazów potencjał ϕ pola wytworzonego przez ładunek punktowy q umieszczony we wnętrzu uziemionej powierzchni półkuli (półsfery i jej podstawy) o promieniu R .

Zadanie 5.

a) Wykazać, że potencjał ϕ w $\vec{\rho}$ od nieskończonej nici naładowanej z gęstością liniową λ i przechodzącej przez $\vec{\rho}'$ można przedstawić w postaci poniższego szeregu

$$\phi(\vec{\rho}) \equiv \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left[\ln \frac{a}{\rho_{>}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \cos m(\varphi - \varphi') \right].$$

(Jest to dwuwymiarowy odpowiednik znanego z ćwiczeń wzoru $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$).

b) Wykorzystując powyższy wzór, znaleźć potencjał pola nieskończonej nici naładowanej z gęstością λ i umieszczonej równoległe do osi przewodzącej uziemionej powierzchni walcowej o promieniu R w odległości $d < R$ od tej osi. Wynik zinterpretować przy użyciu metody obrazów.

31.03.2010