I seria zadań domowych z elektrodynamiki klasycznej (2010/11)

Zadania obowiązkowe
Zadanie 1.
W kartezjańskim układzie współrzędnych udowodnić tożsamości:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0},$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{B}) = (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}),$$

$$2(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{A}) + \vec{\nabla}(\vec{A}\vec{B}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Zadanie 2.
W kartezjańskim układzie współrzędnych ($\vec{a}$, $\vec{b}$ - stałe wektory) obliczyć:

$$\vec{\nabla} \times [(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{r}], \quad \vec{\nabla}[(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{r}], \quad \vec{\nabla}[(\vec{a} \times \vec{r})(\vec{b} \times \vec{r})],$$

$$\Delta\,[(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{r}], \quad \Delta\,[(\vec{a}\vec{r})(\vec{b}\vec{r})].$$

Zadanie 3.
Potencjał pola magnetycznego wytworzonego przez dipol magnetyczny o momencie dipolowym $\vec{m}$, znajdujący się w początku układu współrzędnych, określony jest wzorem

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Wyznaczyć indukcję magnetyczną $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ w obszarze z $\vec{r} \neq \vec{0}$ (obliczenia wykonać w układach kartezjańskim i kulistym).

Zadania nadobowiązkowe
Zadanie 4. Wykazać, że twierdzeń Ostrograskiego-Gaussa i Stokesa wynikają nowe użyteczne twierdzenia:

$$\oint_S f d\vec{S} = \int_{V(S)} \vec{\nabla} f\, dV,$$

$$\oint_S \vec{A} \times d\vec{S} = -\int_{V(S)} \vec{\nabla} \times \vec{A}\, dV,$$

$$\oint_L f d\vec{r} = -\int_{S(L)} \vec{\nabla} f \times d\vec{S}.$$

Zadanie 5.
Przy użyciu twierdzeń Ostrogradskiego-Gaussa i Stokesa ($\vec{a}$ - stały wektor) obliczyć całki:

$$\oint_S \operatorname{grad} r^2 d\vec{S}, \quad \oint_S (\vec{r}\vec{a}) d\vec{S}, \quad \oint_S \vec{r}(\vec{a} d\vec{S}),$$

$$\oint_L (\vec{a} \times \vec{r}) d\vec{r}, \quad \oint_L (\vec{a}\vec{r}) d\vec{r}.$$

16.02.2011