II seria zadań z elektrodynamiki klasycznej (2010/11)

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1

Wykazać, że laplasjan ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$) we współrzędnych kulistych ma postać

$$\Delta f = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

Zadanie 2.

Korzystając z twierdzeń Gaussa i Stokesa obliczyć

a)

$$\oint_S r^2 \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

gdzie S jest powierzchnią sześcianu o bokach $2a$, równoległych do osi i środku w początku układu współrzędnych,

b)

$$\oint_L \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

gdzie $\vec{v} = (x^2, y^3, 0)$ a L jest elipsą leżącą w płaszczyźnie xy, półosiach a i b równoległych odpowiednio do osi x i y oraz środku w początku układu współrzędnych, zorientowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, patrząc od strony dodatnich z.

Zadanie 3.

Obliczyć

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \delta(\sin\phi)\phi d\phi,$$

$$\int_0^2 x^2 \delta'(x-1) dx.$$

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 4.

Wykazać, że laplasjan w dowolnych współrzędnych ξ_i, $i = 1, 2, 3$ ma postać

$$\Delta\phi = g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(g^{1/2} g^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}\right),$$

gdzie

$$g^{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j},$$

a g jest wyznacznikiem macierzy g^{ij}.

Zadanie 5.

Pokazać że, jeśli $\vec{A}(\vec{r}) = \int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\tilde{\vec{A}}(\vec{k})$, to $\vec{A}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$ jest równoważne $\tilde{\vec{A}}(\vec{k}) = -i\vec{k}\tilde{\phi}(\vec{k})$.